

Б. П. ДЕМИДОВИЧ

ЛЕКЦИИ  
ПО  
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ  
ТЕОРИИ  
УСТОЙЧИВОСТИ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
МОСКВА 1967

517.2  
Д 30  
УДК 517.91

**Лекции по математической теории устойчивости.** Демидович Б. П., 1967 г.

Систематически излагаются основы теории устойчивости решений обыкновенных дифференциальных уравнений и некоторые смежные вопросы. В дополнении излагаются основы теории почти периодических функций и их приложения к дифференциальным уравнениям. Включены дополнительные сведения к вузовскому курсу высшей математики.

Рисунков 66. Библиографических ссылок 82.

*Борис Павлович Демидович*

Лекции по математической теории устойчивости

М., 1967 г., 472 стр. с илл.

Редактор *Н. П. Купцов*

Техн. редактор *К. Ф. Брудно*

Корректоры *С. Н. Емельянова* и *Е. Я. Стржева*

Сдано в набор 11/VII 1967 г. Подписано к печати 5/XI 1967 г. Бумага 60 × 90<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Физ. печ. л. 29,5. Условн. печ. л. 29,5. Уч.-изд. л. 23,99. Тираж 35 000 экз. Т-12589. Цена книги 94 коп. Заказ № 1103.

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы  
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 1 «Печатный Двор» имени А. М. Горького Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР, г. Ленинград, Гатчинская ул., 26.

2-2-3  
49-67

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	6
Обозначения . . . . .	9

### Глава I

#### Некоторые сведения из матричного исчисления . . . . . 11

§ 1. Арифметические действия над матрицами . . . . .	11
§ 2. Степень матрицы . . . . .	18
§ 3. Клеточные матрицы . . . . .	19
§ 4. Норма матрицы . . . . .	20
§ 5. Векторное пространство . . . . .	22
§ 6. Жорданова форма матрицы . . . . .	35
§ 7. Функции матрицы . . . . .	41
§ 8. Матричные ряды . . . . .	42
§ 9. Матричные степенные ряды . . . . .	44
§ 10. Тождество Кейли и формула Сильвестра . . . . .	48
§ 11. Производная и интеграл матрицы . . . . .	50
§ 12. Экспоненциал матрицы . . . . .	54
§ 13. Нормальная форма экспоненциала матрицы . . . . .	55
§ 14. Некоторые свойства экспоненциала матрицы . . . . .	57
§ 15. Логарифм матрицы . . . . .	59
Упражнение к главе I . . . . .	62

### Глава II

#### Устойчивость линейных дифференциальных систем . . . . . 64

§ 1. Основные понятия теории устойчивости . . . . .	64
§ 2. Общие свойства решений линейной дифференциальной системы . . . . .	70
§ 3. Формула Остроградского — Лиувилля . . . . .	73
§ 4. Матрицант . . . . .	74
§ 5. Метод вариации произвольных постоянных Лагранжа . . . . .	76
§ 6. Общие теоремы об устойчивости линейных дифференциальных систем . . . . .	78
§ 7. Устойчивость линейных однородных дифференциальных систем . . . . .	81
§ 8. Устойчивость линейной дифференциальной системы с постоянной матрицей . . . . .	85
§ 9. Критерий Гурвица . . . . .	90
§ 10. Критерий Михайлова . . . . .	102
§ 11. Леммы Гронуолла — Беллмана и Бихари . . . . .	108
§ 12. Устойчивость линейной дифференциальной системы с почти постоянной матрицей . . . . .	112
§ 13. Случай Лаппо-Данилевского . . . . .	117
Упражнения к главе II . . . . .	119

## Глава III

<b>Первый метод Ляпунова</b> . . . . .	123
§ 1. Характеристические показатели функций . . . . .	123
§ 2. Характеристические показатели функциональных матриц . . . . .	132
§ 3. Спектр линейной однородной системы . . . . .	135
§ 4. Нормальные фундаментальные системы . . . . .	138
§ 5. Достаточное условие асимптотической устойчивости линейной дифференциальной системы . . . . .	147
§ 6. Неравенство Важевского . . . . .	149
§ 7. Неравенство Ляпунова . . . . .	150
§ 8. Приводимые системы. Теорема Н. П. Еругина . . . . .	153
§ 9. Приводимость к системе с нулевой матрицей . . . . .	156
§ 10. Асимптотически эквивалентные системы . . . . .	159
§ 11. Правильные системы . . . . .	165
§ 12. Теорема Перрона . . . . .	168
§ 13. Правильность треугольной линейной системы . . . . .	174
§ 14. Теорема Перрона о триангуляции линейной системы . . . . .	178
§ 15. Теория Флоке . . . . .	183
§ 16. Приводимость периодической линейной системы . . . . .	188
§ 17. Нормальная форма решений линейной периодической системы . . . . .	190
§ 18. Приближенное вычисление мультипликаторов . . . . .	193
§ 19. Линейное дифференциальное уравнение второго порядка с периодическими коэффициентами . . . . .	197
§ 20. Гамильтонова система дифференциальных уравнений . . . . .	208
§ 21. Возвратные уравнения . . . . .	211
§ 22. Теорема Ляпунова — Пуанкаре . . . . .	213
§ 23. Неоднородная периодическая система . . . . .	215
§ 24. Метод малого параметра . . . . .	222
Упражнения к главе III . . . . .	225

## Глава IV

<b>Второй метод Ляпунова</b> . . . . .	234
§ 1. Приведенная система . . . . .	234
§ 2. Знакоопределенные функции . . . . .	235
§ 3. Первая теорема Ляпунова (теорема об устойчивости) . . . . .	237
§ 4. Вторая теорема Ляпунова (теорема об асимптотической устойчивости) . . . . .	240
§ 5. Третья теорема Ляпунова (теорема об неустойчивости) . . . . .	244
§ 6. Теорема Четаева . . . . .	246
§ 7. Асимптотическая устойчивость в целом . . . . .	248
§ 8. Экспоненциальная устойчивость . . . . .	251
§ 9. Теорема Персидского . . . . .	254
§ 10. Устойчивость квазилинейных систем . . . . .	257
§ 11. Оценка матрицы Коши для правильной системы . . . . .	265
§ 12. Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению . . . . .	266
§ 13. Признак устойчивости для нелинейных систем с неправильной линейной частью . . . . .	271
§ 14. Неограниченная продолжаемость решений . . . . .	274
§ 15. Устойчивость по Лагранжу . . . . .	278
§ 16. Системы с конвергенцией . . . . .	281
§ 17. Диссипативные системы . . . . .	289
§ 18. Уравнения в вариациях . . . . .	293
§ 19. Орбитальная устойчивость . . . . .	295
§ 20. Аналог теоремы Андронова — Витта . . . . .	299



§ 21. Признак Пуанкаре . . . . .	312
§ 22. Условная устойчивость . . . . .	314
Упражнения к главе IV . . . . .	319

## Глава V

**Асимптотическое интегрирование дифференциальных уравнений** 324

§ 1. Равномерная сходимостъ семейства функций . . . . .	324
2. Теорема Арцеля . . . . .	325
3. Теорема Красносельского и Крейна . . . . .	328
4. Теорема Н. Н. Боголюбова . . . . .	332
5. Принцип сжатых отображений . . . . .	335
6. Сингулярные интегральные уравнения типа Вольтерра . . . . .	339
7. Асимптотика $L$ -диагональных систем . . . . .	342
8. Лемма о диагонализации переменной матрицы . . . . .	349
9. Приведение линейной системы к $L$ -диагональному виду . . . . .	353
10. Теорема Боля . . . . .	358
Упражнения к главе V . . . . .	365

## Дополнение

**Почти периодические функции** . . . . . 367

§ 1. Почти периодические функции в смысле Бора . . . . .	367
2. Основные свойства почти периодических функций . . . . .	369
§ 3. Арифметические действия с почти периодическими функциями . . . . .	371
§ 4. Равномерно сходящаяся последовательность почти периодических функций . . . . .	374
§ 5. Интеграл почти периодической функции . . . . .	376
6. Теорема о среднем значении почти периодической функции . . . . .	379
7. Пространство почти периодических функций . . . . .	387
8. Неравенство Бесселя . . . . .	389
9. Понятие о ряде Фурье почти периодической функции . . . . .	391
§ 10. Формальные операции над рядами Фурье почти периодических функций . . . . .	395
§ 11. Свертка почти периодической функции . . . . .	397
12. Теорема единственности . . . . .	402
13. Равенство Парсевала . . . . .	410
14. Теорема аппроксимации . . . . .	412
15. Теорема компактности Бохнера . . . . .	415
16. Почти периодические матрицы . . . . .	418
§ 17. Линейная система с постоянной матрицей и свободным почти периодическим членом . . . . .	421
§ 18. Квазилинейная почти периодическая система . . . . .	425
19. $H$ -класс почти периодической системы . . . . .	428
20. Ограниченные решения почти периодических систем . . . . .	431
21. Теоремы Америкю и Фавара . . . . .	437
Упражнения . . . . .	442

Приложение. Жорданова форма матрицы . . . . . 445

Цитированная литература . . . . . 466

Предметный указатель . . . . . 470

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Книга представляет собой обработанный и дополненный курс лекций по теории устойчивости решений дифференциальных уравнений, читанный автором в течение ряда лет на механико-математическом факультете Московского университета. Книга в основном рассчитана на студентов физико-математических факультетов университетов и педагогических институтов, прослушавших обычный курс теории обыкновенных дифференциальных уравнений, но она будет также доступна и инженерам механического профиля, так как необходимые дополнительные сведения по математике приведены в курсе. Большое внимание обращено на точность формулировок и строгость доказательств. Механические и физические приложения затронуты незначительно; интересующийся этими вопросами читатель может обратиться к сочинениям: А. А. Андронов, А. В. Витт, Э. С. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, 1959; Б. В. Булгаков, Колебания, ГИТТЛ, 1954; И. Г. Малкин, Теория устойчивости движения, ГИТТЛ, 1952; Н. Г. Четаев, Устойчивость движения, ГИТТЛ, 1946 и др.

Содержание книги посвящено классическому понятию устойчивости движения в смысле Ляпунова и некоторым связанным с ним проблемам. В основу положена матрично-векторная трактовка систем дифференциальных уравнений, в частности, широко использована жорданова форма матрицы. Это позволяет избежать излишних технических подробностей при вычислениях и более отчетливо выявлять суть дела. Решения линейных дифференциальных систем в большинстве случаев рассматриваются как комплекснозначные векторы-столбцы без перехода в действительную область; это выгодно при записи многих формул. Что касается нелинейных систем, то они, как правило, изучаются в действительной области.

Необходимые сведения по матричному исчислению приведены в первой главе и в приложении.

Чтобы не усложнять изложение техническими подробностями, в книге рассматриваются системы дифференциальных уравнений, правые части которых непрерывны (или кусочно непрерывны) относительно независимой переменной и дифференцируемы по зависимой переменной.

Первая глава книги содержит элементы матричного исчисления. Здесь излагаются алгебра матриц и теория матричных рядов. Дается понятие об экспоненциале и логарифме матрицы.

В главе второй изучается устойчивость линейных дифференциальных систем. Доказывается критерий Гурвица. На основе леммы Гронуолла — Беллмана исследуется устойчивость линейных систем с почти постоянной матрицей.

Глава третья посвящена первому методу Ляпунова. Проводится теория характеристических чисел функций и матриц. Рассматриваются правильные и приводимые системы, включая теоремы Ляпунова, Перрона и Еругина. Излагается теория Флоке и теорема Ляпунова — Пуанкаре для линейных гамильтоновых систем. Дается понятие о методе малого параметра для разыскания периодических решений.

В главе четвертой для систем в действительном пространстве изучаются основы второго метода Ляпунова. Доказываются классические теоремы Ляпунова, теорема Четаева и теорема обращения Персидского. С помощью метода функций Ляпунова устанавливаются необходимые и достаточные условия ограниченности решений дифференциальных систем (устойчивость в смысле Лагранжа). Дается понятие о диссипативных системах.

Глава пятая содержит теоремы Красносельского — Крейна, теорему усреднения Боголюбова и асимптотику  $L$ -диагональных систем.

В дополнении изложены основные сведения по теории почти периодических функций в смысле Бора и теорема Америо для почти периодических дифференциальных систем.

В приложении дается понятие о жордановой форме матрицы.

Приведенные рисунки носят приблизительный характер и являются лишь схемами, облегчающими понимание определений и доказательств.

Заметим, что отбор теоретического материала для курса лекций ввиду ограниченности времени является, естественно, неполным. Книга носит учебный характер и представляет собой введение в современную теорию устойчивости. Поэтому многие замечательные результаты наших и зарубежных ученых не нашли здесь отражения. Часть теорем приведена в упражнениях.

В конце книги помещен список цитированной литературы, который ни в коей мере не претендует на полноту.

Отметим, что нумерация формул дается по трехступенчатой системе ( $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma$ ), где первое число  $\alpha$  обозначает номер главы, второе  $\beta$  — номер параграфа и третье  $\gamma$  — номер формулы.

Приношу благодарность проф. В. В. Немыцкому за неизменный интерес к этой работе. Выражаю свою признательность проф. Л. Э. Эльсгольцу за обстоятельную рецензию на рукопись книги.

Считаю своим долгом поблагодарить доц. Н. П. Купцова, осуществившего компетентное научное редактирование рукописи книги и внесшего в нее ряд ценных дополнений и существенных исправлений.

Приношу благодарность также И. Е. Морозовой, проделавшей большую работу по редактированию книги.

*Б. П. Демидович*

Москва, 1967 г.

## ОБОЗНАЧЕНИЯ

$x \in X$  —  $x$  есть элемент множества  $X$ ;

$x \notin X$  ( $x \notin X$ ) —  $x$  не является элементом множества  $X$ ;

$X \subset Y$  — множество  $X$  составляет часть или совпадает с множеством  $Y$ , т. е. каждый элемент  $x \in X$  есть также элемент множества  $Y$ ;

$X \not\subset Y$  — множество  $X$  не является частью множества  $Y$ , т. е. существует элемент  $x^* \in X$  такой, что  $x^* \notin Y$ ;

$\exists x \in X$  — существует элемент  $x$  множества  $X$ ;

$\forall x \in X$  — все элементы  $x$  множества  $X$ ;

$\bigcup_a X_a$  — объединение (сумма) множества  $X_a$ ;

$\bigcap_a X_a$  — общая часть (произведение) множеств  $X_a$ ;

$X \setminus Y$  — разность множеств  $X$  и  $Y$ , т. е. совокупность всех элементов  $x \in X$  таких, что  $x \notin Y$ ;

$\{x : f(x) < a\}$  — множество всех точек  $x$ , для которых выполнено неравенство  $f(x) < a$ ;

$(a, b)$  — интервал  $a < x < b$ ;

$[a, b]$  — сегмент (отрезок)  $a \leq x \leq b$ ;

$\{a, b\}$  и  $(a, b]$  — полусегменты  $a \leq x < b$  и  $a < x \leq b$ ;

$\operatorname{Re} z = x$ ,  $\operatorname{Im} z = y$  — действительная и мнимая части комплексного числа  $z = x + iy$  ( $i = \sqrt{-1}$ );

$\bar{z} = x - iy$  — сопряженная величина для числа  $z$ ;

$|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}$  — модуль числа  $z$ ;

$A = (a_{jk})$  — матрица с элементами  $a_{jk}$ ;

$A^T = (a_{kj})$  — транспонированная матрица  $A$ ;

$A^* = (\bar{a}_{kj})$  — эрмитово-транспонированная матрица  $A$ ;

$\det A$  — определитель матрицы  $A$ ;

$\|A\|$  — норма матрицы  $A$ ;

$\operatorname{Sp} A = \sum a_{jj}$  — след квадратной матрицы  $A$ ;

$\operatorname{diag} (A_1, \dots, A_p) = \begin{bmatrix} \boxed{A_1} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \boxed{A_p} & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$  — квазидиагональная матрица;

$\text{colon } (x_1, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$  — матрица-столбец;

$X \times Y$  — декартово произведение множеств  $X$  и  $Y$ , т. е. совокупность всех пар  $(x, y)$ , где  $x \in X$  и  $y \in Y$ ;

$\mathfrak{R}_x^n$  — комплексное  $n$ -мерное векторное пространство  $0x_1 \dots x_n$ , т. е. множество всех упорядоченных  $n$ -мерных комплексов  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  (точки или радиусы-векторы пространства), где  $x_j = \xi_j + i\eta_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) — комплексные числа (координаты вектора  $\mathbf{x}$ );

$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_j x_j \bar{y}_j$  — скалярное произведение векторов  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$ ;

$\mathfrak{R}_x^n$  — действительное  $n$ -мерное пространство  $0x_1 \dots x_n$ ;

$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$  — евклидова норма вектора  $\mathbf{x}$ ;

$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$  — евклидово расстояние векторов  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$ ;

$f(\mathbf{x}) \in C(D)$  — функция  $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$  непрерывна в области

$D \subset \mathfrak{R}_x^n$ ;

$f(\mathbf{x}) \in C^m(D)$  — функция  $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$  непрерывна в действительной области  $D \subset \mathfrak{R}_x^n$  вместе со своими частными производными

$$\frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \quad (\alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_n \geq 0)$$

до порядка  $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = m$  включительно ( $C^0 \equiv C$ );

$f(x_1, \dots, x_n) \in C_{x_1, \dots, x_n}^{(m_1, \dots, m_n)}(D)$  — функция  $f(x_1, \dots, x_n)$  имеет в области

$D \subset \mathfrak{R}_x^n$  непрерывные частные производные

$$\frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

где  $0 \leq \alpha_1 \leq m_1, \dots, 0 \leq \alpha_n \leq m_n$ ;

$f(\mathbf{x}) \in \text{Lip}$  — функция  $f(\mathbf{x})$  удовлетворяет условию Липшица.

ГЛАВА I

**НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ  
ИЗ МАТРИЧНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ**

**§ 1. Арифметические действия над матрицами**

Определение 1. Под *матрицей*  $A = (a_{jk})$  типа  $m \times n$  (или, короче,  $(m \times n)$ -матрицей) понимается система действительных или комплексных чисел (или функций), записанная в виде прямоугольной таблицы:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}. \quad (1.1.1)$$

Числа (функции)  $a_{jk}$  называются *элементами матрицы*  $A$ , причем первый индекс  $j$  есть номер строки, а второй  $k$  — номер столбца (см. [1]).

Матрицы

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \equiv \text{colon } (x_1, \dots, x_m)$$

и

$$\mathbf{y} = [y_1, \dots, y_n]$$

типа  $m \times 1$  и  $1 \times n$  называются, соответственно, *вектором-столбцом* и *вектором-строкой*.

Матрицу  $A = (a_{11})$  типа  $1 \times 1$  принято отождествлять с числом (скаляром)  $a_{11}$ .

Если  $A$  — квадратная матрица, то под  $\det A$  будем понимать ее *определитель*.

Определение 2. Матрица (1.1.1) называется *нулевой* и обозначается

$$A = 0,$$

если  $a_{jk} = 0$  для всех допустимых  $j$  и  $k$  ( $j = 1, \dots, m; k = 1, \dots, n$ ).

Две матрицы  $A = (a_{jk})$  типа  $m \times n$  и  $B = (b_{jk})$  типа  $m' \times n'$  считаются равными:

$$A = B,$$

если 1) они имеют одинаковые типы, т. е.  $m' = m$  и  $n' = n$ , и 2)  $\forall^1) a_{jk} = b_{jk}$ , т. е. каждый элемент матрицы  $A$  равен соответствующему элементу матрицы  $B$ .

Определение 3. Сумма и, соответственно, разность двух матриц  $A = (a_{jk})$  и  $B = (b_{jk})$  одинаковых типов определяется формулой

$$A \pm B = (a_{jk} \pm b_{jk}).$$

Очевидно, имеет место переместительное свойство

$$A + B = B + A.$$

Если  $A$ ,  $B$  и  $C$  — матрицы одинаковых типов, то по определению полагаем

$$A + B + C = (A + B) + C,$$

причем

$$(A + B) + C = A + (B + C).$$

По индукции можно определить сумму любого конечного числа матриц одинаковых типов.

Определение 4. Под произведением матрицы  $A = (a_{jk})$  на число  $\alpha$  понимается матрица

$$\alpha A = \alpha A = (\alpha a_{jk}).$$

Если  $A$  и  $B$  — матрицы, а  $\alpha$  и  $\beta$  — числа, вообще говоря, комплексные, то очевидны свойства:

$$1) (\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta A;$$

$$2) \alpha (A + B) = \alpha A + \alpha B;$$

$$3) \alpha (\beta A) = (\alpha\beta) A;$$

$$4) 1A = A;$$

$$5) 0A = 0.$$

Матрица

$$-B \equiv (-1)B = (-b_{jk})$$

называется противоположной для матрицы  $B = (b_{jk})$ . Очевидно, имеем  $B + (-B) = 0$  и

$$A - B = A + (-B).$$

Заметим, что если  $A$  — квадратная матрица порядка  $n$ , то  $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$ .

<sup>1)</sup> Символ  $\forall$  обозначает «вс».



Определение 5. Под *произведением матриц*  $A = (a_{jk})$  типа  $m \times n$  и  $B = (b_{jk})$  типа  $m' \times n'$ , где  $n = m'$ , понимается матрица

$$AB = \left( \sum_{s=1}^n a_{js} b_{sk} \right)$$

типа  $m \times n'$ .

Аналогично, если  $m = n'$ , то

$$BA = \left( \sum_{s=1}^m a_{sk} b_{js} \right)$$

есть матрица типа  $n \times m'$ .

Пример.

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1x + b_1y + c_1z \\ a_2x + b_2y + c_2z \\ a_3x + b_3y + c_3z \end{bmatrix}.$$

В общем случае даже для квадратных матриц

$$AB \neq BA.$$

Пример.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Если  $A, B, C$  — матрицы и  $\alpha$  — число, то справедливы следующие свойства:

- 1)  $(A + B)C = AC + BC$ ;
- 2)  $A(BC) = (AB)C$ ;
- 3)  $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$ .

Из определения 5 следует, что квадратные матрицы  $A = (a_{jk})$  и  $B = (b_{jk})$  допускают перемножение друг на друга в любом порядке тогда и только тогда, когда они одинакового порядка. В этом случае

$$\det(AB) = \det(BA) = \det A \cdot \det B.$$

*Единичная* ( $n \times n$ )-матрица

$$E_n = E \equiv (\delta_{jk}),$$

где  $\delta_{jk}$  — символ Кронекера, т. е.

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{если } j = k, \\ 0, & \text{если } j \neq k, \end{cases}$$

играет роль единицы при умножении:

$$EA = AE = A,$$

где  $A$  — любая квадратная матрица, одинакового с  $E$  порядка.

Определение 6. Матрицу

$$I_p \equiv (\gamma_{jk}) = \left. \begin{array}{c} \overbrace{0 \dots 1}^{p+1} \quad 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 \quad 1 \dots 0 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ 0 \dots 0 \quad 0 \dots 1 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ 0 \dots 0 \quad 0 \dots 0 \end{array} \right\} n-p,$$

где

$$\gamma_{j, j+p} = 1 \quad (j = 1, \dots, n-p)$$

и

$$\gamma_{jk} = 0 \quad \text{при } k - j \neq p \quad (0 \leq p \leq n-1),$$

будем называть  $p$ -м *единичным косым рядом* (верхним) порядка  $n$  (см. [1]).

Очевидно,

$$I_0 = E.$$

Лемма. Если  $I_p$  и  $I_q$  — единичные косые ряды одного и того же порядка  $n$ , то

$$I_p I_q = I_{p+q} \quad \text{при } 0 \leq p+q \leq n-1$$

и

$$I_p I_q = 0 \quad \text{при } p+q \geq n.$$

Доказательство. Пусть

$$I_p = (a_{jk}), \quad I_q = (b_{jk}), \quad I_p I_q = (c_{jk}).$$

Имеем

$$c_{jk} = \sum_s a_{js} b_{sk}.$$

Из определения 6 следует, что  $c_{jk}$  равно 0 или 1, причем  $c_{jk} = 1$  тогда и только тогда, когда для некоторого  $s$  имеем

$$s - j = p, \quad k - s = q. \quad (1.1.2)$$

Отсюда при  $p+q < n$  получаем

$$k - j = p + q.$$

Следовательно,

$$I_p I_q = I_{p+q} \text{ при } 0 \leq p + q < n.$$

Если же  $p + q \geq n$ , то равенства (1.1.2) не могут быть выполнены одновременно. Поэтому

$$I_p I_q = O \text{ при } p + q \geq n.$$

Замечание. Если условно полагать  $I_p = O$  при  $p \geq n$ , то всегда

$$I_p I_q = I_{p+q} \quad (p, q \geq 0).$$

Следствие. Если  $p$  — натуральное число, то

$$\underbrace{I_1 \dots I_1}_p = I_1^p = I_p. \quad (1.1.3)$$

Определение 7. Если  $A = (a_{jk})$  есть матрица типа  $m \times n$ , то матрица

$$A^T = (a_{kj})$$

типа  $n \times m$  называется *транспонированной* по отношению к матрице  $A$ .

Матрица  $A$  называется *симметрической*, если

$$A^T = A;$$

и *кососимметрической*, если

$$A^T = -A.$$

Для матриц  $A$  и  $B$ , допускающих указанные действия, справедливы соотношения:

$$1) (A^T)^T = A;$$

$$2) (\alpha A + \beta B)^T = \alpha A^T + \beta B^T \quad (\alpha \text{ и } \beta \text{ — числа});$$

$$3) (AB)^T = B^T A^T.$$

Если  $A$  — квадратная матрица, то

$$\det A^T = \det A.$$

Определение 8. Если  $A = (a_{jk})$ , то матрица

$$\bar{A} = (\bar{a}_{jk})$$

(где  $\bar{a}_{jk}$  — сопряженные величины для  $a_{jk}$ ) называется *комплексно-сопряженной* для матрицы  $A$ .

Если  $A$  — квадратная матрица, то, очевидно,

$$\det \bar{A} = \overline{\det A}.$$

Матрица

$$A^* = \bar{A}^T \equiv (\bar{a}_{kj})$$

называется *эрмитово-сопряженной* или просто *сопряженной* для матрицы  $A$ .

Очевидно, выполнены соотношения:

- 1)  $(A^*)^* = A$ ;
- 2)  $(A + B)^* = A^* + B^*$ ;
- 3)  $(AB)^* = B^*A^*$ .

Если

$$A^* = A,$$

то матрица  $A$  называется *эрмитовой* или *самосопряженной*.

Действительная матрица  $A$  является самосопряженной тогда и только тогда, когда она симметрическая:

$$A^T = A.$$

**Определение 9.** Матрица  $A^{-1}$  называется *обратной* данной матрице  $A$ , если

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E, \quad (1.1.4)$$

где  $E$  — единичная матрица соответствующего порядка.

Из условия (1.1.4) следует, что если матрица  $A$  имеет обратную  $A^{-1}$ , то матрицы  $A$  и  $A^{-1}$  — квадратные и одного и того же порядка.

Обратная матрица для данной матрицы  $A$  единственна. Действительно, если, кроме  $A^{-1}$ , существует обратная матрица  $B$ , т. е.  $BA = AB = E$ , то

$$BA = A^{-1}A.$$

Отсюда, умножая последнее равенство справа на  $A^{-1}$ , получим

$$BAA^{-1} = A^{-1}AA^{-1},$$

т. е.

$$B = A^{-1}.$$

**Определение 10.** Матрица  $A$  называется *неособенной* (*несингулярной*), если она квадратная и

$$\det A \neq 0.$$

В противном случае матрица  $A$  называется *особенной* (*сингулярной*).

**Теорема.** *Всякая неособенная матрица имеет обратную.*

Доказательство. Пусть  $A = [a_{jk}]$  — неособенная матрица и

$$A^S = [A_{jk}]^T \equiv [A_{kj}]$$

— союзная матрица, представляющая собой транспонированную матрицу  $[A_{jk}]$ , элементами которой служат алгебраические дополнения  $A_{jk}$  элементов  $a_{jk}$ .

Рассмотрим матрицу

$$B = \frac{A^S}{\det A}.$$

Согласно известному свойству (см. [2]) имеем

$$AB = \frac{1}{\det A} \left( \sum_s a_{js} A_{ks} \right) = \frac{1}{\det A} (\delta_{jk} \cdot \det A) = E$$

и

$$BA = \frac{1}{\det A} \left( \sum_s a_{sj} A_{sk} \right) = \frac{1}{\det A} (\delta_{jk} \cdot \det A) = E.$$

Следовательно, на основании формулы (1.1.4) получаем

$$B = A^{-1}.$$

Таким образом,

$$A^{-1} = \left( \frac{A_{jk}}{\det A} \right)^T.$$

Замечание. Из формулы (1.1.4) вытекает

1)  $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$ ;

2)  $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ ;

3) если  $A$  и  $B$  — неособенные матрицы одинакового порядка, то

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Определение 11. Действительная квадратная матрица  $S$ , удовлетворяющая условию:

$$S^{-1} = S^T, \quad (1.1.5)$$

называется *ортогональной*.

Из соотношения (1.1.5) получаем

$$\det S = \pm 1.$$

Пример. Если  $\alpha$  действительно, то матрица

$$A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix},$$

как нетрудно проверить, является ортогональной.

Заметим, что матрица, обратная ортогональной матрице  $S$ , есть матрица ортогональная. Действительно,

$$S^{-1} (S^{-1})^T = S^T (S^T)^{-1} = E.$$

Таким образом,

$$S = (S^{-1})^T.$$

Определение 12. Квадратная матрица  $U$ , обладающая свойством

$$U^{-1} = U^*, \quad (1.1.6)$$

называется *унитарной*.

Очевидно, имеем

$$UU^* = U^*U = E.$$

На основании (1.1.6) выводим

$$|\det U| = 1.$$

Заметим, что если  $U$  унитарна, то  $U^{-1}$  также унитарна и, следовательно,

$$|\det U^{-1}| = 1.$$

Определение 13. Под *следом*  $\text{Sp } A$  квадратной матрицы  $A = [a_{jk}]$  понимается сумма всех ее диагональных элементов:

$$\text{Sp } A = \sum_j a_{jj}.$$

Очевидно, имеем

$$\text{Sp } A^T = \text{Sp } A$$

и

$$\text{Sp } (\alpha A) = \alpha \text{Sp } A \quad (\alpha - \text{скаляр}).$$

Если  $A$  и  $B$  — квадратные матрицы одного и того же порядка, то справедливы следующие соотношения:

- 1)  $\text{Sp } (\alpha A + \beta B) = \alpha \text{Sp } A + \beta \text{Sp } B$  ( $\alpha$  и  $\beta$  — числа);
- 2)  $\text{Sp } (AB) = \text{Sp } (BA)$ .

## § 2. Степень матрицы

Если  $A$  — квадратная матрица и  $p$  — натуральное число, то по определению полагают

$$A^p = \underbrace{A \dots A}_p \text{ раз}$$

Кроме того, имеет место соглашение

$$A^0 = E,$$

где  $E$  — единичная матрица того же порядка, что и  $A$ .

Если  $A$  — неособенная матрица, то по определению имеем

$$A^{-p} = (A^{-1})^p \quad (p > 0).$$

В этом случае для любых целых  $p$  и  $q$  справедливо *правило перемножения степеней*

$$A^p A^q = A^{p+q}. \quad (1.2.1)$$

В случае особенной матрицы  $A$  формула (1.2.1) имеет место лишь для неотрицательных  $p$  и  $q$ .

Если  $A$  и  $B$  — квадратные матрицы одного и того же порядка, перестановочные между собой, т. е.

$$AB = BA,$$

то для натурального  $p$  справедлива *формула бинома Ньютона*

$$(A + B)^p = \sum_{k=0}^p C_p^k A^{p-k} B^k,$$

где

$$C_p^q = \frac{p!}{q! (p-q)!}$$

— число сочетаний из  $p$  элементов по  $q$ .

### § 3. Клеточные матрицы

В приложениях приходится рассматривать матрицы

$$A = \left[ \begin{array}{c|c|c} K_{11} & \dots & K_{1n} \\ \hline \dots & \dots & \dots \\ \hline K_{m1} & \dots & K_{mn} \end{array} \right] \equiv [K_{pq}], \quad (1.3.1)$$

элементы которых  $a_{jk}$  объединены в *клетки (блоки)*  $K_{pq}$ . Такие матрицы называются *клеточными* или *блочными*.

Если

$$B = [L_{pq}]$$

— клеточная матрица, имеющая одинаковое с матрицей  $A$  разбиение на блоки, то

$$A \pm B = [K_{pq} \pm L_{pq}].$$

Если клетки  $K_{pr}$  и  $L_{rq}$  допускают перемножение для любых  $p, q$  и  $r$ , то

$$AB = \left[ \sum_r K_{pr} L_{rq} \right];$$

В частности, пусть

$$A = \text{diag}(K_1, \dots, K_s) \equiv \begin{bmatrix} \boxed{K_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{K_s} \end{bmatrix},$$

$$B = \text{diag}(L_1, \dots, L_s) \equiv \begin{bmatrix} \boxed{L_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{L_s} \end{bmatrix}$$

— квазидиагональные матрицы (клеточно-диагональные), содержащие квадратные клетки  $K_1, \dots, K_s$  и  $L_1, \dots, L_s$ , расположенные по главной диагонали, причем все остальные элементы матриц  $A$  и  $B$  равны нулю. Тогда, если порядки клеток  $K_j$  и  $L_j$  ( $j = 1, \dots, s$ ) одинаковы, то

$$A \pm B = \text{diag}(K_1 \pm L_1, \dots, K_s \pm L_s)$$

и

$$AB = \text{diag}(K_1 L_1, \dots, K_s L_s).$$

Отсюда

$$A^p = \text{diag}(K_1^p, \dots, K_s^p) \quad (p \geq 0).$$

#### § 4. Норма матрицы

**Определение.** Под *нормой матрицы*  $A = [a_{jk}]$  понимается неотрицательное число  $\|A\|$ , удовлетворяющее следующим условиям (аксиомам):

- 1)  $\|O\| = 0$ , и обратно, если  $\|A\| = 0$ , то  $A = O$ ;
- 2)  $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$ , где  $\alpha$  — любое комплексное число;
- 3)  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ , где  $A$  и  $B$  — любые матрицы, допускающие сложение;
- 4)  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ , где  $A$  и  $B$  — любые матрицы, допускающие умножение.

Из 2) и 3) вытекает

$$\|A - B\| \leq \|A\| + \|B\|.$$



В дальнейшем мы будем использовать три нормы:

$$\|A\|_I = \max_j \sum_k |a_{jk}|;$$

$$\|A\|_{II} = \max_k \sum_j |a_{jk}|;$$

$$\|A\|_{III} = \left\{ \sum_{j,k} |a_{jk}|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \equiv (\text{Sp } A^* A)^{\frac{1}{2}}$$

(евклидова норма).

Для вектора-столбца

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

эти нормы имеют, соответственно, следующие значения:

$$\|x\|_I = \max_j |x_j|;$$

$$\|x\|_{II} = \sum_j |x_j|;$$

$$\|x\|_{III} = \sqrt{\sum_j |x_j|^2}.$$

В дальнейшем, если некоторое соотношение окажется выполненным для любой нормы I—III, то значок при норме будет опускаться.

Нетрудно проверить [3], что для приведенных норм выполнены аксиомы 1)–4). Кроме того, имеет место следующее свойство:

5)  $\forall |a_{jk}| \leq \|A\|$ .

Отметим, что если  $A = [a_{ij}]$  есть  $(1 \times 1)$ -матрица, то

$$\|A\| = |a_{11}|.$$

Отметим еще одно полезное свойство нормы:

$$\left| \|A\| - \|B\| \right| \leq \|A - B\|. \quad (1.4.1)$$

Действительно,

$$\|A\| = \|B + (A - B)\| \leq \|B\| + \|A - B\|,$$

т. е.

$$\|A\| - \|B\| \leq \|A - B\|. \quad (1.4.2)$$

Аналогично имеем

$$\|B\| - \|A\| \leq \|B - A\| = \|A - B\|. \quad (1.4.3)$$

Из неравенств (1.4.2) и (1.4.3) вытекает неравенство (1.4.1).

Введем понятие *абсолютной величины (модуля)* матрицы  $A = [a_{jk}]$ , полагая

$$|A| \equiv \text{mod } A = [ |a_{jk}| ].$$

Для норм I — III, очевидно, имеем

$$\|A\| = \|\text{mod } A\|.$$

Для матриц  $A = [a_{jk}]$  и  $B = [b_{jk}]$  одинакового типа можно ввести понятие *неравенства*

$$A \leq B \quad (1.4.4)$$

в том случае, если  $\forall a_{jk} \leq b_{jk}$ ; в частности,  $A \geq 0$ , если  $\forall a_{jk} \geq 0$ .

Из формул для норм I — III вытекает: если выполнено неравенство (1.4.4)

$$\text{mod } A \leq \text{mod } B,$$

то справедливо *свойство монотонности нормы*

$$\|A\| \leq \|B\|.$$

## § 5. Векторное пространство

**Определение 1.** Упорядоченная совокупность чисел (вообще говоря, комплексных)

$$x = \{x_1, \dots, x_n\}$$

называется *n-мерным вектором*, а числа  $x_1, \dots, x_n$  называются *координатами (компонентами)* вектора  $x$ .

В дальнейшем мы будем интерпретировать *n-мерный вектор*  $x$  как  $(n \times 1)$ -матрицу (матрица-столбец)

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Транспонированный вектор

$$x^T = [x_1, \dots, x_n]$$

представляет собой  $(1 \times n)$ -матрицу (матрица-строка).

Если

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

— векторы и  $\alpha$  — произвольное комплексное число, то естественно определяются операции сложения векторов

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$$

и умножения вектора на число (скаляр)

$$\alpha \mathbf{x} \equiv \mathbf{x} \alpha = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{bmatrix}.$$

Эти операции обладают обычными свойствами.

Определение 2. Совокупность всех  $n$ -мерных векторов  $\mathbf{x}$  с определенными операциями сложения и умножения на число называется  $n$ -мерным векторным пространством (комплексным)  $\mathfrak{R}^n$ , а сами векторы  $\mathbf{x}$  — точками этого пространства.

Для векторов  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathfrak{R}^n$  определим скалярное произведение:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^n x_j \bar{y}_j, \quad (1.5.1)$$

где  $\bar{y}_j$  — число, комплексно-сопряженное с  $y_j$ . Если ввести эрмитово-сопряженный вектор

$$\mathbf{y}^* = \bar{\mathbf{y}}^T,$$

где

$$\bar{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \vdots \\ \bar{y}_n \end{bmatrix},$$

то формулу (1.5.1) можно записать в виде

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{y}^* \mathbf{x}. \quad (1.5.2)$$

Легко проверить, что скалярное произведение обладает следующими свойствами:

- 1)  $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0$ , если  $\mathbf{x} \neq 0$ , и  $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ , если  $\mathbf{x} = 0$ ;
- 2)  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \overline{(\mathbf{y}, \mathbf{x})}$ ;
- 3)  $(\alpha \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \alpha (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ,  $(\mathbf{x}, \alpha \mathbf{y}) = \bar{\alpha} (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , где  $\alpha$  — произвольное комплексное число;

$$4) (\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{z}) + (\mathbf{y}, \mathbf{z}), (\mathbf{z}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) = (\mathbf{z}, \mathbf{x}) + (\mathbf{z}, \mathbf{y}).$$

Число

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} \equiv \sqrt{\sum_j |x_j|^2}$$

называется длиной или модулем вектора  $\mathbf{x}$  (ср. § 4).

Заметим, что если вектор  $x$  рассматривать как матрицу-столбец, то длина вектора  $|x|$  совпадает с его нормой  $\|x\|$ , т. е. евклидова норма вектора согласована с его длиной.

Из формулы (1.5.2) имеем *неравенство Коши*

$$|(x, y)| \leq \|y^*\| \|x\| = \|x\| \|y\|.$$

Векторное пространство  $\mathfrak{R}^n$ , в котором определено скалярное произведение со свойствами 1) — 4), будем называть *комплексным евклидовым* или *унитарным* пространством (см. [4]).

Иногда будем рассматривать *вещественное  $n$ -мерное векторное пространство  $\mathfrak{R}^n$* , точки которого представляют собой векторы  $x$  с действительными координатами  $x_j$  ( $j=1, \dots, n$ ). Для таких пространств операция умножения на скаляр определена лишь для действительных чисел.

Для вещественного пространства  $\mathfrak{R}^n$  свойства 1) — 4) принимают вид:

$$1') (x, x) > 0 \text{ при } x \neq 0 \text{ и } (x, x) = 0 \text{ при } x = 0;$$

$$2') (x, y) = (y, x);$$

$$3') (ax, y) = a(x, y) \text{ (} a \text{ — вещественное число),}$$

$$4') (x + y, z) = (x, z) + (y, z).$$

В этом случае норму вектора

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{\sum_j x_j^2}$$

будем называть *евклидовой*, а само пространство  $\mathfrak{R}^n$  — *евклидовым  $n$ -мерным* пространством.

Векторное пространство  $\mathfrak{R}^n$  является частным случаем *линейного пространства  $\mathfrak{L}$* , под которым понимается совокупность элементов  $x, y, z, \dots$ , произвольной природы, с двумя определенными операциями: а) сложением  $x + y$  и б) умножением  $ax$  на комплексное число  $a$ , не выводящими за пределы  $\mathfrak{L}$ . Предполагается, что эти операции удовлетворяют обычным аксиомам алгебры.

Вектор

$$y = \sum_{j=1}^m c_j x^{(j)}, \quad (1.5.3)$$

где  $c_j$  — постоянные, называется *линейной комбинацией* векторов  $x^{(1)}, \dots, x^{(m)}$ .

Определение 3. Векторы  $x^{(1)}, \dots, x^{(m)}$  называются *линейно зависимыми*, если некоторая нетривиальная линейная комбинация их представляет нуль-вектор, т. е.

$$\sum_j c_j x^{(j)} = 0 \text{ и } \sum_j |c_j| \neq 0.$$

В противном случае векторы называются *линейно независимыми*.

**Определение 4.** Совокупность  $n$  линейно независимых векторов  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  образует *базис векторного пространства*  $\mathfrak{R}^n$  (см. [4]), если каждый вектор  $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n$  можно представить единственным способом в виде линейной комбинации

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n \xi_j \mathbf{e}_j,$$

где  $\xi_j$  — некоторые числа, называемые *координатами вектора*  $\mathbf{x}$  в данном базисе.

Вектор

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}_{\mathbf{e}}$$

отнесенный к данному базису  $\mathbf{e} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ , будем называть *представлением вектора*  $\mathbf{x}$  в этом базисе. Очевидно, для вектора  $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$  числа  $x_1, \dots, x_n$  являются его координатами в каноническом базисе ортов:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \{1, 0, \dots, 0\}, \\ \mathbf{e}_2 &= \{0, 1, \dots, 0\}, \\ &\dots \dots \dots \\ \mathbf{e}_n &= \{0, 0, \dots, 1\}. \end{aligned}$$

Базис  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  называется *ортогональным*, если векторы его попарно ортогональны, т. е.

$$(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = 0 \text{ при } j \neq k.$$

Если, кроме того,

$$(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_j) = 1,$$

то базис называется *нормированным*. В этом случае имеем

$$(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = \delta_{jk},$$

где  $\delta_{jk}$  — символ Кронекера.

Пусть  $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(k)}$  — линейно независимые векторы в  $\mathfrak{R}^n$  и  $c_1, \dots, c_k$  — произвольные числа. Совокупность всех векторов

$$\mathbf{y} = \sum_{j=1}^k c_j \mathbf{x}^{(j)}$$

представляет собой линейное пространство  $\mathfrak{L}_k \subset \mathfrak{R}^n$  (так называемое *линейное подпространство* в  $\mathfrak{R}^n$ , порожденное  $k$  векторами  $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(k)}$ ).

Обратно, пусть некоторое множество  $\mathfrak{L}$  является линейным пространством в  $\mathfrak{R}^n$  относительно введенных там операций сложения векторов и умножения векторов на числа, т. е.  $\mathfrak{L}$  есть линейное подпространство в  $\mathfrak{R}^n$ . Тогда любая максимальная система  $x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$  линейно независимых векторов из  $\mathfrak{L}$  образует его базис, т. е. для каждого элемента  $y \in \mathfrak{L}$  справедливо представление (1.5.3), а число  $k$  ( $0 \leq k \leq n$ ) называется *размерностью подпространства*  $\mathfrak{L}$ :

$$\dim \mathfrak{L} = k.$$

Введем понятие *ранга матрицы*.

Определение 5. Под *рангом*  $r = r(A)$  матрицы  $A = [a_{jk}]$  понимается максимальный порядок ее минора, отличного от нуля.

Если матрица  $A$  имеет тип  $n \times m$ , то, очевидно,

$$r(A) \leq \min(n, m).$$

Если столбцы матрицы  $A$  рассматривать как векторы пространства  $\mathfrak{R}^n$ , то ее ранг  $r(A)$  представляет собой максимальное число линейно независимых столбцов и, следовательно, совпадает с размерностью подпространства  $\mathfrak{L}_r$ , порожденного этими векторами:

$$r(A) = \dim \mathfrak{L}_r.$$

Заметим, что матрица  $A$  и ее эрмитово-сопряженная матрица  $A^*$  имеют одинаковые ранги:

$$r(A^*) = r(A).$$

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\sum_{k=1}^n a_{jk} x_k = b_j \quad (j = 1, \dots, n). \quad (1.5.4)$$

Введя матрицу системы  $A = [a_{jk}]$  и векторы-столбцы  $x = \text{colop}(x_1, \dots, x_n)$ ,  $b = \text{colop}(b_1, \dots, b_n)$ , систему (1.5.4) можно записать в виде векторно-матричного уравнения

$$Ax = b. \quad (1.5.5)$$

Теорема Кронекера—Капелли (см. [2]). Система (1.5.5) имеет решения тогда и только тогда, когда ранг  $r = r(A)$  матрицы  $A$  системы совпадает с рангом  $r' = r(B)$  расширенной матрицы

$$B = \left[ \begin{array}{c|c} A & b \end{array} \right].$$

В частности, если  $\det A \neq 0$ , то, очевидно,  $r(A) = r(B) = n$  и для системы (1.5.5) существует единственное решение

$$x = A^{-1} b.$$

Если  $\det A = 0$  и  $k = n - r$  — дефект матрицы  $A$ , то каждая из однородных линейных систем

$$A\xi = 0 \text{ и } A^*\eta = 0 \quad (1.5.6)$$

имеет  $k$  линейно независимых нетривиальных решений соответственно:  $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(k)}$  и  $\eta^{(1)}, \dots, \eta^{(k)}$ . В этом случае линейная неоднородная система (1.5.5) совместна тогда и только тогда, когда выполнены условия ортогональности:

$$(\eta^{(p)}, b) = 0 \quad (p = 1, \dots, k).$$

При соблюдении этих условий система (1.5.5) допускает  $\infty^k$  решений:

$$x = x_0 + \sum_{j=1}^k c_j \xi^{(j)},$$

где  $x_0$  — некоторое частное решение системы (1.5.5) и  $c_1, \dots, c_k$  — произвольные постоянные.

Определение 6. Пусть каждому вектору  $x \in \mathfrak{R}^n$  ставится в соответствие вектор  $y \in \mathfrak{R}^m$ . Тогда говорят, что в  $\mathfrak{R}^n$  определено преобразование

$$y = \hat{A}x, \quad (1.5.7)$$

действующее из  $\mathfrak{R}^n$  в  $\mathfrak{R}^m$ .

Естественно определяются операции над преобразованиями  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$ :

$$\begin{aligned} (\alpha \hat{A})x &= \alpha(\hat{A}x) \quad (\alpha - \text{число}); \\ (\hat{A} + \hat{B})x &= \hat{A}x + \hat{B}x; \\ (\hat{A}\hat{B})x &= \hat{A}(\hat{B}x). \end{aligned}$$

Отметим еще нулевое преобразование

$$\hat{O}x = 0$$

и единичное преобразование

$$\hat{E}x = x.$$

Если для преобразования  $\hat{A}$  существует преобразование  $\hat{A}^{-1}$ , удовлетворяющее условию:

$$\hat{A}^{-1}\hat{A} = \hat{A}\hat{A}^{-1} = \hat{E},$$

то оно называется обратным преобразованием для  $\hat{A}$ .

Преобразование  $\hat{A}$  называется *линейным*, если выполнены следующие условия:

$$1) \hat{A}(x\mathbf{x}) = x\hat{A}\mathbf{x} \quad (x - \text{число});$$

$$2) \hat{A}(\mathbf{x} + \mathbf{x}') = \hat{A}\mathbf{x} + \hat{A}\mathbf{x}'.$$

Пусть  $\hat{A}$  — линейное преобразование, действующее из  $\mathfrak{R}^n$  в  $\mathfrak{R}^n$  и  $\mathbf{e} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  — некоторый базис пространства  $\mathfrak{R}^n$ . Тогда векторы  $\hat{A}\mathbf{e}_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) допускают разложения

$$\hat{A}\mathbf{e}_k = \sum_j a_{jk} \mathbf{e}_j. \quad (1.5.8)$$

Матрица  $A = (a_{jk})$  называется *матрицей преобразования  $\hat{A}$*  (в данном базисе). Заметим, что первый индекс  $j$  элемента  $a_{jk}$  обозначает номер координаты и таким образом  $a_{jk}$  есть  $j$ -я координата  $k$ -го преобразованного базисного вектора  $\mathbf{e}_k$ , т. е.  $a_{jk} = (\hat{A}\mathbf{e}_k)_j$ .

Пусть

$$\mathbf{x} = \sum_k \xi_k \mathbf{e}_k$$

— произвольный вектор из  $\mathfrak{R}^n$  и  $\xi_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) — его координаты. В силу линейности преобразования  $\hat{A}$  имеем

$$\mathbf{y} = \hat{A}\mathbf{x} = \hat{A} \sum_k \xi_k \mathbf{e}_k = \sum_k \xi_k \hat{A}\mathbf{e}_k.$$

Отсюда на основании формул (1.5.8) получим

$$\mathbf{y} = \sum_k \xi_k \sum_j a_{jk} \mathbf{e}_j = \sum_j \left( \sum_k a_{jk} \xi_k \right) \mathbf{e}_j. \quad (1.5.9)$$

Следовательно, координаты вектора  $\mathbf{y}$  в данном базисе  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  суть

$$\eta_j = \sum_k a_{jk} \xi_k \quad (j = 1, \dots, n). \quad (1.5.10)$$

Если для векторов  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  ввести представления

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}_{\mathbf{e}}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix}_{\mathbf{e}},$$

то соотношения (1.5.10) эквивалентны матричной формуле

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x}. \quad (1.5.11)$$

Таким образом, *линейно преобразованный вектор равен произведению матрицы преобразования на исходный вектор.*



Нетрудно убедиться, что арифметическим операциям над линейными преобразованиями отвечают такие же операции над их матрицами.

Пусть  $e = \{e_1, \dots, e_n\}$  и  $\varepsilon = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$  — два базиса пространства  $\mathcal{E}^n$ . Установим связь между ними, причем, следуя традиции аналитической геометрии, будем выражать элементы первого базиса (старого) через элементы второго (нового). Имеем

$$e_k = \sum_j s_{jk} \varepsilon_j \quad (k = 1, \dots, n), \quad (1.5.12)$$

где  $s_{jk}$  — некоторые постоянные, причем, как обычно, первый индекс  $j$  представляет собой номер координаты вектора  $e_k$  в базисе  $\varepsilon$ . Неособенную матрицу  $S = [s_{jk}]$  будем называть *матрицей перехода* (от второго базиса к первому).

Заметим, что если базисы  $e$  и  $\varepsilon$  ортонормированы (ортогональны и нормированы), т. е.

$$(e_j, e_k) = \delta_{jk} \text{ и } (\varepsilon_j, \varepsilon_k) = \delta_{jk},$$

то матрица перехода  $S$  — унитарная (в частности, в действительном пространстве  $\mathcal{E}^n$  — ортогональная). Действительно, в этом случае в силу формулы (1.5.9) имеем

$$\delta_{jk} = \delta_{kj} = (e_k, e_j) =$$

$$= \left( \sum_p s_{pk} \varepsilon_p, \sum_q s_{qj} \varepsilon_q \right) = \sum_{p, l} s_{pk} s_{qj} (\varepsilon_p, \varepsilon_q) = \sum_p \overline{s_{pj}} s_{pk},$$

т. е.

$$S^* S = E.$$

Таким образом, матрица  $S$  — унитарная.

Пусть

$$x = \sum_k x_k e_k,$$

где  $x_1, \dots, x_n$  — координаты вектора  $x$  в базисе  $e$ . На основании формулы (1.5.12) имеем

$$\begin{aligned} x &= \sum_k x_k \sum_j s_{jk} \varepsilon_j = \\ &= \sum_j \varepsilon_j \sum_k s_{jk} x_k. \end{aligned} \quad (1.5.13)$$

Отсюда координаты вектора  $x$  во втором базисе суть

$$\xi_j = \sum_k s_{jk} x_k \quad (j = 1, \dots, n).$$

Полагая  $\xi = \text{colop}(\xi_1, \dots, \xi_n)$ , будем иметь

$$\xi = Sx, \quad (1.5.14)$$

т. е. *новый координатный столбец вектора равен матрице перехода (от нового базиса к старому), умноженной справа на его старый координатный столбец.*

Пусть  $e_1, \dots, e_n$  и  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  — два базиса в  $\mathfrak{R}^n$  и  $S (\det S \neq 0)$  — неособенная матрица, устанавливающая связь между координатами вектора в первом и во втором базисах. Предположим, что  $\hat{A}$  — линейное преобразование в  $\mathfrak{R}^n$ , имеющее матрицу преобразования  $A$  в первом базисе и матрицу  $B$  — во втором. Пусть  $x = \{x_1, \dots, x_n\}$  и  $y = \{y_1, \dots, y_n\}$  — два вектора, отнесенных к первому базису, такие, что

$$y = Ax. \quad (1.5.15)$$

Во втором базисе эти векторы будут иметь, соответственно, новые координаты  $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  и  $\{\eta_1, \dots, \eta_n\}$ , и наборы этих координат можно интерпретировать как некоторые векторы

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} \text{I} \quad \text{и} \quad \eta = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix} \text{I}$$

в первом базисе, причем

$$\eta = B\xi. \quad (1.5.16)$$

Кроме того, в силу (1.5.14), имеем

$$\xi = Sx, \eta = Sy. \quad (1.5.17)$$

Из соотношений (1.5.15), (1.5.17) получаем

$$S^{-1}\eta = AS^{-1}\xi$$

и

$$\eta = SAS^{-1}\xi.$$

Сравнивая с (1.5.16), находим

$$B = SAS^{-1}. \quad (1.5.18)$$

Матрицы, связанные соотношением (1.5.18), называются *подобными*. Таким образом, линейное преобразование в различных базисах описывается подобными матрицами. Для краткости говорят, что  $B$  получается из  $A$  с помощью матрицы  $S$ .

Отношение подобия (1.5.18) между  $(n \times n)$ -матрицами  $A$  и  $B$  обычно коротко обозначается так:  $B \sim A$ . Легко проверить следующие свойства: 1)  $A \sim A$  (*рефлексивность*); 2) если  $A \sim B$ , то  $B \sim A$  (*симметрия*); 3) если  $A \sim B$  и  $B \sim C$ , то  $A \sim C$  (*транзитивность*); 4) если  $A \sim B$ , то, очевидно, имеем  $\det A = \det B$ .

Определение 7. Вектор  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  называется *собственным* для линейного преобразования  $\hat{A}$ , если

$$\hat{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}, \quad (1.5.19)$$

где число  $\lambda$  называется *собственным значением* или *характеристическим числом* (*характеристическим корнем*) преобразования  $\hat{A}$  (см. [4]).

Пусть  $A$  — матрица преобразования  $\hat{A}$  в некотором базисе. Из формулы (1.5.19) имеем  $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$  и, следовательно,

$$(A - \lambda E)\mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad (1.5.20)$$

Линейная однородная система (1.5.20) может иметь ненулевые решения только в том случае, когда

$$\det(A - \lambda E) = 0. \quad (1.5.21)$$

Корни  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  векового уравнения (1.5.21) называются *характеристическими числами* (*характеристическими корнями*) или *собственными значениями* матрицы  $A$ , а соответствующие нетривиальные решения однородной системы (1.5.20), получающиеся при  $\lambda = \lambda_j$ , — отвечающими ему собственными векторами матрицы  $A$ .

Корни векового уравнения (1.5.21) не зависят от выбора базиса и представляют собственные значения преобразования  $\hat{A}$ .

Действительно, если преобразование  $\hat{A}$  в другом базисе описывается матрицей  $B$ , то имеем

$$B = SAS^{-1} \quad (\det S \neq 0);$$

отсюда

$$\begin{aligned} \det(B - \lambda E) &= \det(SAS^{-1} - \lambda SES^{-1}) = \\ &= \det S \det(A - \lambda E) \det S^{-1} = \det(A - \lambda E). \end{aligned}$$

Аналогично, если  $\mathbf{x}$  есть собственный вектор матрицы  $A$ , отвечающий ее характеристическому числу  $\lambda$ , т. е.  $\mathbf{x}$  есть нетривиальный вектор, удовлетворяющий уравнению (1.5.20), то  $\xi = S\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  и является собственным вектором подобной матрицы  $B$ , отвечающим тому же характеристическому числу  $\lambda$ , так как

$$(B - \lambda E)\xi = S(A - \lambda E)S^{-1}S\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Таким образом, свойство собственности вектора преобразования  $\hat{A}$  также не зависит от выбора базиса.

Определение 8. Преобразование  $A$  называется *эрмитовым* или *самосопряженным*, если в любом ортонормированном базисе ему соответствует эрмитова матрица

$$A = A^*, \quad \text{где } A^* = \bar{A}^T.$$

Как было показано выше, переход от одного ортонормированного базиса к другому осуществляется с помощью унитарной матрицы  $U$ :

$$U^* = U^{-1}.$$

Поэтому, полагая

$$B = U A U^{-1} \equiv U A U^*,$$

будем иметь

$$B^* = U A^* U^* = B,$$

т. е. если преобразование  $\hat{A}$  эрмитово в одном ортонормированном базисе, то оно будет эрмитово и в любом другом ортонормированном базисе.

В случае, когда эрмитова матрица действительная, она является симметрической.

Для эрмитова преобразования справедливы следующие предложения (см. [4]).

*Теорема 1. Все собственные значения эрмитова преобразования действительны.*

*Теорема 2. Собственные векторы эрмитова преобразования, соответствующие различным собственным значениям его, ортогональны между собой.*

*Теорема 3. Для всякого эрмитова преобразования существует естественный ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов, в котором матрица преобразования диагональна и вещественна.*

Пусть  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathfrak{R}^n$  и  $A = [a_{jk}]$  — матрица типа  $n \times n$ . Скалярное произведение

$$(A \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_j (A \mathbf{x})_j \bar{y}_j = \sum_{j, k} a_{jk} x_k \bar{y}_j \quad (1.5.22)$$

называется *билинейной формой* с матрицей  $A$ . Выражение (1.5.22), учитывая независимость суммы от обозначения индексов, можно записать в виде

$$(A \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j, k} a_{kj} x_j \bar{y}_k = \sum_{j, k} \overline{a_{kj}} y_k \bar{x}_j = \overline{(A^* \mathbf{y}, \mathbf{x})},$$

где  $A^* = [\overline{a_{kj}}]$  — эрмитово-сопряженная с  $A$  матрица. Следовательно,

$$(A \mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, A^* \mathbf{y}), \quad (1.5.23)$$

т. е. в скалярном произведении (1.5.23) матрицу  $A$  можно перебрасывать с первого места на второе, заменяя ее эрмитово-сопря-

женной  $A^*$ . Отсюда, если матрица  $A$  эрмитова (в действительном случае — симметрическая), то имеем

$$(Ax, y) = (x, Ay). \quad (1.5.24)$$

В этом случае

$$V(x) = (Ax, x) = x^* Ax = \sum_{j, k} a_{jk} x_k \bar{x}_j$$

называется *эрмитовой квадратичной формой*. Так как

$$\overline{V(x)} = \sum_{j, k} \overline{a_{jk}} \bar{x}_k x_j = \sum_{k, j} a_{kj} x_j \bar{x}_k = V(x),$$

то эрмитова квадратичная форма имеет вещественные значения.

Если  $x \in \mathcal{E}^n$  и  $A$  — вещественная симметрическая матрица ( $A^T = A$ ), то эрмитова форма  $V(x)$  представляет собой *действительную квадратичную форму* (т. е. однородный полином второй степени):

$$V(x) = x^T Ax = \sum_{j, k} a_{jk} x_j x_k \quad (a_{jk} = a_{kj})$$

с матрицей  $A = [a_{jk}]$ .

Найдем оценку для функции  $V(x)$ . Пусть  $\lambda_j = \lambda_j(A)$  ( $j = 1, \dots, \dots, n$ ) — собственные значения матрицы  $A$  и

$$\lambda(A) = \min_j \lambda_j(A), \quad \Lambda(A) = \max_j \lambda_j(A).$$

Для эрмитовой матрицы  $A$  существует унитарная матрица  $U$ , переводящая ее в диагональную  $D = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , т. е.

$$UAU^{-1} \equiv UAU^* = D.$$

Полагая

$$y = Ux$$

и

$$x = U^{-1}y = U^*y, \quad x^* = y^*U,$$

имеем

$$V(x) = y^* UAU^* y = y^* D y = \sum_j \lambda_j y_j \bar{y}_j = \sum_j \lambda_j |y_j|^2.$$

Отсюда

$$\lambda(A) |y|^2 \leq V(x) \leq \Lambda(A) |y|^2,$$

где

$$|y|^2 = \sum_j |y_j|^2.$$

Используя формулу (1.5.23), будем иметь

$$(\mathbf{y}, \mathbf{y}) = (U\mathbf{x}, U\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, U^*U\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{x}),$$

т. е.

$$|\mathbf{y}| = |\mathbf{x}|.$$

Таким образом, окончательно получаем

$$\lambda(A) |\mathbf{x}|^2 \leq V(\mathbf{x}) \leq \Lambda(A) |\mathbf{x}|^2, \quad (1.5.25)$$

причем равенства слева и справа достигаются при собственном векторе  $\mathbf{x}$ , отвечающем, соответственно, наименьшему характеристическому числу  $\lambda(A)$  и наибольшему характеристическому числу  $\Lambda(A)$  матрицы  $A$ .

Неравенство (1.5.25) имеет место также для действительной квадратичной формы  $V(\mathbf{x})$ .

Определение 9. Действительная квадратичная форма

$$V(\mathbf{x}) = (A\mathbf{x}, \mathbf{x}) \quad (A^T = A)$$

называется *положительно* или *отрицательно определенной*, если, соответственно,

$$V(\mathbf{x}) > 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{x} \neq 0$$

или

$$V(\mathbf{x}) < 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{x} \neq 0,$$

причем, очевидно,  $V(\mathbf{0}) = 0$ .

В этом случае поверхности уровня

$$V(\mathbf{x}) = \text{const}$$

представляют собой  $(n-1)$ -мерные эллипсоиды пространства  $\mathcal{R}^n$ .

Из неравенства (1.5.25) вытекает, что квадратичная форма  $V(\mathbf{x})$  является положительно определенной тогда и только тогда, когда все собственные значения ее матрицы  $A$  положительны, т. е.

$$\lambda(A) = \min_j \lambda_j(A) > 0.$$

Аналогично  $V(\mathbf{x})$  представляет собой отрицательно определенную квадратичную форму тогда и только тогда, когда все собственные значения ее матрицы  $A$  отрицательны, т. е.

$$\Lambda(A) = \min_j \lambda_j(A) < 0.$$

Если  $A$  — произвольная матрица, то матрица  $A^*A$ , очевидно, эрмитова, и так как

$$(A^*A\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (A\mathbf{x}, A\mathbf{x}) = |A\mathbf{x}|^2,$$

то при  $A \neq 0$  все ее собственные значения  $\lambda_j$  ( $A^*A$ ) положительны; если же  $A = 0$ , то они равны нулю. В функциональном анализе показывается, что за норму матрицы  $A$  можно принять число

$$\|A\| = \sqrt{\Lambda(A^*A)},$$

где  $\Lambda(A^*A) = \max_i \lambda_j(A^*A)$ .

В частности, если вектор  $x$  рассматривать как вектор-столбец:  $x = \text{colop}(x_1, \dots, x_n)$ , то имеем

$$x^*x = |x|^2$$

и, следовательно,

$$\|x\| = |x|.$$

Таким образом, введенная выше норма вектора согласована с его длиной.

Отметим, что из соотношения (1.5.25) имеем

$$\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{|Ax|}{|x|} = \max_{|x|=1} |Ax|.$$

## § 6. Жорданова форма матрицы

Пусть  $A = [a_{jk}]$  — квадратная матрица порядка  $n$  и

$$\Delta(\lambda) \equiv \det(\lambda E - A) = 0^1 \quad (1.6.1)$$

— ее *характеристическое* или *вековое* уравнение [4], [5]. В раскрытом виде имеем

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Обозначим через  $\lambda_p$  ( $p = 1, \dots, n$ ) корни характеристического уравнения (1.6.1) (*характеристические корни* или *собственные значения* матрицы  $A$ ). Можно доказать (см. приложение), что с помощью преобразования подобия

$$J = SAS^{-1} \quad (1.6.2)$$

<sup>1)</sup> Иногда характеристическое уравнение матрицы записывают в эквивалентном виде  $\det(A - \lambda E) = 0$ .

( $\det S \neq 0$ ) матрица  $A$  может быть приведена к квазидиагональной форме Жордана

$$J = \text{diag} [J_1(\lambda_1), \dots, J_m(\lambda_m)] \quad (m \leq n),$$

где

$$J_p(\lambda_p) = \begin{matrix} \overbrace{\left[ \begin{array}{cccc} \lambda_p & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_p & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_p \end{array} \right]}^{e_p} \\ \end{matrix} = \lambda_p E_{e_p} + I_1^{(e_p)}$$

$$(p = 1, \dots, m; e_1 \geq 1, \dots, e_m \geq 1)$$

— так называемые *клетки Жордана*, причем каждому характеристическому корню  $\lambda_p$  кратности  $\alpha_p$  соответствует одна или несколько клеток Жордана размерами  $e_p^{(1)}, \dots, e_p^{(r)}$  такие, что

$$e_p^{(1)} + \dots + e_p^{(r)} = \alpha_p.$$

Легко убедиться, что каждой клетке Жордана  $J_p(\lambda_p)$  порядка  $e_p$  с точностью до нулевого скалярного множителя отвечает один и только один собственный вектор матрицы  $A$ , имеющий в надлежащем базисе вид

$$\mathbf{x}_p = \text{colop} (0, \dots, 0, \xi_p, 0, \dots, 0),$$

где  $\xi_p \in E_{e_p}$  и

$$J_p(\lambda_p) \xi_p = \lambda_p \xi_p \quad (\xi_p \neq 0),$$

причем различным клеткам Жордана соответствуют линейно независимые собственные векторы. Поэтому постоянная  $r$ , так называемая *степень вырождения* соответствующего собственного значения  $\lambda_p$ , представляет собой максимальное число линейно независимых собственных векторов матрицы  $A$ , соответствующих  $\lambda_p$ .

В общем случае  $r \leq \alpha_p$ . Если степень вырождения характеристического корня  $\lambda_p$  равна его кратности, т. е.  $r = \alpha_p$ , то, очевидно,  $e_p^{(1)} = \dots = e_p^{(r)} = 1$ . Таким образом, в этом случае все соответствующие клетки Жордана будут содержать по одному элементу (простые клетки).

Так как

$$\lambda E = S^{-1} \lambda S \quad \text{и} \quad A = S^{-1} J S,$$

то характеристический полином  $\Delta(\lambda)$  (1.6.1) может быть представлен в виде

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda E - J) = (\lambda - \lambda_1)^{e_1} \dots (\lambda - \lambda_m)^{e_m} (e_1 + \dots + e_m = n),$$



где  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  — характеристические числа матрицы  $A$ , соответствующие различным клеткам Жордана (не обязательно различные между собой).

Множители  $(\lambda - \lambda_p)^{e_p}$  ( $p = 1, \dots, m$ ) называются *элементарными делителями* матрицы  $A$ , а натуральные числа  $e_p$  (т. е. размеры (порядки) клеток Жордана) — *показателями элементарных делителей*, соответствующих характеристическому числу  $\lambda_p$  или линейному множителю  $\lambda - \lambda_p$ .

Если все характеристические числа  $\lambda_p$  имеют простые элементарные делители ( $e_p = 1$ ), то матрица Жордана  $J$  будет чисто диагонального вида:

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

причем числа  $\lambda_p$  ( $p = 1, \dots, n$ ) не обязательно различны. Это обстоятельство, например, имеет место для симметрической матрицы (см. [4]).

Заметим, что, вообще говоря, характеристические числа  $\lambda_p$  — комплексные и, следовательно, в общем случае как матрица преобразования  $S$ , так и матрица Жордана  $J$  имеют комплексные элементы. Если ограничиться действительными преобразованиями, то соответствующая модифицированная матрица Жордана имеет более сложный вид (см. [4]).

Можно доказать, что форма Жордана обладает свойством единственности, т. е. данную матрицу с помощью преобразования подобия (1.6.2) можно привести только к единственной форме Жордана, с точностью до порядка клеток, и, в частности, размеры набора клеток Жордана не зависят от выбора матрицы  $S$  (см. [4], [5]). Например, форма Жордана матрицы  $A$  будет полностью определена, если упорядочить ее характеристические числа  $\lambda_p$  ( $p = 1, \dots, m$ ), а клетки Жордана, соответствующие одному и тому же характеристическому числу, расположить в порядке возрастания их размеров.

Пусть  $B \sim A$ , т. е. существует неособенная матрица  $T$  ( $\det T \neq 0$ ) такая, что

$$B = TAT^{-1}$$

Отсюда

$$A = T^{-1}BT. \quad (1.6.3)$$

**Теорема 1.** *Подобные матрицы имеют одинаковые формы Жордана (с точностью до порядка клеток).*

Доказательство. Действительно, из формулы (1.6.3) имеем

$$\lambda E - A = T^{-1}(\lambda E - B)T,$$

отсюда

$$\det(\lambda E - A) = \det T^{-1} \det(\lambda E - B) \det T = \det(\lambda E - B)$$

и, следовательно, характеристические полиномы матриц  $A$  и  $B$ , а значит, и их собственные значения  $\lambda_p$  ( $p = 1, \dots, n$ ), совпадают между собой.

Кроме того, если

$$A = S^{-1}JS,$$

где  $J$  — форма Жордана, то

$$B = TAT^{-1} = TS^{-1}JST^{-1} = (ST^{-1})^{-1}J(ST^{-1}).$$

Таким образом,  $J$  есть также форма Жордана матрицы  $B$ .

Следствие. Собственные значения  $\lambda_p$  ( $p = 1, \dots, n$ ) матрицы  $A$  и ее элементарные делители  $(\lambda - \lambda_p)^{e_p}$  ( $p = 1, \dots, n$ ) являются инвариантами для преобразований подобия (1.6.3).

Отметим еще один полезный результат.

Теорема 2. Верхняя треугольная  $(n \times n)$ -матрица

$$K(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1n} \\ 0 & \lambda & \dots & \gamma_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \gamma_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix} \equiv \lambda E + \Gamma, \quad (1.6.4)$$

где первый косо́й ряд отличен от нуля, т. е.

$$\gamma_{12}\gamma_{23} \dots \gamma_{n-1,n} \neq 0, \quad (1.6.5)$$

подобна соответствующей клетке Жордана

$$J(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix} \equiv \lambda E + I_1. \quad (1.6.6)$$

Доказательство. Покажем, что существует неособенная матрица  $S = [s_{ik}]$  такая, что

$$S^{-1}(\lambda E + \Gamma)S = \lambda E + I_1,$$

где  $I_1$  — первый единичный косо́й ряд (см. § 1), или

$$\Gamma S = S I_1. \quad (1.6.7)$$

Положим

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1, n-1} & 0 \\ 0 & s_{22} & \dots & s_{2, n-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & s_{n-1, n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\Gamma S = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_{12}s_{22} & \dots & \sum_{p>1} \gamma_{1p}s_{p, n-1} & \gamma_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & \sum_{p>2} \gamma_{2p}s_{p, n-1} & \gamma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \gamma_{n-1, n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

и

$$SI_1 = \begin{bmatrix} 0 & s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1, n-2} & s_{1, n-1} \\ 0 & 0 & s_{22} & \dots & s_{2, n-3} & s_{2, n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & s_{n-1, n-1} & s_{n-1, 1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Приравнивая в силу (1.6.7) соответствующие элементы вторых диагоналей матриц  $SI_1$  и  $\Gamma S$ , будем иметь

$$\left. \begin{aligned} s_{11} &= \gamma_{12}s_{22}, \\ s_{22} &= \gamma_{23}s_{33}, \\ \dots & \dots \dots \dots \\ s_{n-1, n-1} &= \gamma_{n-1, n}. \end{aligned} \right\}$$

Отсюда, учитывая условие (1.6.5), получим

$$\left. \begin{aligned} s_{11} &= \gamma_{12}\gamma_{23} \dots \gamma_{n-1, n} \neq 0, \\ s_{22} &= \gamma_{23} \dots \gamma_{n-1, n} \neq 0, \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \\ s_{n-1, n-1} &= \gamma_{n-1, n} \neq 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.6.8)$$

Приравнявая соответствующие элементы третьих диагоналей матриц  $SI_1$  и  $IS$ , находим

$$\left. \begin{aligned} s_{12} &= \gamma_{12}s_{23} + \gamma_{13}s_{33}, \\ s_{23} &= \gamma_{23}s_{34} + \gamma_{24}s_{44}, \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ s_{n-2, n-1} &= \gamma_{n-2, n-1}s_{n-1, n} + \gamma_{n-2, n}, \end{aligned} \right\} \quad (1.6.9)$$

где  $s_{n-1, n} = 0$ . Отсюда последовательно определяются элементы  $s_{j, j+1}$  ( $j \geq 1$ ).

Аналогично находятся все остальные элементы матрицы  $S$ . Так как на основании (1.6.8) имеем  $\det S = s_{11}s_{22} \dots s_{n-1, n-1} \neq 0$ , то матрица — неособенная и, следовательно, теорема доказана.

Следствие 1. Если матрица  $A$  имеет вид

$$A = S^{-1} \text{diag} [K_1(\lambda_1), \dots, K_m(\lambda_m)] S$$

где  $\det S \neq 0$  и  $K_p(\lambda_p)$  ( $p = 1, \dots, m$ ) — верхние треугольные матрицы специальной формы

$$K_p(\lambda_p) = \begin{bmatrix} \lambda_p & \gamma_{12}^{(p)} & \dots & \gamma_{1n}^{(p)} \\ 0 & \lambda_p & \dots & \gamma_{2n}^{(p)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_p \end{bmatrix},$$

то числа  $\lambda_p$  ( $p = 1, \dots, m$ ) суть собственные значения матрицы  $A$ , причем если

$$\gamma_{12}^{(p)} \dots \gamma_{n-1, n}^{(p)} \neq 0 \quad (p = 1, \dots, m),$$

то размеры клеток  $K_p(\lambda_p)$  представляют собой показатели элементарных делителей матрицы  $A$ .

Следствие 2. Всякую квадратную матрицу  $A$  с помощью преобразования подобия

$$B = SAS^{-1}$$

можно привести к почти диагональному виду

$$B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \lambda_2 & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

где  $|b_{jk}| \leq \epsilon$  при  $j \neq k$  и  $\epsilon$  — сколь угодно мало (см. [6]).

Действительно, матрица  $A$  подобна матрице

$$J = \text{diag} [J_1(\lambda_1), \dots, J_m(\lambda_m)],$$

где  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  ( $m \leq n$ ) — характеристические корни матрицы  $A$  и  $J_p(\lambda_p)$  ( $p = 1, \dots, m$ ) — соответствующие клетки Жордана. Так как в силу теоремы 2 имеем

$$J_p(\lambda_p) \sim K_p(\lambda_p) \quad (p = 1, \dots, m),$$

где

$$K_p(\lambda_p) = \begin{bmatrix} \lambda_p & \varepsilon & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_p & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \varepsilon \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_p \end{bmatrix},$$

то, очевидно, матрица  $A$  подобна матрице

$$B = \text{diag} [K_1(\lambda_1), \dots, K_m(\lambda_m)],$$

обладающей нужным свойством.

## § 7. Функции матрицы

Пусть  $X$  — квадратная матрица. Тогда, используя действия над матрицами, можно определить матричные полиномы

$$P(X) = A_0 + A_1X + \dots + A_pX^p$$

(правый) и

$$Q(X) = B_0 + XB_1 + \dots + X^qB_q$$

(левый), где постоянные матрицы  $A_0, \dots, A_p$  и  $B_0, \dots, B_q$  таковы, что указанные действия возможны. В частности, это могут быть квадратные матрицы одинакового с  $X$  порядка или числа (скаляры).

Если  $Q(X)$  — неособенная матрица, то можно определить рациональные функции матриц

$$R_1(X) = P(X) [Q(X)]^{-1}$$

(правое частное) и

$$R_2(X) = [Q(X)]^{-1} P(X)$$

(левое частное).

Пусть

$$C_p = (c_{jk}^{(p)}) \quad (p = 1, 2, \dots) \quad (1.7.1)$$

— последовательность матриц одного и того же типа. В таком случае матрица

$$C = \lim_{p \rightarrow \infty} C_p \equiv \left( \lim_{p \rightarrow \infty} C_{jk}^{(p)} \right),$$

если она имеет смысл, называется *пределом последовательности* (1.7.1). Отсюда, естественно, вводится сходимость *матричных рядов*

$$U_1 + U_2 + \dots + U_p + \dots \quad (1.7.2)$$

А именно, матричный ряд (1.7.2) называется *сходящимся*, если существует предел последовательности его частичных сумм

$$S = \lim_{p \rightarrow \infty} (U_1 + U_2 + \dots + U_p).$$

Предельная матрица  $S$  называется *суммой ряда* (1.7.2), т. е.

$$S = \sum_{p=1}^{\infty} U_p.$$

Заметим, что из определений нормы матрицы вытекает, что если  $C_p \rightarrow C$ , то 1)  $\|C - C_p\| \rightarrow 0$  и 2)  $\|C_p\| \rightarrow \|C\|$  при  $p \rightarrow \infty$ .

Если функция  $F(X)$  в некоторой области  $\{X\} = D$  представляет собой сумму степенного ряда

$$F(X) = \sum_{p=0}^{\infty} A_p X^p$$

или

$$F(X) = \sum_{p=0}^{\infty} X^p B_p,$$

где  $A_p, B_p$  ( $p=0, 1, 2, \dots$ ) — постоянные матрицы, то  $F(X)$  называется *аналитической функцией* от  $X$  в области  $D$ .

## § 8. Матричные ряды

Определение 1. Матричный ряд

$$U_1 + U_2 + \dots + U_p + \dots \quad (1.8.1)$$

будем называть *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд норм его членов

$$\|U_1\| + \|U_2\| + \dots + \|U_p\| + \dots$$

где норма понимается в смысле I—III норм (см. § 4).

**Теорема.** *Абсолютно сходящийся матричный ряд есть ряд сходящийся.*

**Доказательство.** Пусть

$$U_p = (U_{jk}^{(p)}) \quad (p = 1, 2, \dots).$$

Из определения сходимости матричного ряда следует, что

$$\sum_{p=1}^{\infty} U_p = \left( \sum_{p=1}^{\infty} U_{jk}^{(p)} \right).$$

Так как для всех  $j$  и  $k$  справедливы неравенства

$$|U_{jk}^{(p)}| \leq \|U_p\|,$$

то на основании признака сравнения скалярных рядов все ряды

$\sum_{p=1}^{\infty} U_{jk}^{(p)}$  абсолютно сходящиеся. Следовательно, матричный ряд (1.8.1) также сходится.

**Следствие (признак сравнения).** *Если матричный ряд (1.8.1) абсолютно сходящийся и выполнены неравенства*

$$\|V_p\| \leq \|U_p\| \quad (p = 1, 2, \dots),$$

*то матричный ряд*

$$V_1 + V_2 + \dots + V_p + \dots$$

*также абсолютно сходящийся.*

Пусть

$$F_p(X) = (f_{jk}^{(p)}(X)) \quad (p = 1, 2, \dots)$$

— матричные функции одного и того же типа  $m \times n$ , где переменная матрица  $X \in D$ .

**Определение 2.** Функциональный матричный ряд

$$\sum_{p=1}^{\infty} F_p(X) \tag{1.8.2}$$

называется *равномерно сходящимся* в области  $D$ , если в этой области сходятся равномерно все скалярные ряды

$$\sum_{p=1}^{\infty} f_{jk}^{(p)}(X) \quad (j = 1, \dots, m; \quad k = 1, \dots, n).$$

Нетрудно убедиться, что справедлив обобщенный признак Вейерштрасса: если ряд норм

$$\sum_{p=1}^{\infty} \|F_p(X)\|$$

мажорируется в области  $D$  сходящимся числовым рядом

$$\sum_{p=1}^{\infty} c_p$$

(т. е.  $\|F_p(X)\| \leq c_p$ ,  $p=1, 2, \dots$ ), то ряд (1.8.2) сходится абсолютно и равномерно в области  $D$ .

## § 9. Матричные степенные ряды

Рассмотрим степенной ряд

$$\sum_{p=0}^{\infty} a_p X^p, \quad (1.9.1)$$

где  $X$  —  $(n \times n)$ -матрица, причем для простоты будем считать, что коэффициенты  $a_p$  ( $p=0, 1, 2, \dots$ ) — числа, вообще говоря, комплексные. Наряду с матричным рядом (1.9.1) рассмотрим скалярный степенной ряд

$$\sum_{p=0}^{\infty} a_p x^p, \quad (1.9.2)$$

где  $x = \xi + i\eta$ , и пусть  $R$  — его радиус сходимости.

**Теорема 1.** *Матричный степенной ряд (1.9.1) сходится абсолютно для каждой матрицы  $X$ , для которой выполнено неравенство*

$$\|X\| < R. \quad (1.9.3)$$

**Доказательство.** Так как внутри круга сходимости  $|x| < R$  степенной ряд (1.9.2) сходится абсолютно (см. [7]), то из неравенства (1.9.3) вытекает сходимость ряда

$$\sum_{p=0}^{\infty} |a_p| \|X\|^p.$$

Но в силу свойств нормы

$$\|a_p X^p\| \leq |a_p| \|X\|^p \quad (p=0, 1, 2, \dots).$$

Поэтому на основании признака сравнения степенной ряд (1.9.1) сходится абсолютно в данной точке  $X$ .

**Следствие.** *Если скалярный степенной ряд (1.9.2) сходится для любого  $x$  (т. е.  $R = \infty$ ), то соответствующий матричный ряд также сходится для любой квадратной матрицы  $X$ .*

Пусть

$$F(X) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p X^p \quad (1.9.4)$$

— функция, аналитическая в области  $\|X\| < R$ .



**Теорема 2.** Если  $F(X)$  определена для матрицы  $X$ , то она определена также для любой подобной матрицы  $SXS^{-1}$  ( $\det S \neq 0$ ), причем справедлива формула

$$F(SXS^{-1}) = SF(X)S^{-1}. \quad (1.9.5)$$

**Доказательство.** Пусть

$$F_N(X) = \sum_{p=1}^N a_p X^p.$$

Используя очевидные свойства подобных матриц

$$S(X+Y)S^{-1} = SXS^{-1} + SYS^{-1}$$

и

$$S(XY)S^{-1} = SXS^{-1}SYS^{-1},$$

имеем

$$F_N(SXS^{-1}) = \sum_{p=0}^N a_p (SXS^{-1})^p = S \left( \sum_{p=0}^N a_p X^p \right) S^{-1} = SF_N(X)S^{-1}.$$

Отсюда, переходя к пределу при  $N \rightarrow \infty$  и учитывая, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} F_N(X) = F(X),$$

получаем формулу (1.9.5). Теорема доказана.

**Теорема 3.** Матричный степенной ряд

$$\sum_{p=0}^{\infty} a_p X^p \quad (1.9.6)$$

( $a_p$  — скаляры) сходится, если все собственные значения  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  матрицы  $X$  находятся внутри круга сходимости соответствующего скалярного ряда

$$\sum_{p=0}^{\infty} a_p x^p, \quad (1.9.7)$$

т. е. если выполнены неравенства

$$|\lambda_k| < R \quad (k=1, \dots, n),$$

где  $R$  — радиус сходимости ряда (1.9.7) (рис. 1).

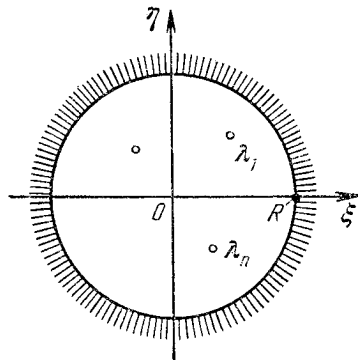


Рис. 1.

Если же хотя бы одно собственное значение матрицы  $X$  лежит вне замкнутого круга сходимости  $\|x\| \leq R$ , то ряд (1.9.6) расходится (см. [8]).

Доказательство. 1) Пусть

$$F_N(X) = \sum_{p=0}^N a_p X^p$$

— отрезок матричного ряда (1.9.6). Приводя матрицу  $X$  к жордановой форме (§ 5), будем иметь

$$X = S^{-1} \text{diag} [J_1(\lambda_1), \dots, J_m(\lambda_m)] S,$$

где  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  ( $m \leq n$ ) — характеристические корни матрицы  $X$ , отвечающие различным элементарным делителям,

$$J_q(\lambda_q) = \lambda_q E_q + I_1^{(q)} \quad (q = 1, \dots, m)$$

— соответствующие клетки Жордана и  $\det S \neq 0$ . Отсюда, используя теорему 2 и свойства квазидиагональных матриц, получим

$$\begin{aligned} F_N(X) &= S^{-1} F_N(\text{diag} [J_1(\lambda_1), \dots, J_m(\lambda_m)]) S = \\ &= S^{-1} \text{diag} [F_N(J_1(\lambda_1)), \dots, F_N(J_m(\lambda_m))] S. \end{aligned} \quad (1.9.8)$$

Далее, применяя бином Ньютона и правило возведения единичного косоугольного ряда в степень (1.1.3), имеем

$$F_N[J_q(\lambda_q)] =$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{p=0}^N a_p (\lambda_q E_q + I_1^{(q)})^p = \sum_{p=0}^N \sum_{r=0}^p a_p C_p^r (\lambda_q E_q)^{p-r} [I_1^{(q)}]^r = \\ &= \sum_{p=0}^N \sum_{r=0}^p a_p \frac{p!}{r!(p-r)!} \lambda_q^{p-r} I_r^{(q)} = \sum_{r=0}^N \frac{I_r^{(q)}}{r!} \sum_{p=r}^N a_p \frac{p!}{(p-r)!} \lambda_q^{p-r}. \end{aligned}$$

Так как

$$F_N(x) = \sum_{p=0}^N a_p x^p,$$

то

$$\begin{aligned} F_N^{(r)}(x) &= \sum_{p=r}^N a_p p(p-1)\dots(p-r+1) x^{p-r} = \\ &= \sum_{p=r}^N a_p \frac{p!}{(p-r)!} x^{p-r} \quad (r = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\sum_{p=r}^N a_p \frac{p!}{(p-r)!} \lambda_q^{p-r} = F_N^{(r)}(\lambda_q)$$

и, следовательно,

$$F_N(J_q(\lambda_q)) = \sum_{r=0}^N \frac{I_r^{(q)}}{r!} F_N^{(r)}(\lambda_q) = \sum_{r=0}^{e_q-1} \frac{I_r^{(q)}}{r!} F_N^{(r)}(\lambda_q) \quad (q=1, \dots, m),$$

где  $e_q$  — порядок клетки Жордана  $J_q(\lambda_q)$ , так как

$$I_r^{(q)} = 0 \quad \text{при } r \geq e_q.$$

Отсюда при  $N \rightarrow \infty$ , учитывая сходимость рядов (см. [6])

$$F^{(r)}(\lambda_q) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p p(p-1)\dots(p-r+1) \lambda_q^{p-r} \\ (r=0, 1, 2, \dots; q=1, \dots, m),$$

будем иметь

$$F(J_q(\lambda_q)) = \lim_{N \rightarrow \infty} F_N(J_q(\lambda_q)) = \sum_{r=0}^{e_q-1} \frac{I_r^{(q)}}{r!} F^{(r)}(\lambda_q) \quad (q=1, \dots, m). \quad (1.9.9)$$

Поэтому на основании формулы (1.9.8) находим, что существует предел

$$F(X) = \lim_{N \rightarrow \infty} F_N(X) = \\ = S^{-1} \text{diag} [F(J_1(\lambda_1)), \dots, F(J_m(\lambda_m))] S \quad (1.9.10)$$

и, значит, матричный степенной ряд (1.9.6) сходится.

2) Если некоторое  $\lambda_q$  лежит вне замкнутого круга сходимости  $|x| \geq R$ , то

$$\lim_{N \rightarrow \infty} F_N(J_q(\lambda_q))$$

не существует и поэтому ряд (1.9.6) расходится.

Следствие. Если собственные значения  $\lambda_k$  ( $k=1, \dots, n$ ) матрицы  $X$  лежат внутри круга сходимости  $|x| < R$  скалярного ряда (1.9.7), то характеристическими корнями матрицы

$$F(X) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p X^p$$

являются числа  $F(\lambda_k)$  ( $k=1, \dots, n$ ).

Если, сверх того,

$$F'(\lambda_k) \neq 0 \quad (k = 1, \dots, n),$$

то порядки соответствующих клеток Жордана матриц  $X$  и  $F(X)$  совпадают между собой (теорема Лаппо-Данилевского).

Этот результат непосредственно вытекает из формул (1.9.9), (1.9.10), а также из следствия 1 к теореме 2.

## § 10. Тождество Кейли и формула Сильвестра

Пусть  $X$  —  $(n \times n)$ -матрица и

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda E - X) \quad (1.10.1)$$

— ее характеристический полином.

Теорема. *Всякая квадратная матрица  $X$  удовлетворяет своему характеристическому уравнению, т. е.*

$$\Delta(X) = 0 \quad (1.10.2)$$

(тождество Кейли).

Доказательство. Действительно, пусть

$$X = S^{-1} \text{diag} [J_1(\lambda_1), \dots, J_m(\lambda_m)] S,$$

где  $J_q(\lambda_q)$  ( $q = 1, \dots, m$ ) — клетки Жордана и  $\det S \neq 0$ . Так как  $\Delta(X)$  — аналитическая функция, то на основании формулы (1.9.10) имеем

$$\Delta(X) = S^{-1} \text{diag} [\Delta(J_1(\lambda_1)), \dots, \Delta(J_m(\lambda_m))] S.$$

Если  $\lambda_q$  — характеристический корень матрицы  $X$  кратности  $\alpha_q$ , то

$$\Delta(\lambda_q) = \Delta'(\lambda_q) = \dots = \Delta^{(\alpha_q - 1)}(\lambda_q) = 0$$

( $q = 1, \dots, m$ ). Поэтому, учитывая, что порядок соответствующей клетки Жордана  $e_q \leq \alpha_q$ , в силу формулы (1.9.9) будем иметь

$$\Delta(J_q(\lambda_q)) = \sum_{r=0}^{e_q-1} \frac{J_r^{(q)}}{r!} \Delta^{(r)}(\lambda_q) = 0$$

( $q = 1, \dots, m$ )

и, следовательно,

$$\Delta(X) = 0.$$

Теорема доказана.

Пусть

$$F(x) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p x^p \quad (|x| < R)$$

— аналитическая функция, определяемая степенным рядом со скалярными коэффициентами  $a_p$  ( $p = 0, 1, \dots$ ).

Рассмотрим соответствующую матричную функцию

$$F(X) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p X^p.$$

Положим, что собственные значения  $\lambda_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) матрицы  $X$  различны и удовлетворяют условию

$$|\lambda_k| < R \quad (k = 1, \dots, n).$$

Построим интерполяционный полином Лагранжа

$$P(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_{k-1}) (x - \lambda_{k+1}) \dots (x - \lambda_n)}{(\lambda_k - \lambda_1) \dots (\lambda_k - \lambda_{k-1}) (\lambda_k - \lambda_{k+1}) \dots (\lambda_k - \lambda_n)} F(\lambda_k)$$

такой, что

$$P(\lambda_k) = F(\lambda_k) \quad (k = 1, \dots, n).$$

Тогда разность  $F(x) - P(x)$  есть аналитическая функция, имеющая нули  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  и, следовательно, ее можно представить в виде

$$F(x) - P(x) = (x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_n) G(x),$$

где  $G(x)$  — аналитическая функция в круге  $|x| < R$ . Отсюда получаем

$$F(x) \equiv P(x) + \Delta(x) G(x), \quad (1.10.3)$$

где

$$\Delta(x) = (x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_n) \equiv \det(xE - X).$$

Так как матрицы  $\Delta(X)$  и  $G(X)$  содержат степени только одной матрицы  $X$ , то они коммутируют между собой и, следовательно, тождество (1.10.3) останется в силе, если вместо скаляра  $x$  подставим матрицу  $X$ . Таким образом, имеем

$$F(X) = P(X) + \Delta(X) G(X). \quad (1.10.4)$$

Но в силу тождества Кейли

$$\Delta(X) = 0.$$

Поэтому из равенства (1.10.4) получаем формулу Сильвестра (см. [8])

$$F(X) = \sum_{k=1}^n \frac{(X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_{k-1}) (X - \lambda_{k+1}) \dots (X - \lambda_n)}{(\lambda_k - \lambda_1) \dots (\lambda_k - \lambda_{k-1}) (\lambda_k - \lambda_{k+1}) \dots (\lambda_k - \lambda_n)} F(\lambda_k), \quad (1.10.5)$$

причем предполагается, что характеристические корни  $\lambda_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) матрицы  $X$  различны. Формула Сильвестра дает

представление аналитической функции  $F(x)$  в виде полинома от матрицы  $X$ .

**З а м е ч а н и е.** Если среди собственных значений  $\lambda_k$  матрицы  $X$  имеются кратные, то формула Сильвестра имеет более сложный вид (см. [1], [8]), который может быть получен соответствующим предельным переходом из формулы (1.10.5).

## § 11. Производная и интеграл матрицы

Пусть  $F(t) = [f_{jk}(t)]$  — функциональная матрица типа  $m \times n$  класса  $C^1(a, b)$ , т. е. функции  $f_{jk}(t)$  непрерывно дифференцируемы в некотором интервале  $a < t < b$ . Тогда под *производной* (см. [1]) понимается матрица

$$\frac{dF}{dt} \equiv F'(t) = (f'_{jk}(t)).$$

Употребляется также обозначение  $\frac{dF}{dt} = \dot{F}(t)$ .

Если соответствующие матричные действия имеют смысл, то справедливы следующие соотношения:

1) если  $C$  — постоянная матрица, то

$$\frac{dC}{dt} = 0;$$

$$2) \frac{d}{dt} [F(t) + G(t)] = F'(t) + G'(t);$$

$$3) \frac{d}{dt} [CF(t)] = CF'(t), \quad \frac{d}{dt} [F(t)C] = F'(t)C;$$

$$4) \frac{d}{dt} [F(t)G(t)] = F'(t)G(t) + F(t)G'(t).$$

Далее, пусть  $F(t)$  — неособенная матрица и  $F^{-1}(t)$  — ее обратная матрица. Имеем

$$F(t)F^{-1}(t) = E.$$

Дифференцируя это равенство, получаем

$$F'(t)F^{-1}(t) + F(t)[F^{-1}(t)]' = 0.$$

Отсюда

$$[F^{-1}(t)]' = -F^{-1}(t)F'(t)F^{-1}(t).$$

Приведем еще одну формулу дифференцирования. Пусть  $V$  — скалярное произведение

$$V(t) = (x(t), y(t)) \equiv y^*(t)x(t).$$

Учитывая, что

$$\frac{dy^*}{dt} = \left( \frac{dy}{dt} \right)^*,$$

имеем

$$\begin{aligned} V'(t) &= y^* \frac{dx}{dt} + \left( \frac{dy}{dt} \right)^* x(t) = \\ &= \left( \frac{dx}{dt}, y(t) \right) + \left( x(t), \frac{dy}{dt} \right). \end{aligned}$$

Укажем еще один результат. Пусть  $(n \times n)$ -матрица  $X(t) \in C^1$  и

$$Y(t) = [X(t)]^m \equiv \underbrace{X(t) \dots X(t) \dots X(t)}_{m \text{ раз}}.$$

Имеем

$$Y'(t) = \sum_{\nu=0}^{m-1} [X(t)]^\nu X'(t) [X(t)]^{m-\nu-1}.$$

В частности, если  $X(t)$  коммутирует со своей производной  $X'(t)$ , т. е.

$$X(t) X'(t) = X'(t) X(t),$$

то получаем

$$\frac{d}{dt} [X(t)]^m = m [X(t)]^{m-1} X'(t) = m X'(t) [X(t)]^{m-1}.$$

Пусть

$$F_p(t) = (f_{jk}^{(p)}(t)) \in C^1(a, b) \quad (p = 1, 2, \dots)$$

и матричный ряд

$$\sum_{p=1}^{\infty} F_p(t)$$

сходится при  $t \in (a, b)$ , а ряд производных

$$\sum_{p=1}^{\infty} F_p'(t)$$

сходится равномерно на  $(a, b)$ , т. е. все функциональные ряды

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{d}{dt} f_{jk}^{(p)}(t) \quad (j = 1, \dots, m; k = 1, \dots, n)$$

равномерно сходятся на  $(a, b)$ . Тогда при  $t \in (a, b)$  справедлива формула

$$\frac{d}{dt} \sum_{p=1}^{\infty} F_p(t) = \sum_{p=1}^{\infty} F_p'(t). \quad (1.11.1)$$

Доказательство проводится аналогично скалярному случаю. В частности, формула (1.11.1) верна, если

$$\|F'_p(t)\| \leq c_p \quad (p=1, 2, \dots),$$

где ряд  $\sum_{p=1}^{\infty} c_p$  сходится.

Если матрица  $F(t) \in C[a, b]$ , то при  $t_0 \in [a, b]$  и  $t \in [a, b]$  определяется ее интеграл (см. [1])

$$\int_{t_0}^t F(\tau) d\tau = \left( \int_{t_0}^t f_{jk}(\tau) d\tau \right).$$

Используя понятие предела матрицы, интеграл матрицы можно определить через предельный переход

$$\int_{t_0}^t F(\tau) d\tau = \lim_{\max |\Delta t_\nu| \rightarrow 0} \sum_{\nu=0}^{n-1} F(t_\nu) \Delta t_\nu,$$

где  $t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$  и

$$\Delta t_\nu = t_{\nu+1} - t_\nu \quad (\nu=0, 1, \dots, n-1).$$

Справедливы следующие свойства:

1) если  $F(t) = \Phi'(t)$ , то

$$\int_{t_0}^t F(\tau) d\tau = \Phi(t) - \Phi(t_0);$$

2) если  $C$  — постоянная матрица, то

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t CF(\tau) d\tau &= C \int_{t_0}^t F(\tau) d\tau, \\ \int_{t_0}^t F(\tau) Cd\tau &= \int_{t_0}^t F(\tau) d\tau \cdot C; \end{aligned}$$

3) если  $F(\tau), G(\tau) \in C[t_0, t]$ , то

$$\int_{t_0}^t [F(\tau) + G(\tau)] d\tau = \int_{t_0}^t F(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t G(\tau) d\tau;$$

4) если  $F(\tau), G(\tau) \in C^1[t_0, t]$ , то

$$\int_{t_0}^t F(\tau) G'(\tau) d\tau = F(t)G(t) - F(t_0)G(t_0) - \int_{t_0}^t F'(\tau)G(\tau) d\tau$$

(формула интегрирования по частям);

5)

$$\left\| \int_{t_0}^t F(\tau) d\tau \right\| \leq \int_{t_0}^t \|F(\tau)\| |d\tau|. \quad (1.11.2)$$



Действительно, в силу свойства 3) нормы матрицы для любой конечной суммы имеем

$$\left\| \sum_{\nu=0}^{n-1} F(t_\nu) \Delta t_\nu \right\| \leq \sum_{\nu=0}^{n-1} \|F(t_\nu)\| |\Delta t_\nu|.$$

Отсюда, переходя к пределу при  $\max |\Delta t_\nu| \rightarrow 0$  и учитывая непрерывность нормы, получаем формулу (1.11.2).

В дальнейшем иногда придется рассматривать вектор-функции

$$f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix},$$

компоненты которых  $f_j(\mathbf{x}) = f_j(x_1, \dots, x_n)$  зависят от нескольких переменных  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ . Если  $f_j(\mathbf{x}) \in C^1$  ( $j = 1, \dots, m$ ), то под *производной* такой функции по вектору  $\mathbf{x}$  понимается *матрица Якоби*

$$\frac{df}{d\mathbf{x}} \equiv f'(\mathbf{x}) = \left( \frac{\partial f_j(\mathbf{x})}{\partial x_k} \right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Если мы имеем сложную функцию

$$\mathbf{u} = f(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m); \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)),$$

где

$$\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{t}), \quad \mathbf{t} = (t_1, \dots, t_p),$$

причем  $f(\mathbf{x})$  и  $\varphi(\mathbf{t})$  непрерывно дифференцируемы, то согласно правилу дифференцирования сложной функции получаем (см. [7])

$$\frac{du_j}{dt_k} = \sum_{s=1}^n \frac{\partial u_j}{\partial x_s} \cdot \frac{\partial x_s}{\partial t_k} \quad (j = 1, \dots, m; k = 1, \dots, n).$$

Отсюда, используя правило умножения матриц, будем иметь

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \left( \sum_s \frac{\partial u_j}{\partial x_s} \frac{\partial x_s}{\partial t_k} \right) = \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) \left( \frac{\partial x_j}{\partial t_k} \right),$$

т. е.

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{x}) = f'(\mathbf{x}) \frac{d\mathbf{x}}{dt}.$$

## § 12. Экспоненциал матрицы

Пусть  $X = (x_{jk})$  — квадратная матрица порядка  $n$ .

Определение. Под *экспоненциалом* квадратной матрицы  $X$  понимается матричная функция

$$\exp X \equiv e^X = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{X^p}{p!}. \quad (1.12.1)$$

Матричный ряд (1.12.1) сходится для любой квадратной матрицы  $X$  и притом абсолютно. Действительно, составляя соответствующий ряд норм, будем иметь

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{\|X\|^p}{p!} \leq \|E\| + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\|X\|^p}{p!} < \infty, \quad (1.12.2)$$

что и доказывает наше утверждение.

В частности, на основании формулы (1.12.2), используя I или II нормы, где  $\|E\| = 1$ , имеем

$$\|e^X\| \leq \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\|X\|^p}{p!} = e^{\|X\|}.$$

Пусть матрицы  $X$  и  $Y$  перестановочны, т. е.

$$XY = YX.$$

Докажем основное свойство экспоненциала матрицы

$$e^X e^Y = e^{X+Y}. \quad (1.12.3)$$

Действительно, в силу абсолютной сходимости разложения (1.12.1) имеем

$$e^X e^Y = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{X^p}{p!} \cdot \sum_{q=0}^{\infty} \frac{Y^q}{q!} = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{X^p Y^q}{p! q!}.$$

Положим

$$p + q = s \quad (s = 0, 1, 2, \dots);$$

тогда

$$q = s - p \geq 0, \text{ т. е. } p \leq s,$$

и, следовательно,

$$e^X e^Y = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{p=0}^s \frac{X^p Y^{s-p}}{p! (s-p)!} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \sum_{p=0}^s C_s^p X^p Y^{s-p}, \quad (1.12.4)$$

где

$$C_s^p = \frac{s!}{p! (s-p)!}$$

— число сочетаний из  $s$  элементов по  $p$ . Так как матрицы  $X$  и  $Y$  перестановочны, то

$$\sum_{p=0}^s C_s^p X^p Y^{s-p} = (X + Y)^s.$$

Отсюда на основании формул (1.12.4) и (1.12.1) получаем

$$e^X e^Y = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} (X + Y)^s = e^{X+Y},$$

что и требовалось доказать.

Из формулы (1.12.3), в частности, находим

$$(e^X)^{-1} = e^{-X}. \quad (1.12.5)$$

Отметим еще одно свойство экспоненциала матрицы. Если  $X_1$  — квадратная матрица, подобная матрице  $X$ , т. е.

$$X_1 = SXS^{-1} \quad (\det S \neq 0),$$

то имеем

$$e^{X_1} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} (SXS^{-1})^p = S \left( \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} X^p \right) S^{-1} = Se^X S^{-1},$$

т. е.

$$\exp(SXS^{-1}) = S(\exp X) S^{-1}. \quad (1.12.6)$$

(ср. § 9).

### § 13. Нормальная форма экспоненциала матрицы

Пусть  $A$  — квадратная матрица. Рассмотрим экспоненциал более общего вида

$$e^{At}, \quad (1.13.1)$$

где  $t$  — числовой множитель (параметр). Обозначим через

$$\lambda_1, \dots, \lambda_m \quad (m \leq n)$$

собственные значения матрицы  $A$ , отвечающие различным клеткам  $J_1(\lambda_1), \dots, J_m(\lambda_m)$  ее канонической формы Жордана, и пусть  $e_1, \dots, e_m$ , соответственно, порядки этих клеток. Тогда

$$A = S^{-1} \text{diag} [J_1(\lambda_1), \dots, J_m(\lambda_m)] S,$$

где  $S$  — некоторая неособенная матрица ( $\det S \neq 0$ ).

Воспользовавшись формулой (1.12.1) и учитывая известные свойства квазидиагональных матриц, имеем

$$\begin{aligned} e^{At} &= \exp \{ t S^{-1} \operatorname{diag} [J_1(\lambda_1), \dots, J_m(\lambda_m)] S \} = \\ &= S^{-1} \operatorname{diag} [e^{tJ_1(\lambda_1)}, \dots, e^{tJ_m(\lambda_m)}] S. \end{aligned} \quad (1.13.2)$$

Так как

$$J_q(\lambda_q) = \lambda_q E_q + I_1^{(q)} \quad (q = 1, \dots, m),$$

где  $E_q$  — единичная матрица порядка  $q$  и  $I_1^{(q)}$  — ее первый единичный косоый ряд, то

$$\begin{aligned} e^{tJ_q(\lambda_q)} &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{t^p}{p!} (\lambda_q E_q + I_1^{(q)})^p = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{t^p}{p!} \sum_{r=0}^p \frac{p!}{r!(p-r)!} \lambda_q^{p-r} I_r^{(q)} = \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{I_r^{(q)} t^r}{r!} \sum_{p=r}^{\infty} \frac{(\lambda_q t)^{p-r}}{(p-r)!} \end{aligned} \quad (1.13.3)$$

Как известно,

$$I_r^{(q)} = [I_1^{(q)}]^r = O \quad \text{при } r \geq q,$$

причем

$$\sum_{p=r}^{\infty} \frac{(\lambda_q t)^{p-r}}{(p-r)!} = e^{\lambda_q t}.$$

Поэтому из формулы (1.13.3) окончательно получаем

$$e^{tJ_q(\lambda_q)} = e^{\lambda_q t} \sum_{r=0}^{q-1} \frac{t^r}{r!} I_r^{(q)} \quad (q = 1, \dots, m), \quad (1.13.4)$$

где

$$I_0^{(q)} = E_q.$$

Формулы (1.13.2) и (1.13.4) и дают нормальную форму матрицы.

Заметим, что формулу (1.13.4) можно было непосредственно получить из общих формул (1.9.9) и (1.9.10).

Замечание. Из формул (1.13.2) и (1.13.4) при  $t=1$  вытекает, что если  $\lambda_q$  ( $q = 1, \dots, m$ ) — собственные значения матрицы  $A$ , то  $e^{\lambda_q}$  являются собственными значениями матрицы  $e^A$ , причем, так как  $e^{\lambda_q} \neq 0$ , порядки соответствующих клеток Жордана матриц  $A$  и  $e^A$  одинаковы (§ 9, теорема 3, следствие).

Пример. Написать нормальный вид матрицы  $e^{tA}$ , где

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Так как матрица  $A$  в данном случае есть клетка Жордана, то на основании формулы (1.12.4) получаем

$$e^{tA} = e^{2t} \left( E + \frac{t}{1!} I_1 + \frac{t^2}{2!} I_2 \right) = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Замечание.** Из формул (1.13.2) и (1.13.4) можно получить оценку нормы матрицы  $e^{At}$ .

Пусть

$$\alpha = \max_q \operatorname{Re} \lambda_q(A).$$

Используя I норму или II норму, на основании формулы (1.13.2) при  $t \geq 0$  получаем

$$\begin{aligned} \| e^{At} \| &\leq \| S^{-1} \| \max_q \| \exp tJ_q(\lambda_q) \| \| S \| \leq \\ &\leq \tilde{c} \max_q |e^{\lambda_q t}| \sum_{r=0}^{e_q-1} \frac{t^r}{r!} \leq \tilde{c} e^{\alpha t} P(t), \end{aligned} \quad (1.13.5)$$

где  $P(t)$  — некоторый целый полином степени  $k = \max_q (e_q - 1)$ .

Так как при любом  $\varepsilon > 0$  имеем

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{P(t)}{e^{\varepsilon t}} = 0,$$

то из формулы (1.13.5) находим

$$\| e^{At} \| \leq c e^{(\alpha+\varepsilon)t} \text{ при } 0 \leq t < \infty, \quad (1.13.6)$$

где  $c = c(\varepsilon)$  — некоторая положительная постоянная.

Оценка вида (1.13.6) имеет место также и для III нормы.

Отметим, что если характеристические числа матрицы  $A$ , обладающие наибольшими вещественными частями  $\alpha$ , имеют простые элементарные делители, то при  $t \geq 0$  справедлива улучшенная оценка:

$$\| e^{At} \| \leq c e^{\alpha t}. \quad (1.13.7)$$

#### § 14. Некоторые свойства экспоненциала матрицы

Найдем  $\det e^{At}$ . На основании формулы (1.13.2) получаем

$$\det e^{At} = \det S^{-1} \det e^{tJ_1(\lambda_1)} \dots \det e^{tJ_m(\lambda_m)} \det S = \prod_{q=1}^n \det e^{tJ_q(\lambda_q)}.$$

Так как в силу формулы (1.13.4), очевидно, имеем

$$\det e^{tJ_q(\lambda_q)} = e^{e_q \lambda_q t} \quad (q = 1, \dots, m),$$

то

$$\det e^{At} = \exp\left(t \sum_{q=1}^m e_q \lambda_q\right), \quad (1.14.1)$$

где  $e_1 + \dots + e_m = n$ .

Собственные значения  $\lambda_q$  являются корнями векового уравнения

$$\det(\lambda E - A) = 0,$$

или

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда получаем

$$\lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \dots + (-1)^n \det A = 0. \quad (1.14.2)$$

Так как выражение  $\sum_{q=1}^m e_q \lambda_q$ , очевидно, представляет собой сумму всех корней уравнения (1.14.2), где каждый корень берется слагаемым столько раз, какова его кратность, то

$$\sum_{q=1}^m e_q \lambda_q = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \text{Sp } A.$$

Таким образом, из формулы (1.14.1) имеем

$$\det e^{At} = e^{t \text{Sp } A},$$

где

$$\text{Sp } A = \sum_{j=1}^n a_{jj}$$

— след матрицы  $A$ .

Найдем производную матричной функции  $e^{At}$  по параметру  $t$ . Так как элементы матрицы

$$e^{At} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{A^p}{p!} t^p \quad (1.14.3)$$

представляют собой целые функции от  $t$ , то законно почленное дифференцирование ряда (1.14.3) по  $t$  и, следовательно, имеем

$$\frac{d}{dt} e^{At} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{A^p}{(p-1)!} t^{p-1} = A e^{At} = e^{At} A. \quad (1.14.4)$$

Из формулы (1.14.4) вытекает, что матрица

$$X(t) = e^{At}$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dX}{dt} = AX,$$

причем  $X(0) = E$ .

В более общем случае, если  $(n \times n)$ -матрица  $X(t) \in C^1$  коммутирует со своей производной  $X'(t)$ , получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [e^{X(t)}] &= \frac{d}{dt} \left\{ \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} [X(t)]^p \right\} = \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(p-1)!} [X(t)]^{p-1} X'(t) = e^{X(t)} X'(t) = X'(t) e^{X(t)}. \end{aligned}$$

## § 15. Логарифм матрицы

**Определение.** Пусть  $X$  — квадратная матрица. Матрица  $Y$ , удовлетворяющая условию

$$e^Y = X,$$

называется *логарифмом матрицы*  $X$  и обозначается следующим образом:

$$Y = \text{Ln } X.$$

**Теорема.** *Всякая неособенная матрица  $X$  имеет логарифм.*

**Доказательство** (см. [6]). 1) Пусть сначала  $X = J(\lambda_1)$  — клетка Жордана порядка  $e_1$ , соответствующая собственному значению  $\lambda_1$ , причем  $\lambda_1 \neq 0$ , так как предполагается, что матрица неособенная. Имеем

$$X = \lambda_1 E + I_1 = \lambda_1 \left( E + \frac{I_1}{\lambda_1} \right),$$

где  $I_1$  — первый единичный косою ряд.

По аналогии с известным логарифмическим разложением

$$\ln(1+z) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p} z^p \quad (|z| < 1) \quad (1.15.1)$$

рассмотрим матрицу

$$Y = E \operatorname{Ln} \lambda_1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p} \left( \frac{I_1}{\lambda_1} \right)^p, \quad (1.15.2)$$

где

$$\begin{aligned} \operatorname{Ln} \lambda_1 &= \ln |\lambda_1| + i (\arg \lambda_1 + 2k\pi) \\ (k &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \end{aligned}$$

Так как  $I_1^p = 0$  при  $p \geq e_1$ , то ряд (1.15.2) сходящийся и матрица  $Y$  всегда имеет смысл.

На основании формулы (1.15.1) при  $|z| < 1$  справедливо тождество

$$\exp \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p} z^p \equiv 1 + z, \quad (1.15.3)$$

из которого вытекает, что коэффициенты при одинаковых степенях  $z$  степенных разложений левой и правой частей равенства (1.15.3) совпадают между собой. Так как квадратная матрица  $Z$  коммутирует со своими степенями, то степенное разложение левой части равенства (1.15.3) формально совпадает с соответствующим матричным степенным разложением

$$\exp \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p} Z^p \equiv \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{q!} \left[ \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p} Z^p \right]^q,$$

где принято  $Z^0 = E$ . Поэтому, если матричный ряд  $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p} Z^p$  сходится, то имеет место тождество

$$\exp \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p} Z^p \equiv E + Z. \quad (1.15.4)$$

Отсюда, учитывая, что матрица  $E$  перестановочна с любой матрицей того же порядка, и используя основное свойство экспоненциала матрицы, будем иметь

$$e^Y = \exp(E \operatorname{Ln} \lambda_1) \cdot \exp \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p} \left( \frac{I_1}{\lambda_1} \right)^p = \lambda_1 \left( E + \frac{I_1}{\lambda_1} \right) = \lambda_1 E + I_1 = X.$$

Следовательно,

$$Y = \operatorname{Ln} X.$$



Таким образом, принимая во внимание, что  $I_p^p = I_p$  при  $p < e_1$  и  $I_p^p = 0$  при  $p \geq e_1$ , окончательно получим

$$\operatorname{Ln} X \equiv \operatorname{Ln} J_1(\lambda_1) = E \operatorname{Ln} \lambda_1 + \sum_{p=1}^{e_1-1} \frac{(-1)^{p-1}}{p \lambda_1^p} I_p. \quad (1.15.5)$$

2) Пусть теперь  $X$  — произвольная неособенная матрица. Приводя  $X$  к канонической форме Жордана, будем иметь

$$X = S^{-1} \operatorname{diag} [J_1(\lambda_1), \dots, J_m(\lambda_m)] S,$$

где  $S$  — неособенная матрица и  $J_q(\lambda_q)$  ( $q = 1, \dots, m$ ) — соответствующие клетки Жордана. Можно принять

$$\operatorname{Ln} X = S^{-1} \operatorname{diag} [\operatorname{Ln} J_1(\lambda_1), \dots, \operatorname{Ln} J_m(\lambda_m)] S, \quad (1.15.6)$$

где  $\operatorname{Ln} J_q(\lambda_q)$  определяются по формуле (1.15.5).

Действительно, аналогично формуле (1.13.2) имеем

$$\begin{aligned} e^{\operatorname{Ln} X} &= S^{-1} \operatorname{diag} [e^{\operatorname{Ln} J_1(\lambda_1)}, \dots, e^{\operatorname{Ln} J_m(\lambda_m)}] S = \\ &= S^{-1} \operatorname{diag} [J_1(\lambda_1), \dots, J_m(\lambda_m)] S = X, \end{aligned}$$

что и подтверждает формулу (1.15.6).

Теорема доказана.

Замечание 1. Из формул (1.15.6) и (1.15.5) следует, что  $\operatorname{Ln} X$  есть функция многозначная.

Замечание 2. На основании следствия теоремы 2 из § 6 и из формул (1.15.5) и (1.15.6) вытекает, что если  $\lambda_q$  ( $q = 1, \dots, m$ ) суть собственные значения неособенной матрицы  $X$ , то  $\operatorname{Ln} \lambda_q$  ( $q = 1, \dots, m$ ) являются собственными значениями матрицы  $\operatorname{Ln} X$ , причем  $X$  и  $\operatorname{Ln} X$  имеют одинаковые порядки  $e_q$  соответствующих клеток Жордана.

Замечание 3. Если  $(n \times n)$ -матрица  $X$  действительная и положительно определенная, т. е. все собственные значения ее  $\lambda_j(X)$  ( $j = 1, \dots, n$ ) положительны, то имеется вещественная матрица  $S$ , приводящая ее к жордановой форме. В этом случае, как видно из формулы (1.15.6), для матрицы  $X$  существует действительный  $\operatorname{Ln} X$ .

Пример. Найти  $\operatorname{Ln} X$ , где

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Используя формулу (1.15.5), получаем

$$\operatorname{Ln} X = E \operatorname{Ln} 1 + I_1 - \frac{1}{2} I_2 = \begin{bmatrix} 2k\pi i & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2k\pi i & 1 \\ 0 & 0 & 2k\pi i \end{bmatrix} \quad (k - \text{целое}).$$

Нетрудно убедиться, что если неособенные матрицы  $X$  и  $Y$  коммутируют между собой, т. е.

$$XY = YX,$$

то

$$\text{Ln}(XY) = \text{Ln} X + \text{Ln} Y,$$

где ветви логарифмов выбираются соответствующим образом.

### Упражнения к главе I

1. Показать, что верхняя треугольная матрица

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & \gamma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \gamma_{n-1, n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

с нулевой диагональю *нильпотентна*, т. е.

$$\Gamma^n = O,$$

где  $n$  — порядок матрицы.

2. Пусть  $T$  — верхняя треугольная матрица вида

$$T = \alpha E + \Gamma \quad (\alpha \neq 0),$$

где  $\Gamma$  — сумма косых рядов от 1-го до  $(n-1)$ -го.

Показать, что

$$T^{-1} = \alpha^{-1}E - \alpha^{-2}\Gamma + \alpha^{-3}\Gamma^2 + \dots + (-1)^{n-1}\alpha^{-n}\Gamma^{n-1}.$$

3. Пусть  $E - A$  — неособенная матрица. Показать, что

$$(E - A)^{-1} A = A (E - A)^{-1}.$$

4. Показать, что если

$$A = \text{diag} [J_1(\lambda_1), \dots, J_m(\lambda_m)],$$

то

$$A^{-1} = \text{diag} \left[ -J_1 \left( -\frac{1}{\lambda_1} \right), \dots, -J_m \left( -\frac{1}{\lambda_m} \right) \right] \\ (\lambda_q \neq 0, q = 1, \dots, m).$$

5. Доказать, что для всех квадратных матриц  $X$  определены аналитические функции

$$\sin X = X - \frac{1}{3!} X^3 + \frac{1}{5!} X^5 - \dots$$

и

$$\cos X = E - \frac{1}{2!} X^2 + \frac{1}{4!} X^4 - \dots$$

Найти  $\sin J(\alpha)$ , где  $J(\alpha)$  — клетка Жордана.

6. Пусть  $\Gamma$  — сумма косых рядов от 1-го до  $(n-1)$ -го. Показать, что

$$e^{\Gamma} = E + \Gamma + \frac{1}{2!} \Gamma^2 + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \Gamma^{n-1}$$

и

$$\text{Ln}(E + \Gamma) = \Gamma - \frac{1}{2} \Gamma^2 + \dots + \frac{(-1)^n}{n-1} \Gamma^{n-1}.$$

7. Пусть

$$A = \begin{bmatrix} S E_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & S E_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & S E_2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 S \end{bmatrix}$$

— матрица типа  $2p \times 2p$ , где

$$S = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$$

и  $E_2$  — единичная матрица второго порядка. Показать, что

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{tS} & \frac{t}{1!} e^{tS} & \dots & \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} e^{tS} \\ 0 & e^{tS} & \dots & \frac{t^{p-2}}{(p-1)!} e^{tS} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{tS} \end{bmatrix},$$

где

$$e^{tS} = e^{\alpha t} \begin{bmatrix} \cos \beta t & -\sin \beta t \\ \sin \beta t & \cos \beta t \end{bmatrix}.$$

8. Пользуясь формулой Сильвестра, найти  $e^X$ , если

$$X = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

9. Для матриц второго порядка  $X$  найти представление аналитической функции  $F(X)$  в виде полинома в следующих случаях: 1) неравных характеристических корней  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  и 2) равных  $\lambda_1 = \lambda_2$ .

10. Найти  $\text{Ln} A$ , если

$$A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

( $\alpha$  действительно).

ГЛАВА II

**УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ**

**§ 1. Основные понятия теории устойчивости**

Рассмотрим нормальную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_j}{dt} = f_j(t, y_1, \dots, y_n) \quad (j=1, \dots, n), \quad (2.1.1)$$

где  $t$  — независимое переменное (время);  $y_1, \dots, y_n$  — искомые функции;  $f_j$  — функции (в общем случае комплекснозначные), определенные в некотором полуцилиндре:

$$Z = I_t^+ \times D_y, \quad I_t^+ = \{t < t < +\infty\}^1,$$

причем  $t$  — число или символ  $-\infty$  и  $D_y$  — открытая область действительного  $\mathcal{R}_y^n$  или комплексного  $\mathfrak{R}_y^n$   $n$ -мерного векторного пространства. В дальнейшем для краткости систему (2.1.1) будем называть *дифференциальной*.

Переходя к матрично-векторным обозначениям

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \equiv \text{colon}(y_1, \dots, y_n),$$

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{y}) = \text{colon}[f_1(t, \mathbf{y}), \dots, f_n(t, \mathbf{y})]$$

и учитывая, что

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \text{colon}(\dot{y}_1, \dots, \dot{y}_n),$$

систему (2.1.1) можно записать в виде матрично-векторного уравнения

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}). \quad (2.1.2)$$

Действительную или комплекснозначную вектор-функцию  $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t) \in C^1$ , определенную в некотором интервале  $(a, b) \subset I_t$

---

<sup>1)</sup> В тех случаях, когда это не вызывает неясностей, мы вместо символа  $+\infty$  будем писать символ  $\infty$ .

и удовлетворяющую при  $a < t < b$  уравнению (2.1.2), будем называть его *решением*.

В дальнейшем будем обычно предполагать, что

$$f(t, \mathbf{y}) \in C_{t, \mathbf{y}}^{(0,1)}(Z),$$

т. е. вектор-функция  $f(t, \mathbf{y})$  в области  $Z$  непрерывна по независимой переменной  $t$  и имеет непрерывные частные производные первого порядка по независимым переменным  $y_1, \dots, y_n$ . Если система (2.1.1) рассматривается в действительном пространстве  $\mathcal{R}_y^n$ , то производные правой части ее трактуются в обычном смысле. В том случае, когда  $\mathbf{y}$  может принимать комплексные значения, функцию  $f(t, \mathbf{y})$  будем предполагать аналитической относительно совокупности комплексных переменных  $y_1, \dots, y_n$  (в простейшем варианте — многочленом от этих переменных). При этом под производными  $f'_{jy_k}(t, y_1, \dots, y_n)$  ( $j, k = 1, \dots, n$ ) понимаются производные с точки зрения теории аналитических функций (см., например, Гурса, Курс математического анализа, Гостехиздат, 1933, т. II, ч. 1, гл. XVII).

При этих условиях справедлива теорема Коши (см. [9], [10], [11]): для каждой системы значений  $(t_0, \mathbf{y}_0) \in Z$  существует единственное решение системы (2.1.2):

$$\begin{aligned} \mathbf{y} = \mathbf{y}(t) \quad (t_0 - A < t < t_0 + B; \\ A > 0, B > 0), \end{aligned}$$

определенное в некотором интервале  $(t_0 - A, t_0 + B) \subset (t, \infty)$  и удовлетворяющее начальному условию:  $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$ , т. е. однозначно разрешима соответствующая *задача Коши*. Иначе говоря, в области  $Z \subset I_t^+ \times \mathcal{R}_y^n$  существует единственная интегральная кривая  $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$  системы (2.1.2), проходящая через точку  $M_0(t_0, \mathbf{y}_0)$ .

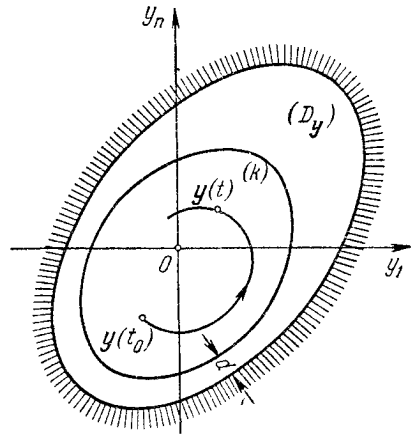


Рис. 2.

Заметим, что если для любого  $t \in [t_0, t_0 + B)$  точка  $\mathbf{y}(t) \in K \subset D_y$ , причем расстояние  $d$  ограниченного замкнутого множества (компакта)  $K$  до границы области  $D_y$  положительно (рис. 2), то можно принять  $B = \infty$ , т. е. решение  $\mathbf{y}(t)$  имеет смысл при  $t_0 \leq t < \infty$  (*бесконечно продолжаемо вправо*). Аналогично при  $t = -\infty$  формулируются условия бесконечной продолжаемости влево ( $A = -\infty$ ).

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением дифференциальных систем вида (2.1.2), обладающих *свойством единственности*, т. е. таких, для которых задача Коши при начальных данных  $(t_0, y_0) \in Z$  имеет единственное решение. Иными словами, если

$$y(t) \quad (a < t < b)$$

есть решение системы (2.1.2), то оно тождественно при  $a < t < b$  с решением этой системы  $\tilde{y}(t)$ , определяемым начальными условиями:  $\tilde{y}(t_0) = y(t_0)$ , где  $t_0$  — любая точка интервала  $(a, b)$ .

Решение  $y = y(t)$  можно рассматривать как траекторию *фазового пространства*  $\mathbb{R}^n$ , где  $t$  играет роль параметра.

Для дифференциальных систем с непрерывной правой частью и свойством единственности имеет место *интегральная непрерывность решений* (см. [9] — [12]), а именно: если  $y(t)$  ( $a < t < b$ ) есть

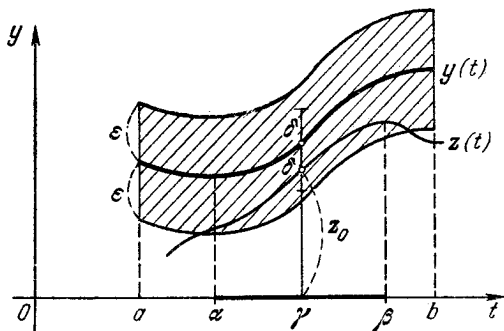


Рис. 3.

решение системы (2.1.2), то для любых  $\varepsilon > 0$  и  $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$  существует  $\delta > 0$  такое, что решение  $z(t)$ , определяемое начальным условием  $z(\gamma) = z_0$ , где  $\gamma \in [\alpha, \beta]$  и  $\|z(\gamma) - y(\gamma)\| < \delta$ , будет иметь смысл при  $\alpha \leq t \leq \beta$ , причем  $\|z(t) - y(t)\| < \varepsilon$  для  $t \in [\alpha, \beta]$  (см. рис. 3).

Определение 1. Решение  $\eta = \eta(t)$  ( $a < t < \infty$ ) системы (2.1.2) называется *устойчивым по Ляпунову* (см. [13]) при  $t \rightarrow +\infty$  (или, короче, *устойчивым*), если для любых  $\varepsilon > 0$  и  $t_0 \in (a, \infty)$  существует  $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$  такое, что

1) все решения  $y = y(t)$  системы (2.1.2) (включая решение  $\eta(t)$ ), удовлетворяющие условию

$$\|y(t_0) - \eta(t_0)\| < \delta, \quad (2.1.3)$$

определены в промежутке  $t_0 < t < \infty$ , т. е.

$$y(t) \in D_y \quad \text{при} \quad t \in [t_0, \infty);$$

2) для этих решений справедливо неравенство

$$\|y(t) - \eta(t)\| < \varepsilon \text{ при } t_0 \leq t < \infty. \quad (2.1.4)$$

Иными словами, решение  $\eta(t)$  устойчиво, если достаточно близкие к нему в любой начальный момент  $t_0$  решения  $y(t)$  целиком погружаются в сколь угодно узкую  $\varepsilon$ -трубку, построенную вокруг решения  $\eta(t)$  (рис. 4).

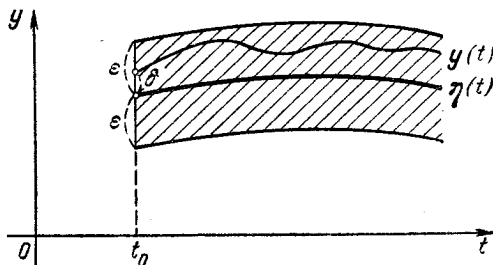


Рис. 4.

Из неравенств (2.1.3) и (2.1.4) по смыслу вытекает, что всегда можно выбирать  $\delta \leq \varepsilon$ .

В частности, при  $f(t, 0) \equiv 0$  тривиальное решение (положение равновесия)  $\eta(t) \equiv 0$  ( $a < t < \infty$ ) устойчиво, если для любых  $\varepsilon > 0$  и  $t_0 \in (a, \infty)$  существует  $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$  такое, что из неравенства

$$\|y(t_0)\| < \delta$$

следует неравенство

$$\|y(t)\| < \varepsilon \text{ при } t_0 \leq t < \infty.$$

Заметим, что из устойчивости нетривиального решения  $\eta(t)$  не вытекает его ограниченность; обратно, из ограниченности решения, вообще говоря, не следует его устойчивость (см. § 7).

**Определение 2.** Если число  $\delta > 0$  можно выбрать не зависящим от начального момента  $t_0 \in T$ , т. е.  $\delta = \delta(\varepsilon)$ , то устойчивость называется *равномерной* в области  $T$ .

**Определение 3.** Решение  $\eta = \eta(t)$  ( $a < t < \infty$ ) будем называть *неустойчивым по Ляпунову*, если для некоторых  $\varepsilon > 0$ ,  $t_0 \in (a, \infty)$  и любого  $\delta > 0$  существует решение  $y_\delta(t)$  (хотя бы одно) и момент  $t_1 = t_1(\delta) > t_0$  такие, что

$$\|y_\delta(t_0) - \eta(t_0)\| < \delta \text{ и } \|y_\delta(t_1) - \eta(t_1)\| \geq \varepsilon.$$

Из отрицания определения 1 вытекает, что следует считать также неустойчивым решение  $\eta(t)$ , непродолжаемое при  $t \rightarrow \infty$  или такое, для которого в любой окрестности точки  $\eta(t_0)$

найдется точка  $\mathbf{y}_0$ , порождающая в момент времени  $t_0$  решение  $\mathbf{y}(t)$ , непродолжаемое при  $t_0 \leq t < \infty$ .

Аналогично, тривиальное решение (положение равновесия)  $\boldsymbol{\eta} \equiv 0$  неустойчиво (рис. 5), если для некоторых  $\varepsilon > 0$ ,  $t_0 \in (a, \infty)$  и любого  $\delta > 0$  существуют решения  $\mathbf{y}_\delta(t)$  и момент  $t_1 > t_0$  такие, что

$$\|\mathbf{y}_\delta(t_0)\| < \delta, \quad \|\mathbf{y}_\delta(t_1)\| \geq \varepsilon.$$

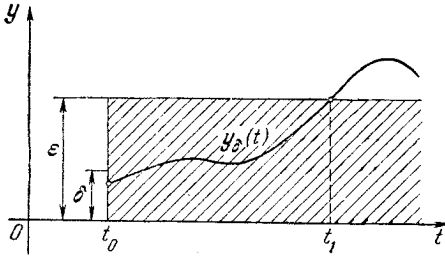


Рис. 5.

Определение 4. Решение  $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}(t)$  ( $a < t < \infty$ ) называется *асимптотически устойчивым* при  $t \rightarrow +\infty$ , если: 1) это решение устойчиво по Ляпунову и 2) для любого  $t_0 \in (a, \infty)$  существует  $\Delta =$

$\Delta(t_0) > 0$  такое, что все решения  $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$  ( $t_0 \leq t < \infty$ ), удовлетворяющие условию  $\|\mathbf{y}(t_0) - \boldsymbol{\eta}(t_0)\| < \Delta$ , обладают свойством

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{y}(t) - \boldsymbol{\eta}(t)\| = 0. \quad (2.1.5)$$

Таким образом, асимптотическая устойчивость есть «устойчивость с нагрузкой», т. е. устойчивость при наличии дополнительных условий. В частности, тривиальное решение  $\boldsymbol{\eta}(t) \equiv 0$  асимптотически устойчиво, если оно устойчиво и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{y}(t) = 0 \quad \text{при} \quad \|\mathbf{y}(t_0)\| < \Delta.$$

Шар  $\|\mathbf{y}\| < \Delta(t_0)$  при фиксированном  $t_0$  является *областью притяжения* положения равновесия  $O$ .

Определение 5. Пусть система (2.1.2) определена в полупространстве  $\Omega = \{t < t < \infty\} \times \{\|\mathbf{x}\| < \infty\}$ .

Если решение  $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}(t)$  ( $a < t < \infty$ ) асимптотически устойчиво при  $t \rightarrow \infty$  и все решения  $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$  ( $t_0 \leq t < \infty$ ,  $t_0 > a$ ) обладают свойством (2.1.5), т. е.  $\Delta = \infty$ , то решение  $\boldsymbol{\eta}(t)$  называется *асимптотически устойчивым в целом*.

Иными словами, в случае асимптотической устойчивости в целом решения  $\boldsymbol{\eta}(t)$  его областью притяжения в любой начальный момент  $t = t_0$  является все пространство  $\mathfrak{R}_y^n$  ( $\Delta = \infty$ ).

Пусть наряду с системой (2.1.2) имеется возмущенная система

$$\frac{dz}{dt} = f(t, \mathbf{z}) + \varphi(t, \mathbf{z}), \quad (2.1.6)$$

где

$$\mathbf{z} = \text{col}(z_1, \dots, z_n) \quad \text{и} \quad \varphi(t, \mathbf{z}) \in C_{t\mathbf{z}}^{(1)}(Z).$$



Определение 6. Решение  $\eta = \eta(t)$  ( $a < t < \infty$ ) системы (2.1.2) называется *устойчивым при постоянно действующих возмущениях*  $\varphi(t, z)$  (см. [14]), если для любых  $\varepsilon > 0$  и  $t_0 \in (a, \infty)$  существует  $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$  такое, что при  $\|\varphi(t, z)\| < \delta$  все решения  $z = z(t)$  системы (2.1.6), удовлетворяющие условию  $\|z(t_0)\| < \delta$ , определены на промежутке  $[t_0, \infty)$ , причем

$$\|z(t) - \eta(t)\| < \varepsilon \quad \text{при} \quad t_0 \leq t < \infty.$$

Замечание. Если решение  $\eta = \eta(t)$  ( $a < t < \infty$ ) системы (2.1.1) с непрерывной правой частью устойчиво для какого-нибудь фиксированного момента  $t_0 \in (a, \infty)$ , то оно будет устойчиво для любого другого момента  $t'_0 \in (a, \infty)$ , т. е. является устойчивым в смысле определения 1.

Действительно, пусть при

$$\|y(t_0) - \eta(t_0)\| < \delta(\varepsilon, t_0) < \varepsilon \quad (2.1.7)$$

имеем

$$\|y(t) - \eta(t)\| < \varepsilon \quad \text{для} \quad t_0 \leq t < \infty. \quad (2.1.8)$$

В силу свойства интегральной непрерывности существует  $\delta' = \delta(\varepsilon, t'_0) > 0$  такое, что если

$$\|y(t'_0) - \eta(t'_0)\| < \delta', \quad (2.1.9)$$

то

$$\|y(t) - \eta(t)\| < \delta(\varepsilon, t_0) = \delta \quad \text{при} \quad t \in [t'_0, t_0].$$

Поэтому на основании формул (2.1.7) и (2.1.8) из неравенства (2.1.9) вытекает неравенство

$$\|y(t) - \eta(t)\| < \varepsilon \quad \text{при} \quad t'_0 \leq t < \infty.$$

Таким образом, можно ограничиваться проверкой устойчивости решения, а также его асимптотической устойчивости, лишь для некоторого заданного начального момента  $t_0$ .

Отсюда также получаем, что если решение  $\eta(t)$  ( $a < t < \infty$ ) неустойчиво при  $t = t_0$ , то оно является неустойчивым для любого другого момента  $t'_0 \in (a, \infty)$ .

В дальнейшем для теорем устойчивости мы, как правило, начальный момент  $t_0$  будем считать фиксированным (см. [14], [15], [16]).

## § 2. Общие свойства решений линейной дифференциальной системы

Рассмотрим линейную дифференциальную систему

$$\frac{dy_j}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{jk}(t) y_k + f_j(t) \quad (j=1, \dots, n), \quad (2.2.1)$$

где  $a_{jk}(t)$ ,  $f_j(t) \in C(I^+)$ , т. е. коэффициенты системы и свободные члены ее непрерывны в интервале  $I^+ = (a < t < \infty)$ , причем  $a$  — число или символ  $-\infty$ . Если не оговорено противное, то функции  $a_{jk}(t)$  и  $f_j(t)$  предполагаются действительными. Что касается решений  $y_j = y_j(t)$  ( $j=1, \dots, n$ ), то, вообще говоря, мы будем считать их комплекснозначными.

Можно также предполагать функции  $a_{jk}(t)$  ( $j, k=1, \dots, n$ ) и  $f_j(t)$  ( $j=1, \dots, n$ ) кусочно непрерывными на  $I^+$ . В этом случае под решением  $y_j(t)$  ( $j=1, \dots, n$ ) понимаются непрерывные на  $I^+$  функции, удовлетворяющие уравнениям (2.2.1) в интегральной форме

$$y_j(t) = c_j + \int_{t_0}^t \left[ \sum_{k=1}^n a_{jk}(\tau) y_k(\tau) + f_j(\tau) \right] d\tau$$

( $j=1, \dots, n$ ;  $t_0 \in I^+$ ;  $c_j$  — постоянные).

Введя векторно-матричные обозначения

$$\mathbf{y} = \text{colon } [y_1, \dots, y_n], \quad A(t) = [a_{jk}(t)], \\ \mathbf{f}(t) = \text{colon } [f_1(t), \dots, f_n(t)],$$

систему (2.2.1) можно записать более просто:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A(t) \mathbf{y} + \mathbf{f}(t), \quad (2.2.2)$$

где  $A(t) \in C(I^+)$ ,  $\mathbf{f}(t) \in C(I^+)$ .

Для линейной системы (2.2.2) справедлива следующая теорема существования и единственности решений (см. [9] — [11]): для любой системы чисел  $t_0 \in I^+$ ,  $\mathbf{y}_0 = \text{colon } [y_{01}, \dots, y_{0n}]$  существует решение  $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$  системы (2.2.2), определенное для всех  $t \in I^+$  и удовлетворяющее начальному условию:

$$\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0, \quad (2.2.3)$$

причем решение с такими свойствами единственно в  $I^+$ .

Пусть

$$X(t) = [x_{jk}(t)] \quad (\det X(t) \neq 0) \quad (2.2.4)$$

— фундаментальная матрица (иными словами, фундаментальная система решений, записанная в виде  $(n \times n)$ -матрицы) соответствующей



т. е.

$$\frac{d\mathbf{x}^{(k)}}{dt} = A(t) \mathbf{x}^{(k)} \quad (k = 1, \dots, n).$$

Если  $X(t)$  — фундаментальная матрица системы (2.2.5), то, как известно (см. [9]—[12]), каждое решение этой системы может быть записано в виде

$$\mathbf{x}(t) = X(t) \mathbf{c}, \quad (2.2.8)$$

где  $\mathbf{c} = \text{colop}[c_1, \dots, c_n]$  — некоторая постоянная матрица-столбец.

Пусть решение  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  удовлетворяет начальному условию  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ . Полагая в тождестве (2.2.8)  $t = t_0$ , будем иметь

$$\mathbf{x}(t_0) = X(t_0) \mathbf{c};$$

отсюда  $\mathbf{c} = X^{-1}(t_0) \mathbf{x}(t_0)$ . Следовательно,

$$\mathbf{x}(t) = X(t) X^{-1}(t_0) \mathbf{x}(t_0).$$

Вводя матрицу Коши

$$K(t, t_0) = X(t) X^{-1}(t_0),$$

получим

$$\mathbf{x}(t) = K(t, t_0) \mathbf{x}(t_0). \quad (2.2.9)$$

В частности, если фундаментальная матрица  $X(t)$  нормирована при  $t = t_0$ , т. е.  $X(t_0) = E$ , где  $E$  — единичная матрица, то формула (2.2.9) принимает вид

$$\mathbf{x}(t) = X(t) \mathbf{x}(t_0). \quad (2.2.10)$$

Заметим, что матрица Коши не зависит от выбора фундаментальной матрицы  $X(t)$ . Действительно, если  $\tilde{X}(t)$  есть другая фундаментальная матрица системы (2.2.1), то имеем  $\tilde{X}(t) = X(t) C$ , где  $C$  — постоянная неособенная матрица. Отсюда  $\tilde{X}^{-1}(t) = C^{-1} X^{-1}(t)$  и, следовательно,

$$\tilde{K}(t, t_0) = \tilde{X}(t) \tilde{X}^{-1}(t_0) = X(t) C C^{-1} X^{-1}(t_0) = K(t, t_0).$$

Любое решение  $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$  неоднородной системы может быть записано в виде

$$\mathbf{y}(t) = \tilde{\mathbf{y}}(t) + X(t) \mathbf{c},$$

где  $\tilde{\mathbf{y}}(t)$  — некоторое фиксированное решение ее и  $\mathbf{c}$  — постоянный  $(n \times 1)$ -вектор. Если  $\tilde{\mathbf{y}}(t)$  таково, что  $\tilde{\mathbf{y}}(t_0) = \mathbf{0}$ , то, очевидно,

$$\mathbf{c} = X^{-1}(t_0) \mathbf{y}(t_0)$$

и, следовательно,

$$\mathbf{y}(t) = \tilde{\mathbf{y}}(t) + K(t, t_0) \tilde{\mathbf{y}}(t_0).$$

### § 3. Формула Остроградского—Лиувилля

Пусть

$$X(t) = [x_{jk}(t)]$$

— фундаментальная матрица однородной дифференциальной системы (2.2.5) и

$$W(t) = \det X(t) \quad (2.3.1)$$

— *определитель Вронского*.

Используя правило дифференцирования определителя, находим

$$\frac{dW}{dt} = \sum_{j=1}^n \begin{vmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{1k}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x'_{j1}(t) & \dots & x'_{jk}(t) & \dots & x'_{jn}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1}(t) & \dots & x_{nk}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}.$$

Отсюда, так как

$$x'_{jk}(t) = \sum_{s=1}^n a_{js}(t) x_{sk}(t) \quad (j, k = 1, \dots, n),$$

в силу известных свойств определителя получаем

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= \sum_{j=1}^n \sum_{s=1}^n a_{js}(t) \begin{vmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{1k}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{s1}(t) & \dots & x_{sk}(t) & \dots & x_{sn}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1}(t) & \dots & x_{nk}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^n a_{js}(t) \delta_{js} W(t) = W(t) \sum_{j=1}^n a_{jj}(t), \end{aligned}$$

т. е.

$$\frac{dW}{dt} = \text{Sp } A(t) W(t).$$

Следовательно,

$$\frac{dW}{W(t)} = \text{Sp } A(t) dt.$$

Интегрируя последнее уравнение в пределах от  $t_0$  до  $t$ , где  $t_0 \in I^+$  и  $t \in I^+$ , приходим к формуле *Остроградского—Лиувилля* (см. [9]—[11])

$$W(t) = W(t_0) \exp \int_{t_0}^t \text{Sp } A(t_1) dt_1, \quad (2.3.2)$$

## § 4. Матрицант

Рассмотрим линейную однородную дифференциальную систему

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t) \mathbf{x}, \quad (2.4.1)$$

где  $A(t) \in C(I^+)$ . Пусть  $t_0 \in I^+$  и  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  — решение системы (2.4.1), определяемое начальным условием

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (2.4.2)$$

где  $\mathbf{x}_0$  — некоторый вектор-столбец. Для аналитического представления решения  $\mathbf{x}(t)$  применим *метод последовательных приближений* в специальной форме. Из уравнения (2.4.1) с учетом (2.4.2) получаем интегральное уравнение

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t A(t_1) \mathbf{x}(t_1) dt_1.$$

Заменяя в последнем интеграле  $\mathbf{x}(t_1)$  суммой

$$\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} A(t_2) \mathbf{x}(t_2) dt_2,$$

будем иметь

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t A(t_1) \mathbf{x}(t_0) dt_1 + \int_{t_0}^t A(t_1) dt_1 \int_{t_0}^{t_1} A(t_2) \mathbf{x}(t_2) dt_2.$$

Повторяя этот процесс неограниченное число раз, получим *формальное представление решения*

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t A(t_1) \mathbf{x}(t_0) dt_1 + \int_{t_0}^t A(t_1) dt_1 \int_{t_0}^{t_1} A(t_2) \mathbf{x}(t_2) dt_2 + \dots$$

или

$$\mathbf{x}(t) = \mathcal{Q}_{t_0}^t \mathbf{x}(t_0), \quad (2.4.3)$$

где

$$\mathcal{Q}_{t_0}^t = E + \int_{t_0}^t A(t_1) dt_1 + \int_{t_0}^t A(t_1) dt_1 \int_{t_0}^{t_1} A(t_2) dt_2 + \dots \quad (2.4.4)$$

Матрица  $\mathcal{Q}_{t_0}^t$  называется *матрицантом* дифференциальной системы (2.4.1). Покажем, что ряд (2.4.4) сходится абсолютно для всякого  $t \in I^+$ , причем сходимость равномерна на каждом конечном отрезке  $[\alpha, \beta] \subset I^+$ .

Действительно, оценивая члены ряда (2.4.4) по первой норме (см. формулу (1.11.2)), получим ряд

$$\|E\| + \int_{t_0}^t \|A(t_1)\| |dt_1| + \int_{t_0}^t \|A(t_1)\| |dt_1| \int_{t_0}^{t_1} \|A(t_2)\| |dt_2| + \dots (2.4.5)$$

Пусть  $[\alpha, \beta] \subset [t_0 - A, t_0 + B] \subset I^+$  ( $A > 0, B > 0$ ) (рис. 6),  $C = \max(A, B)$  и  $M = \max_{t_0 - A \leq t \leq t_0 + B} \|A(t)\|$ .

При  $t \in [\alpha, \beta]$  последовательно имеем

$$\int_{t_0}^t \|A(t_1)\| |dt_1| \leq M |t - t_0|;$$

$$\int_{t_0}^t \|A(t_1)\| |dt_1| \int_{t_0}^{t_1} \|A(t_2)\| |dt_2| \leq M^2 \int_{t_0}^t |t_1 - t_0| |dt_1| \leq \frac{M^2}{2!} |t - t_0|^2;$$

.....

Так как  $|t - t_0| \leq C$ , то, следовательно, ряд (2.4.5) мажорируется сходящимся знакоположительным рядом

$$\|E\| + MC + \frac{M^2 C^2}{2!} + \dots = \|E\| - 1 + \exp(MC). (2.4.6)$$

Отсюда на основании известного признака Вейерштрасса получаем, что знакоположительный функциональный ряд (2.4.5) сходится

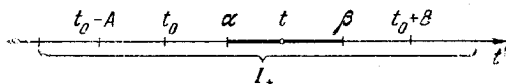


Рис. 6.

равномерно на любом отрезке  $[\alpha, \beta] \subset I^+$ . Следовательно, матричный ряд (2.4.4) также сходится абсолютно и равномерно на  $[\alpha, \beta]$ .

Дифференцируя почленно ряд (2.4.4), получаем равномерно сходящийся на  $[\alpha, \beta]$  ряд

$$\frac{dQ_{t_0}^t}{dt} = A(t) + A(t) \int_{t_0}^t A(t_2) dt_2 +$$

$$+ A(t) \int_{t_0}^t A(t_2) dt_2 \int_{t_0}^{t_2} A(t_3) dt_3 + \dots \equiv A(t) Q_{t_0}^t;$$

кроме того,

$$Q_{t_0}^{t_0} = E.$$

Следовательно, матрицант  $\Omega_{t_0}^t$  представляет собой *нормированную фундаментальную матрицу* однородной дифференциальной системы (2.4.1), причем любое решение этой системы  $x(t)$  выражается по формуле (2.4.3).

В силу свойства единственности решений линейной дифференциальной системы имеет место тождество

$$\Omega_{t_0}^t \equiv K(t, t_0),$$

где  $K(t, t_0)$  — матрица Коши.

Формулы (2.4.3) и (2.4.4) впервые были получены итальянским математиком Пеано. На основании теоремы единственности получаем основное свойство матрицанта

$$\Omega_{t_1}^t \Omega_{t_0}^{t_1} = \Omega_{t_0}^t \quad (t_0, t_1, t \in I^+).$$

## § 5. Метод вариации произвольных постоянных Лагранжа

Для неоднородной дифференциальной системы

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + f(t) \quad (2.5.1)$$

будем искать решение в виде

$$y = X(t)u, \quad (2.5.2)$$

где  $X(t)$  — фундаментальная матрица соответствующей однородной системы

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \quad (2.5.3)$$

и  $u = u(t)$  — новая неизвестная вектор-функция. Подставляя выражение (2.5.2) в уравнение (2.5.1), получим

$$X(t) \frac{du}{dt} + \dot{X}(t)u = A(t)X(t)u + f(t),$$

или так как

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t),$$

то отсюда будем иметь

$$X(t) \frac{du}{dt} = f(t).$$

Следовательно,

$$u(t) = c + \int_{t_0}^t X^{-1}(t_1) f(t_1) dt_1.$$



Поэтому на основании формулы (2.5.2) находим (см. [6], [12])

$$\mathbf{y}(t) = X(t) \mathbf{c} + \int_{t_0}^t K(t, t_1) \mathbf{f}(t_1) dt_1, \quad (2.5.4)$$

где

$$K(t, t_1) = X(t) X^{-1}(t_1)$$

— матрица Коши. Для определения произвольного постоянного вектора  $\mathbf{c}$  в формуле (2.5.4) положим  $t = t_0$ . Тогда будем иметь

$$\mathbf{c} = X^{-1}(t_0) \mathbf{y}(t_0)$$

и, следовательно,

$$\mathbf{y}(t) = K(t, t_0) \mathbf{y}(t_0) + \int_{t_0}^t K(t, t_1) \mathbf{f}(t_1) dt_1. \quad (2.5.5)$$

В частности, если фундаментальная матрица  $X(t)$  нормирована при  $t = t_0$ , т. е.  $X(t_0) = E$ , то из формулы (2.5.5) получим

$$\mathbf{y}(t) = X(t) \mathbf{y}(t_0) + \int_{t_0}^t K(t, t_1) \mathbf{f}(t_1) dt_1.$$

Из формулы (2.5.5) вытекает, что неоднородная система (2.5.1) имеет частное решение

$$\tilde{\mathbf{y}}(t) = \int_{t_0}^t K(t, t_1) \mathbf{f}(t_1) dt_1,$$

удовлетворяющее условию  $\tilde{\mathbf{y}}(t_0) = \mathbf{0}$ .

Заметим, что если матрица  $A(t) = A$  постоянна и  $X(t_0) = E$ , то

$$X(t) X^{-1}(t_1) \quad \text{и} \quad X(t - t_1 + t_0)$$

представляют собой фундаментальные матрицы однородной системы (2.5.3), совпадающие при  $t = t_1$ . Поэтому

$$X(t) X^{-1}(t_1) \equiv X(t - t_1 + t_0).$$

Следовательно, полагая  $t_0 = 0$ , получаем, что дифференциальная система

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A\mathbf{y} + \mathbf{f}(t), \quad (2.5.6)$$

где  $A = \text{const}$ , имеет общее решение

$$\mathbf{y}(t) = X(t) \mathbf{y}(0) + \int_0^t X(t - t_1) \mathbf{f}(t_1) dt_1. \quad (2.5.7)$$

В частности, при  $y(0) = 0$  получим, что неоднородная система (2.5.6) обладает частным решением

$$\tilde{y}(t) = \int_0^t X(t-t_1) f(t_1) dt_1.$$

## § 6. Общие теоремы об устойчивости линейных дифференциальных систем

Рассмотрим линейную дифференциальную систему

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + f(t), \quad (2.6.1)$$

где  $A(t), f(t) \in C(I^+)$ , и пусть

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \quad (2.6.2)$$

— соответствующая однородная система.

**Определение 1.** Линейную систему (2.6.1) будем называть *устойчивой* (или *вполне неустойчивой*), если все ее решения  $y = y(t)$  соответственно устойчивы (или неустойчивы) по Ляпунову при  $t \rightarrow +\infty$ .

**Замечание.** Как мы увидим ниже, решения линейных дифференциальных систем либо все одновременно устойчивы, либо неустойчивы. Подобная терминология не применима к нелинейным дифференциальным системам, некоторые решения которых могут быть устойчивыми, а другие — неустойчивыми.

**Теорема 1.** Для устойчивости линейной системы (2.6.1) при любом свободном члене  $f(t)$  необходимо и достаточно, чтобы было устойчивым тривиальное решение  $x_0 \equiv 0$  ( $t_0 < t < \infty$ ,  $t_0 \in I^+$ ) соответствующей однородной системы (2.6.2).

**Доказательство.** 1) Докажем сначала необходимость условия теоремы. Пусть  $\eta = \eta(t)$  ( $t_0 \leq t < \infty$ ) есть некоторое устойчивое решение неоднородной системы (2.6.1). Это значит, что для каждого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что для любого решения  $y = y(t)$  системы (2.6.1) при  $t_0 \leq t < \infty$  справедливо неравенство

$$\|y(t) - \eta(t)\| < \varepsilon, \quad (2.6.3)$$

если только

$$\|y(t_0) - \eta(t_0)\| < \delta. \quad (2.6.4)$$

Но, как известно,

$$x(t) = y(t) - \eta(t) \quad (2.6.5)$$

является решением линейной однородной системы (2.6.2), причем любое ее решение  $x(t)$  может быть представлено в виде (2.6.5).

Таким образом, неравенства (2.6.3) и (2.6.4) эквивалентны следующим:

$$\|x(t)\| < \varepsilon \quad \text{при} \quad t_0 \leq t < \infty,$$

если только  $\|x(t_0)\| < \delta$ .

Отсюда вытекает, что тривиальное решение  $x_0 \equiv 0$  соответствующей однородной системы (2.6.2) устойчиво по Ляпунову при  $t \rightarrow \infty$ .

**З а м е ч а н и е 1.** Из доказательства следует, что устойчивость тривиального решения  $x_0 \equiv 0$  однородной системы (2.6.2) вытекает из устойчивости хотя бы одного решения линейной системы (2.6.1) при каком-нибудь свободном члене  $f(t)$  (может быть,  $f(t) \equiv 0$ !).

2) Докажем теперь достаточность условия теоремы. Пусть тривиальное решение  $x_0 \equiv 0$  однородной системы (2.6.2) устойчиво по Ляпунову при  $t \rightarrow \infty$ . Тогда, если  $x = x(t)$  ( $t_0 \leq t < \infty$ ) — произвольное решение однородной системы такое, что

$$\|x(t)\| < \delta(\varepsilon, t_0),$$

то

$$\|x(t)\| < \varepsilon \quad \text{при} \quad t_0 \leq t < \infty.$$

Следовательно, если  $\eta(t)$  — некоторое решение линейной неоднородной системы (2.6.1) и  $y(t)$  — произвольное решение этой системы, то из неравенства

$$\|y(t_0) - \eta(t_0)\| < \delta$$

будет вытекать неравенство

$$\|y(t) - \eta(t)\| < \varepsilon \quad \text{при} \quad t_0 \leq t < \infty.$$

А это и значит, что решение  $\eta(t)$  устойчиво при  $t \rightarrow \infty$ .

**С л е д с т в и е 1.** *Линейная дифференциальная система устойчива, когда устойчиво хотя бы одно решение этой системы, и вполне неустойчива, если неустойчиво некоторое решение ее.*

Это утверждение непосредственно вытекает из теоремы 1 и замечания 1 к ней.

**С л е д с т в и е 2.** *Линейная неоднородная дифференциальная система устойчива тогда и только тогда, когда устойчива соответствующая однородная дифференциальная система.*

**З а м е ч а н и е 2.** Таким образом, поведение решений линейной неоднородной системы (2.6.1) с любым свободным членом  $f(t)$  в смысле устойчивости такое же, как поведение решений соответствующей однородной системы (2.6.2).

Действительно, для неоднородной системы (2.6.1) поле интегральных кривых

$$\mathbf{v}(t) = \tilde{\mathbf{y}}(t) + X(t)\mathbf{c}, \quad (2.6.6)$$

где  $\tilde{\mathbf{y}}(t)$  — частное решение системы (2.6.1) и  $X(t)$  — фундаментальная матрица решений однородной системы (2.6.2), топологически эквивалентно (с сохранением близости) полю интегральных кривых

$$\mathbf{x}(t) = X(t)\mathbf{c}$$

соответствующей однородной системы (2.6.2); разница только та, что в первом случае «ось»  $\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{y}}(t)$ , вообще говоря, криволинейна (рис. 7), а во втором случае ось  $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$  прямолинейна (рис. 8).

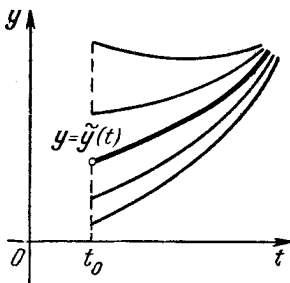


Рис. 7.

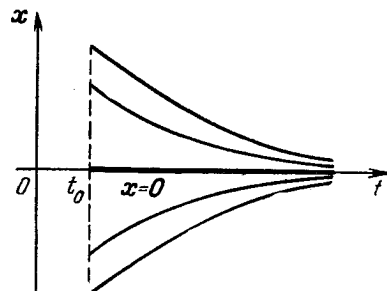


Рис. 8.

Поэтому в дальнейшем мы ограничимся изучением устойчивости лишь однородных линейных дифференциальных систем.

**Определение 2.** Линейную дифференциальную систему (2.6.1) назовем *равномерно устойчивой*, если все решения  $\mathbf{y}(t)$  этой системы равномерно устойчивы при  $t \rightarrow +\infty$  относительно начального момента  $t_0 \in I^+$  (§ 3).

**Теорема 2.** *Линейная дифференциальная система (2.6.1) равномерно устойчива тогда и только тогда, когда тривиальное решение  $\mathbf{x}_0 \equiv \mathbf{0}$  соответствующей однородной системы (2.6.2) равномерно устойчиво при  $t \rightarrow +\infty$ .*

Доказательство проводится с помощью рассуждений, аналогичных тем, которые были применимы при доказательстве теоремы 1.

**Определение 3.** Линейную дифференциальную систему (2.6.1) назовем *асимптотически устойчивой*, если все решения  $\mathbf{y}(t)$  этой системы асимптотически устойчивы при  $t \rightarrow +\infty$ .

**Теорема 3.** *Линейная дифференциальная система (2.6.1) асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда три-*

виальное решение  $\mathbf{x}_0 \equiv \mathbf{0}$  соответствующей однородной системы (2.6.2) асимптотически устойчиво при  $t \rightarrow +\infty$ .

Доказательство этой теоремы непосредственно вытекает из того обстоятельства, что разность двух решений линейной неоднородной системы есть решение соответствующей однородной системы (формула (2.6.5)).

**Следствие.** Для асимптотической устойчивости линейной неоднородной дифференциальной системы (2.6.1) при любом свободном члене  $\mathbf{f}(t)$  необходимо и достаточно, чтобы была асимптотически устойчивой соответствующая однородная система (2.6.2).

## § 7. Устойчивость линейных однородных дифференциальных систем

Рассмотрим однородную систему

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t)\mathbf{x}, \quad (2.7.1)$$

где  $A(t) \in C(I^+)$ .

Покажем, что устойчивость системы (2.7.1) эквивалентна ограниченности всех ее решений.

**Теорема 1.** *Линейная однородная дифференциальная система (2.7.1) устойчива по Ляпунову тогда и только тогда, когда каждое решение  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  ( $t_0 \leq t < \infty$ ,  $t_0 \in I^+$ ) этой системы ограничено на полуоси  $t_0 \leq t < \infty$ .*

**Доказательство.** 1) Докажем сначала, что ограниченность решений линейной однородной системы достаточна для ее устойчивости.

Пусть любое решение системы (2.7.1) ограничено на  $[t_0, \infty) \subset I^+$ . Рассмотрим нормированную фундаментальную матрицу

$$X(t) = [x_{jk}(t)],$$

где  $X(t_0) = E$ . Так как матрица  $X(t)$  состоит из ограниченных функций  $x_{jk}(t)$ , то она ограничена, т. е.

$$\|X(t)\| \leq M \text{ при } t_0 \leq t < \infty,$$

где  $M$  — некоторая положительная постоянная, зависящая, вообще говоря, от  $t_0$ .

Как известно (2.2.10), каждое решение  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  системы (2.7.1) может быть представлено в виде произведения

$$\mathbf{x}(t) = X(t)\mathbf{x}(t_0).$$

Отсюда получаем

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \|X(t)\| \|\mathbf{x}(t_0)\| \leq M \|\mathbf{x}(t_0)\| < \varepsilon,$$

если только

$$\|\mathbf{x}(t_0)\| < \frac{\varepsilon}{M} = \delta.$$

Следовательно, тривиальное решение  $x_0 \equiv 0$ , а значит, в силу теоремы 1 из § 6 и любое решение системы (2.7.1) устойчиво по Ляпунову при  $t \rightarrow +\infty$ .

Таким образом, система (2.7.1) устойчива.

2) Докажем теперь, что ограниченность решений линейной однородной системы необходима для ее устойчивости.

Пусть система (2.7.1) допускает неограниченное на  $[t_0, \infty)$  решение  $z(t)$ , где, очевидно,  $z(t_0) \neq 0$ . Фиксируя два положительных числа  $\varepsilon > 0$  и  $\delta > 0$ , рассмотрим решение

$$x(t) = \frac{z(t)}{\|z(t_0)\|} \frac{\delta}{2}.$$

Очевидно,

$$\|x(t_0)\| = \frac{\delta}{2} < \delta,$$

причем в силу неограниченности  $z(t)$  для некоторого момента  $t_1 > t_0$  имеем

$$\|x(t_1)\| = \frac{\|z(t_1)\|}{\|z(t_0)\|} \frac{\delta}{2} > \varepsilon.$$

Таким образом, тривиальное решение  $x_0 \equiv 0$  системы (2.7.1) неустойчиво по Ляпунову при  $t \rightarrow +\infty$ , а следовательно, на основании теоремы 1 из § 6, система (2.7.1) также вполне неустойчива.

Заметим, что здесь неустойчивость системы обнаруживается в усиленной форме, так как положительное число  $\varepsilon$  произвольно.

*Следствие.* Если неоднородная линейная дифференциальная система устойчива, то все ее решения или ограничены, или не ограничены при  $t \rightarrow +\infty$ .

*Пример.* Скалярное уравнение

$$\frac{dy}{dt} = 1 + t - y$$

допускает неограниченное решение  $y_0 = t$ . Так как

$$y(t) = t + y(0)e^{-t},$$

то решение  $y_0$ , очевидно, устойчиво и даже асимптотически.

*Замечание.* Для нелинейной дифференциальной системы из ограниченности ее решений, вообще говоря, не следует устойчивость их.

*Пример.* Рассмотрим скалярное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \sin^2 x.$$

Интегрируя, будем иметь (рис. 9)

$$x = \text{Arcctg}(\text{ctg } x_0 - t) \text{ при } x_0 \neq k\pi \quad (2.7.2)$$

и

$$x = k\pi \text{ при } x_0 = k\pi \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (2.7.3)$$

Все решения (2.7.2) и (2.7.3), очевидно, ограничены на  $(-\infty, +\infty)$ .

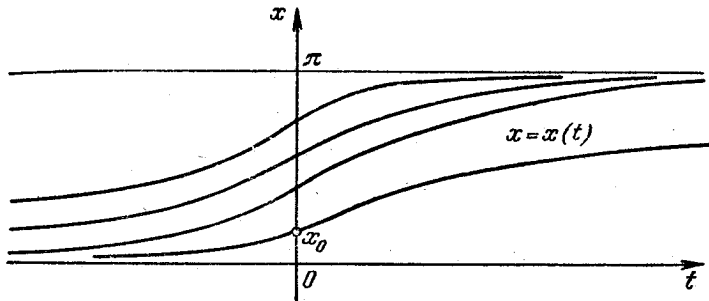


Рис. 9.

Однако решение  $x_0 = 0$  неустойчиво при  $t \rightarrow +\infty$ , так как при любом  $x_0 \in (0, \pi)$  имеем

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x = \pi.$$

**Теорема 2.** *Линейная однородная дифференциальная система (2.7.1) асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда все ее решения  $x = x(t)$  стремятся к нулю при  $t \rightarrow +\infty$ , т. е.*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0. \quad (2.7.4)$$

**Доказательство.** 1) Пусть система (2.7.1) асимптотически устойчива при  $t \rightarrow +\infty$ . Тогда все ее решения, в том числе тривиальное  $x_0 \equiv 0$ , асимптотически устойчивы при  $t \rightarrow +\infty$ . Следовательно (см. § 1, определение 4), для любого решения  $\xi(t)$  системы (2.7.1) имеем

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \xi(t) = 0,$$

если только  $\|\xi(t_0)\| < \Delta$ , где  $t_0 \in I^+$  произвольно.

Рассмотрим произвольное решение  $x(t)$ , определяемое начальным условием  $x(t_0) = x_0 \neq 0$ . Положим

$$x(t) = \xi(t) \frac{\|x(t_0)\|}{\frac{1}{2}\Delta},$$

где

$$\xi(t) = \frac{x(t)}{\|x(t_0)\| \frac{\Delta}{2}}.$$

Так как решение  $\xi(t)$ , очевидно, удовлетворяет условию

$$\|\xi(t_0)\| = \frac{\Delta}{2} < \Delta,$$

то для него справедливо соотношение (2.7.5). Следовательно,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}.$$

Таким образом, необходимость условия теоремы доказана.

2) Пусть условие (2.7.4) выполнено. Тогда для каждого решения  $\mathbf{x}(t)$  ( $t_0 \leq t < \infty$ ) будем иметь

$$\|\mathbf{x}(t)\| < 1 \text{ при } T < t < \infty.$$

Так как на конечном отрезке  $[t_0, T]$  непрерывная вектор-функция  $\mathbf{x}(t)$  ограничена, то любое решение  $\mathbf{x}(t)$  ограничено на полупрямой  $[t_0, \infty)$  и, следовательно, на основании теоремы 1 система (2.7.1) устойчива, причем ее тривиальное решение асимптотически устойчиво. Отсюда в силу теоремы 3 из § 6 вытекает асимптотическая устойчивость системы (2.7.1).

*Следствие. Асимптотически устойчивая линейная дифференциальная система асимптотически устойчива в целом* (§ 1, определение 5).

*Замечание.* Для нелинейной дифференциальной системы стремление к нулю всех решений, вообще говоря, не является достаточным условием для асимптотической устойчивости тривиального решения ее.

*Пример.* Рассмотрим систему

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{x}{t} - t^2 xy^2, \\ \frac{dy}{dt} &= -\frac{y}{t} \\ (t &\geq 1), \end{aligned} \right\}$$

допускающую тривиальное решение  $x = 0, y = 0$ . Интегрируя, получим

$$\left. \begin{aligned} x &= c_1 t e^{-c_2^2 t}, \\ y &= \frac{c_3}{t} \end{aligned} \right\}$$

или, полагая  $t_0 = 1$ , будем иметь

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= x(t_0) t e^{-y^2(t_0)(t-1)}, \\ y(t) &= \frac{y(t_0)}{t}. \end{aligned} \right\}$$

Очевидно,

$$x(t) \rightarrow 0 \text{ и } y(t) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow +\infty.$$



Однако для любого  $\delta > 0$  при  $x(t_0) = \delta^2$ ,  $y(t_0) = \delta$  будем иметь  $x\left(1 + \frac{1}{\delta^2}\right) > e^{-1}$ .

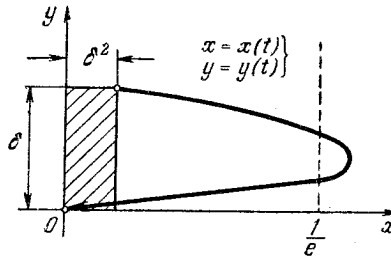


Рис. 10.

Следовательно, решение  $x = 0$ ,  $y = 0$  не является устойчивым, а тем более асимптотически устойчивым при  $t \rightarrow +\infty$  (рис. 10).

### § 8. Устойчивость линейной дифференциальной системы с постоянной матрицей

Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad (8.1)$$

где  $A = [a_{jk}]$  — постоянная  $(n \times n)$ -матрица.

Положим

$$x = e^{At}u;$$

тогда, учитывая свойства экспоненциала матрицы (гл. I, § 14), будем иметь

$$\frac{dx}{dt} \equiv e^{At} \frac{du}{dt} + Ae^{At}u = Ae^{At}u,$$

или

$$e^{At} \frac{du}{dt} = 0. \quad (2.8.2)$$

Так как  $\det e^{At} = e^{t \operatorname{Sp} A} \neq 0$ , то матрица  $e^{At}$  неособенная. Поэтому из (2.8.2) получаем

$$\frac{du}{dt} = 0$$

и, следовательно,

$$u = c,$$

где  $c$  — постоянная  $(n \times 1)$ -матрица.

Таким образом, общее решение системы (2.8.1) с постоянной матрицей  $A$  есть

$$\mathbf{x} = e^{At} \mathbf{c}. \quad (2.8.3)$$

Пусть  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ . Из формулы (2.8.3) имеем

$$\mathbf{x}_0 = e^{At_0} \mathbf{c},$$

т. е.

$$\mathbf{c} = e^{-At_0} \mathbf{x}_0,$$

и, значит,

$$\mathbf{x} = e^{A(t-t_0)} \mathbf{x}_0. \quad (2.8.4)$$

Пусть  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  ( $m \leq n$ ) — собственные значения матрицы  $A$ , отвечающие различным клеткам Жордана, и  $e_1, \dots, e_m$  — соответствующие им порядки клеток Жордана. Обозначим через  $S$  неособенную матрицу, приводящую матрицу  $A$  к жордановой форме:

$$A = S^{-1} \text{diag} [J_1(\lambda_1), \dots, J_m(\lambda_m)] S,$$

где  $J_p(\lambda_p)$  ( $p = 1, \dots, m$ ) — соответствующие клетки Жордана. Тогда на основании свойств экспоненциала (гл. I, § 13) из формулы (2.8.4) получаем

$$\mathbf{x}(t) = S^{-1} \text{diag} [\exp(t-t_0) J_1(\lambda_1), \dots, \exp(t-t_0) J_m(\lambda_m)] S \mathbf{x}(t_0), \quad (2.8.5)$$

где

$$\begin{aligned} \exp[(t-t_0) J_p(\lambda_p)] &= \\ &= e^{\lambda_p(t-t_0)} \left[ E_{e_p} + \frac{(t-t_0)}{1!} I_1^{(p)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(t-t_0)^2}{2!} I_2^{(p)} + \dots + \frac{(t-t_0)^{e_p-1}}{(e_p-1)!} I_{e_p-1}^{(p)} \right], \end{aligned}$$

где  $I_j^{(p)}$  ( $j = 1, \dots, e_p - 1$ ) — соответствующие единичные косые ряды.

**Теорема 1.** *Линейная однородная система (2.8.1) с постоянной матрицей  $A$  устойчива тогда и только тогда, когда все характеристические корни  $\lambda_j = \lambda_j(A)$  матрицы  $A$  обладают ненулевыми вещественными частями*

$$\text{Re } \lambda_j(A) \leq 0 \quad (j = 1, \dots, n),$$

*причем характеристические корни, имеющие нулевые вещественные части, допускают лишь простые элементарные делители (т. е. соответствующие клетки Жордана сводятся к одному элементу).*

**Доказательство.** 1) Докажем сначала достаточность условий теоремы.

Пусть  $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$  ( $j = 1, \dots, p$ ;  $i = \sqrt{-1}$ ) — все характеристические корни матрицы  $A$  с отрицательными вещественными частями  $\alpha_j$ , отвечающие различным клеткам Жордана, и  $\lambda_k = i\gamma_k$  ( $k = 1, \dots, q$ ) — все характеристические корни матрицы  $A$  с нулевыми вещественными частями, причем  $p + q = m$  — общее число клеток Жордана в нормальной форме матрицы  $A$ . Тогда в силу формулы (2.8.5) любое решение системы (2.8.1) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) = & \sum_{j=1}^p e^{\alpha_j t} (\cos \beta_j t + i \sin \beta_j t) \mathbf{P}_j(t) + \\ & + \sum_{k=1}^q (\cos \gamma_k t + i \sin \gamma_k t) \mathbf{c}_k, \end{aligned} \quad (2.8.6)$$

где  $\mathbf{P}_j(t)$  — некоторые полиномиальные вектор-функции, степень которых ниже кратности корня  $\lambda_j$ , и  $\mathbf{c}_k$  — постоянные вектор-столбцы. Так как  $\alpha_j < 0$ , то

$$e^{\alpha_j t} \mathbf{P}_j(t) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow +\infty.$$

Кроме того,

$$|\cos \gamma_k t + i \sin \gamma_k t| = 1.$$

Поэтому из формулы (2.8.6) вытекает, что каждое решение  $\mathbf{x}(t)$  ограничено на полуоси  $t_0 \leq t < \infty$ .

Следовательно, на основании теоремы 1 из § 7 система (2.8.1) устойчива.

2) Докажем теперь необходимость условий теоремы (см. [17]).

Пусть система (2.8.1) устойчива. Покажем сначала, что все характеристические корни  $\lambda_j$  матрицы  $A$  имеют неположительные вещественные части. Действительно, предположим, что найдется собственное значение  $\lambda_s = \sigma + i\tau$  матрицы  $A$  такое, что

$$\operatorname{Re} \lambda_s = \sigma > 0.$$

Тогда, как известно, система (2.8.1) имеет нетривиальное решение вида

$$\xi = e^{\lambda_s t} \mathbf{c},$$

где  $\|\mathbf{c}\| \neq 0$ . Отсюда

$$\|\xi\| = |e^{\lambda_s t}| \|\mathbf{c}\| = e^{\sigma t} \|\mathbf{c}\| \rightarrow \infty \quad \text{при } t \rightarrow \infty$$

и, таким образом, решение неограниченно, что противоречит устойчивости системы. Поэтому

$$\operatorname{Re} \lambda_j \leq 0 \quad (j = 1, \dots, n). \quad (2.8.7)$$

Покажем теперь, что каждый характеристический корень  $\lambda_j$  с нулевой вещественной частью  $\operatorname{Re} \lambda_j = 0$  имеет простые элементарные делители.

В самом деле, предположим, что матрица  $A$  приведена к жордановой форме

$$A = S^{-1} \operatorname{diag} [J_1(\lambda_1), \dots, J_m(\lambda_m)] S,$$

где  $\det S \neq 0$ , причем некоторому характеристическому корню  $\lambda_s = i\mu_s$  ( $\operatorname{Re} \lambda_s = 0$ ) соответствует клетка Жордана

$$J_s(\lambda_s) = \begin{bmatrix} \lambda_s & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_s & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_s & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_s \end{bmatrix}$$

типа  $e_s \times e_s$ , где  $e_s > 1$ . Тогда

$$\Xi(t) = S^{-1} \operatorname{diag} [0, \dots, e^{tJ_s(\lambda_s)}, \dots, 0] S \quad (2.8.8)$$

будет являться матричным решением системы (2.8.1), так как

$$\begin{aligned} \dot{\Xi}(t) &= S^{-1} \operatorname{diag} [0, \dots, J_s(\lambda_s) e^{tJ_s(\lambda_s)}, \dots, 0] S = \\ &= S^{-1} \operatorname{diag} [J_1(\lambda_1), \dots, J_s(\lambda_s), \dots, J_m(\lambda_m)] S \times \\ &\quad \times S^{-1} \operatorname{diag} [0, \dots, e^{tJ_s(\lambda_s)}, \dots, 0] S = A \Xi(t). \end{aligned}$$

Из формулы (2.8.8) получаем

$$\operatorname{diag} [0, \dots, e^{tJ_s(\lambda_s)}, \dots, 0] = S \Xi(t) S^{-1}.$$

Отсюда, оценивая по норме, будем иметь

$$\begin{aligned} \|\operatorname{diag} [0, \dots, e^{tJ_s(\lambda_s)}, \dots, 0]\| &= \\ &= \|e^{tJ_s(\lambda_s)}\| \leq \|S\| \|\Xi(t)\| \|S^{-1}\|. \quad (2.8.9) \end{aligned}$$

Так как

$$e^{tJ_s(\lambda_s)} = e^{\lambda_s t} \begin{bmatrix} 1 & t & \dots & \frac{t^{e_s-1}}{(e_s-1)!} \\ 0 & 1 & \dots & \frac{t^{e_s-2}}{(e_s-2)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

то, воспользовавшись, например, первой нормой при  $t \geq 0$ , получаем

$$\|e^{tJ_s(\lambda_s)}\| = e^{\operatorname{Re} \lambda_s t} \left[ 1 + \frac{t}{1!} + \dots + \frac{t^{e_s-1}}{(e_s-1)!} \right] > \frac{t^{e_s-1}}{(e_s-1)!},$$

где  $\sigma = \operatorname{Re} \lambda_s = 0$ . Из неравенства (2.8.9) выводим

$$\|\Xi(t)\| \geq \frac{\|e^{tJ_s(\lambda_s)}\|}{\|S\| \|S^{-1}\|} > \frac{t^{\rho_s - 1}}{(e_s - 1)! \|S\| \|S^{-1}\|}$$

при  $t \geq 0$ .

Таким образом,  $\|\Xi(t)\| \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow \infty$ , что невозможно для устойчивой системы.

Теорема доказана.

**З а м е ч а н и е.** Устойчивая линейная однородная система с постоянной матрицей  $A$  равномерно устойчива относительно начального момента  $t_0 \in (-\infty, +\infty)$ .

Действительно, так как решения устойчивой линейной системы ограничены, то имеем

$$\|e^{At}\| \leq c \quad \text{при } t \geq 0.$$

Пусть  $\mathbf{x}(t)$  — произвольное решение нашей системы. Тогда

$$\mathbf{x}(t) = e^{(t-t_0)A} \mathbf{x}(t_0)$$

и, следовательно, при  $t \geq t_0$  получаем

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \|e^{(t-t_0)A}\| \|\mathbf{x}(t_0)\| \leq c \|\mathbf{x}(t_0)\| < \varepsilon,$$

если

$$\|\mathbf{x}(t_0)\| < \frac{\varepsilon}{c} = \delta,$$

причем число  $\delta$  не зависит от начального момента  $t_0$ . Таким образом, тривиальное решение  $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$  равномерно устойчиво при  $t \rightarrow \infty$ , а значит, и все решения этой системы также равномерно устойчивы при  $t \rightarrow \infty$  (§ 6, теорема 2).

**Теорема 2.** *Линейная однородная дифференциальная система (2.8.1) с постоянной матрицей  $A$  асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда все характеристические корни  $\lambda_j = \lambda_j(A)$  матрицы  $A$  имеют отрицательные вещественные части, т. е.*

$$\operatorname{Re} \lambda_j(A) < 0 \quad (j=1, \dots, n).$$

**Доказательство.** 1) Докажем сначала достаточность условия теоремы. Пусть  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  ( $m \leq n$ ) — все характеристические корни матрицы  $A$ , отвечающие различным клеткам Жордана, причем

$$\operatorname{Re} \lambda_j < 0 \quad (j=1, \dots, m). \quad (2.8.10)$$

Из формулы (2.8.5) вытекает, что каждое решение системы (2.8.1) имеет вид

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{j=1}^m e^{\lambda_j t} \mathbf{P}_j(t),$$

где  $P_j(t)$  — полиномиальные матрицы. Отсюда на основании условия (2.8.10) получаем

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$$

и, следовательно, в силу теоремы 2 из § 7 система (2.8.1) асимптотически устойчива.

2) Докажем теперь необходимость условия (2.8.10). Пусть система (2.8.1) асимптотически устойчива. Тогда эта система устойчива по Ляпунову при  $t \rightarrow \infty$ , и, следовательно, на основании теоремы 1 имеем

$$\operatorname{Re} \lambda_j \leq 0 \quad (j=1, \dots, m). \quad (2.8.11)$$

Допустим, что найдется хотя бы один характеристический корень  $\lambda_s = i\mu_s$  ( $1 \leq s \leq m$ ) такой, что

$$\operatorname{Re} \lambda_s = 0.$$

Тогда система (2.8.1) имеет решение вида

$$\xi = e^{\lambda_s t} c \equiv (\cos \mu_s t + i \sin \mu_s t) c,$$

где  $c$  — ненулевой вектор-столбец. Поэтому

$$\|\xi\| = \|c\| \neq 0$$

и, значит,  $\xi \not\rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , что противоречит асимптотической устойчивости системы (2.8.1). Следовательно,

$$\operatorname{Re} \lambda_j < 0 \quad (j=1, \dots, m).$$

Теорема доказана полностью.

**Замечание.** Таким образом, чтобы доказать асимптотическую устойчивость линейной однородной системы (2.8.1), достаточно убедиться, что все корни  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  ее векового уравнения

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

обладают отрицательными вещественными частями. В следующем параграфе мы дадим необходимые и достаточные условия, при которых алгебраическое уравнение с действительными коэффициентами имеет корни лишь с отрицательными вещественными частями.

## § 9. Критерий Гурвица

Рассмотрим полином

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n \quad (n \geq 1), \quad (2.9.1)$$

где  $z = x + iy$  — комплексное число и  $a_0, a_1, \dots, a_n$  — действительные или комплексные коэффициенты.

**Определение.** Полином  $f(z)$  степени  $n \geq 1$  называется *полиномом Гурвица*, если все его корни (нули)  $z_1, z_2, \dots, z_n$  обладают отрицательными вещественными частями

$$\operatorname{Re} z_j < 0 \quad (j = 1, \dots, n),$$

т. е. все корни  $z_j$  расположены в левой комплексной полуплоскости.

В дальнейшем мы будем предполагать, что коэффициенты  $a_0, a_1, \dots, a_n$  полинома  $f(z)$  (2.9.1) действительны, причем

$$a_0 > 0, \quad a_n \neq 0. \quad (2.9.3)$$

Такой, очевидно, не имеющий нулевых корней полином для краткости будем называть *стандартным полиномом* степени  $n$  ( $n \geq 1$ ).

Установим простое необходимое условие для полинома Гурвица.

**Теорема.** Если стандартный полином является полиномом Гурвица, то все его коэффициенты положительны.

**Доказательство.** Пусть

$$z_j = -\alpha_j \pm i\beta_j \quad (j = 1, \dots, p)$$

— комплексные корни ( $\beta_j \neq 0$ ) полинома Гурвица  $f(z)$  (2.9.1) и

$$z_k = -\gamma_k \quad (k = 1, \dots, q)$$

— действительные корни этого полинома. В силу определения полинома Гурвица имеем

$$\alpha_j > 0, \quad \gamma_k > 0. \quad (2.9.4)$$

Обозначим через  $\sigma_j$  ( $j = 1, \dots, p$ ) кратность корня  $z_j = -\alpha_j + i\beta_j$ ; тогда, так как коэффициенты полинома (2.9.1) действительны, то сопряженный корень  $\bar{z}_j = -\alpha_j - i\beta_j$  имеет ту же кратность  $\sigma_j$ . Пусть кратность действительного корня  $\gamma_k$  ( $k = 1, \dots, q$ ) есть  $s_k$ . Очевидно,

$$\sum_{j=1}^p 2\sigma_j + \sum_{k=1}^q s_k = n.$$

Пользуясь известным разложением полинома  $f(z)$  на линейные множители, имеем следующее тождество:

$$f(z) \equiv a_n \prod_{j=1}^p (z + \alpha_j - i\beta_j)^{\sigma_j} (z + \alpha_j + i\beta_j)^{\sigma_j} \prod_{k=1}^q (z + \gamma_k)^{s_k},$$

или

$$f(z) \equiv a_n \prod_{j=1}^p (z^2 + 2\alpha_j z + \alpha_j^2 + \beta_j^2)^{\sigma_j} \prod_{k=1}^q (z + \gamma_k)^{s_k}. \quad (2.9.5)$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной  $z$  в правой и левой частях тождества (2.9.5), получаем, что все

коэффициенты полинома  $f(z)$  имеют одинаковые знаки. А так как в силу условия (2.9.2)  $a_0 > 0$ , то

$$a_1 > 0, a_2 > 0, \dots, a_n > 0. \quad (2.9.6)$$

Теорема доказана.

**З а м е ч а н и е.** Легко показать, что для стандартного полинома второй степени

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 \quad (2.9.7)$$

условие теоремы является достаточным, т. е. если

$$a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0,$$

то полином (2.9.7) будет полиномом Гурвица.

Для стандартного полинома степени выше второй из положительности его коэффициентов в общем случае не вытекает, что этот полином есть полином Гурвица.

**П р и м е р.** Полином

$$f(z) = 30 + 4z + z^2 + z^3$$

имеет лишь положительные коэффициенты, но не является полиномом Гурвица, так как его корни есть  $z_1 = -3$ ,  $z_2 = 1 + 3i$ ,  $z_3 = 1 - 3i$ .

Обозначим для краткости через  $H_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) совокупность всех стандартных полиномов Гурвица степени  $n$ , и пусть

$$H = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$$

— множество всех стандартных полиномов Гурвица.

Для вывода необходимых и достаточных условий для отношения  $f(z) \in H$  введем понятие присоединенных полиномов (ср. [15]).

**О п р е д е л е н и е.** Полином

$$F(z) = Sf(z),$$

где

$$F(z) = (1 + \alpha z) f(z) + f(-z) \quad (\alpha > 0),$$

будем называть *присоединенным* к полиному  $f(z)$ .

**Л е м м а 1.** Полином, присоединенный к стандартному полиному Гурвица, есть стандартный полином Гурвица, т. е. если

$$f(z) \in H_n, \quad \text{то} \quad F(z) = Sf(z) \in H_{n+1}.$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Рассмотрим полином

$$\Phi_\mu(z) = (1 + \alpha z) f(z) + \mu f(-z), \quad (2.9.8)$$

где действительный параметр  $\mu$  пробегает отрезок  $0 \leq \mu \leq 1$ , причем

$$\Phi_1(z) = F(z).$$



Покажем, что корни  $z_j(\mu)$  ( $j=1, 2, \dots, n+1$ ) полинома  $\Phi_\mu(z)$  при  $\mu \in [0, 1]$  расположены в левой полуплоскости  $\operatorname{Re} z < 0$ , т. е. полином  $\Phi_\mu(z)$  есть полином Гурвица.

Действительно, прежде всего, полагая

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n,$$

где

$$a_0 > 0, a_1 > 0, \dots, a_n \geq 0,$$

будем иметь

$$\Phi_\mu(z) = b_0(\mu) + b_1(\mu)z + \dots + b_n(\mu)z^n + \alpha a_n z^{n+1},$$

где  $b_\nu(\mu)$  ( $\nu=0, 1, \dots, n$ ) — линейные функции параметра  $\mu$ . Отсюда, учитывая, что  $\alpha a_n > 0$ , получаем

$$|\Phi_\mu(z)| > 0 \quad \text{при} \quad |z| \geq R, \quad \mu \in [0, 1],$$

где  $R$  достаточно велико и не зависит от  $\mu$ .

Следовательно, корни  $z_j(\mu)$  заключены внутри достаточно большого конечного круга  $|z| < R$  (рис. 11) и, значит, являются ограниченными непрерывными функциями параметра  $\mu$ . При  $\mu=0$  полином  $\Phi_\mu(z)$  имеет корни, лежащие в левой полуплоскости, т. е.

$$\Phi_0(z) \in H_{n+1}.$$

Пусть теперь при некотором  $\hat{\mu} \in [0, 1]$  полином  $\Phi_{\hat{\mu}}(z)$  не является полиномом Гурвица. Тогда по меньшей мере одна из кривых  $z_j = z_j(\mu)$  покинет левую полуплоскость и, следовательно, при некотором значении  $\hat{\mu}$  пересечет отрезок мнимой оси  $[-Ri, Ri]$  (рис. 11). Иными словами, при  $\hat{\mu} \in (0, 1]$  полином  $\Phi_{\hat{\mu}}(z)$  имеет мнимый корень  $\beta i$ , т. е.

$$\Phi_{\hat{\mu}}(\beta i) \equiv (1 + \alpha \beta i) f(\beta i) + \hat{\mu} f(-\beta i) = 0.$$

Отсюда

$$|1 + \alpha \beta i| |f(\beta i)| = \hat{\mu} |f(-\beta i)|. \quad (2.9.9)$$

Так как значения полинома  $f(z)$  с действительными коэффициентами в сопряженных точках  $z$  и  $\bar{z}$  комплексно сопряжены, т. е.

$$f(\bar{z}) = \overline{f(z)},$$

то, учитывая, что коэффициенты полинома  $f(z)$  действительны и что полином  $f(z)$  есть полином Гурвица, будем иметь

$$|f(-\beta i)| = |f(\beta i)| = |\overline{f(\beta i)}| = |f(\beta i)| \neq 0.$$

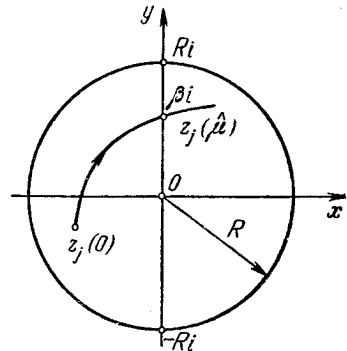


Рис. 11.

Сокращая равенство (2.9.9) на равные, отличные от нуля величины  $|f(\beta i)|$  и  $|f(-\beta i)|$ , получим

$$|1 + \alpha\beta i| = \hat{\mu},$$

т. е.

$$1 + \alpha^2\beta^2 = \hat{\mu}^2. \quad (2.9.10)$$

Так как

$$\Phi_\mu(0) = (1 + \mu) a_0 \neq 0,$$

то  $\beta \neq 0$  и поэтому равенство (2.9.10) невозможно при  $\hat{\mu} \in [0, 1]$ .  
Итак,

$$F(z) = \Phi_1(z) \in H_{n+1}.$$

*Лемма 2. Для всякого стандартного полинома Гурвица степени  $n+1$  существует стандартный полином Гурвица степени  $n$  ( $n \geq 1$ ), по отношению к которому данный полином является присоединенным, т. е. если  $F(z) \in H_{n+1}$ , то существуют  $\alpha > 0$  и  $f(z) \in H_n$  такие, что*

$$F(z) = Sf(z) \equiv (1 + \alpha z) f(z) + f(-z). \quad (2.9.11)$$

Доказательство. Из функционального уравнения (2.9.11) имеем

$$F(-z) = (1 - \alpha z) f(-z) + f(z). \quad (2.9.12)$$

Исключая  $f(-z)$  из уравнений (2.9.11) и (2.9.12), получим

$$\alpha^2 z^2 f(z) = -(1 - \alpha z) F(z) + F(-z). \quad (2.9.13)$$

Пусть

$$F(z) = A_0 + A_1 z + \dots + A_{n+1} z^{n+1}$$

и

$$F(-z) = A_0 - A_1 z + \dots + (-1)^{n+1} A_{n+1} z^{n+1},$$

где  $A_k > 0$  ( $k=0, 1, \dots, n+1$ ).

Если выбрать

$$\alpha = \frac{2A_1}{A_0} > 0, \quad (2.9.14)$$

то функция  $f(z)$ , определяемая формулой (2.9.13), очевидно, будет полиномом  $n$ -й степени. Легко проверить, что

$$Sf(z) = F(z).$$

Докажем, что  $f(z) \in H_n$ . Рассмотрим полином

$$\begin{aligned} \Phi_\mu(z) = & -(1 - \alpha z) F(z) + \mu F(-z) \equiv - (1 - \mu) A_0 + (1 - \mu) A_1 z + \\ & + [\alpha A_1 - (1 - \mu) A_2] z^2 + \dots + \{\alpha A_{n-1} - [1 - \mu (-1)^n] A_n\} z^n + \\ & + \{\alpha A_n - [1 - \mu (-1)^{n+1}] A_{n+1}\} z^{n+1} + \alpha A_{n+1} z^{n+2}, \end{aligned} \quad (2.9.15)$$

где постоянная  $\alpha$  определяется по формуле (2.9.14) и параметр  $\mu$  пробегает отрезок  $[0, 1]$ . Корни этого полинома  $z_j = z_j(\mu)$  ( $j = 1, 2, \dots, n+2$ ) являются ограниченными непрерывными функциями параметра  $\mu$  на отрезке  $[0, 1]$ . При  $\mu = 0$  один из корней  $z_{n+2} = \frac{1}{\alpha}$  находится в правой полуплоскости  $\operatorname{Re} z > 0$ , а все остальные корни  $z_j$  ( $j < n+2$ ) — в левой  $\operatorname{Re} z < 0$ . Такое расположение корней сохраняется при  $\mu \in [0, 1]$ . Действительно, если бы один из корней  $z_j$  перешел из одной полуплоскости в другую, то кривая  $z_j = z_j(\mu)$  должна была бы пересечь мнимую ось и при некотором  $\hat{\mu} \in (0, 1)$  полином  $\Phi_{\hat{\mu}}(z)$  имел бы мнимый корень  $\beta i$ , т. е.

$$-(1 - \alpha\beta i)F(\beta i) + \hat{\mu}F(-\beta i) = 0,$$

и, следовательно,

$$|1 - \alpha\beta i| |F(\beta i)| = \hat{\mu} |F(-\beta i)|, \quad (2.9.16)$$

причем  $\beta \neq 0$ , так как

$$\Phi_{\mu}(0) = -A_0(1 - \mu) \neq 0 \text{ при } \mu \neq 1.$$

Отсюда, учитывая, что  $F(z)$  — полином Гурвица, и рассуждая аналогично тому, как в лемме 1, будем иметь

$$|F(\beta i)| = |F(-\beta i)| \neq 0.$$

Поэтому из неравенства (2.9.16) выводим

$$|1 - \alpha\beta i| = \hat{\mu},$$

т. е.

$$1 + \alpha^2\beta^2 = \hat{\mu}^2,$$

что невозможно при  $\alpha > 0$  и действительном  $\beta \neq 0$ .

Из формулы (2.9.15) вытекает, что при  $\mu = 1$  полином  $\Phi_{\mu}(z)$  имеет двукратный нулевой корень. Пусть корни  $z_p(\mu) \rightarrow 0$  и  $z_q(\mu) \rightarrow 0$  при  $\mu \rightarrow 1 - 0$ . На основании известных соотношений между корнями и коэффициентами полинома при  $0 \leq \mu < 1$  получаем

$$\sum_{j=1}^{n+2} \frac{1}{z_j(\mu)} = \frac{A_1}{A_0},$$

или, переходя к действительным частям, находим

$$\sum_{j=1}^{n+2} \operatorname{Re} \frac{1}{z_j(\mu)} = \frac{A_1}{A_0}. \quad (2.9.17)$$

Отсюда следует, что один из корней  $z_p(\mu)$  и  $z_q(\mu)$  при  $0 \leq \mu < 1$  должен иметь положительную вещественную часть, так

как в противном случае, при  $\mu \rightarrow 1 - 0$ , левая часть равенства (2.9.17) стремилась бы к  $-\infty$ , а правая оставалась ограниченной и положительной, что, очевидно, невозможно. А так как  $z_{n+2}(\mu)$  есть единственный корень с положительной вещественной частью при  $0 \leq \mu < 1$ , то, полагая

$$\operatorname{Re} z_p(\mu) > 0, \quad \lim_{\mu \rightarrow 1-0} z_p(\mu) = 0,$$

получаем  $p = n + 2$ . Без нарушения общности рассуждения можно принять  $q = n + 1$  и, следовательно,

$$\lim_{\mu \rightarrow 1-0} z_{n+1}(\mu) = 0.$$

Тогда, учитывая, что

$$\alpha A_1 - (1 - \mu) A_2 \rightarrow \alpha A_1 \neq 0$$

при  $\mu \rightarrow 1 - 0$ , будем иметь

$$\lim_{\mu \rightarrow 1-0} z_j(\mu) = c_j, \quad \operatorname{Re} c_j < 0 \quad (j = 1, \dots, n). \quad (2.9.18)$$

Так как на основании формул (2.9.13) и (2.9.15) при  $\mu = 1$  имеем

$$\Phi_1(z) = \alpha^2 z^2 f(z),$$

то  $c_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) являются корнями многочлена  $f(z)$  и, следовательно,

$$f(z) \in H_n.$$

**Замечание.** Если

$$F(z) = A_0 + A_1 z + \dots + A_{n+1} z^{n+1}$$

есть стандартный полином степени  $n + 1$ , причем  $A_0 > 0$  и  $A_1 > 0$ , то на основании формул (2.9.13) и (2.9.14) получаем, что существует стандартный полином  $f(z)$  степени  $n$  такой, что

$$Sf(z) = F(z).$$

Из лемм 1 и 2 следует, что множество всех стандартных полиномов Гурвица  $H$  можно построить, исходя из совокупности стандартных полиномов  $H_1$  первой степени и последовательного применения операции присоединения  $S$ . А именно

$$\begin{aligned} H_2 &= SH_1, \\ H_3 &= SH_2 = S^2 H_1, \\ &\dots \end{aligned}$$

и

$$H = \bigcup_{p=0}^{\infty} S^p H_1.$$

Рассмотрим стандартный полином

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n, \quad (2.9.19)$$

где  $a_0 > 0$ ,  $a_n \neq 0$  ( $n \geq 1$ ).

Составим  $(n \times n)$ -матрицу Гурвица

$$M_f = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & \dots & a_n \end{bmatrix}, \quad (2.9.20)$$

где принято  $a_s = 0$  при  $s < 0$  и  $s > n$ .

**Теорема Гурвица.** Для того чтобы стандартный полином (2.9.19) являлся полиномом Гурвица, необходимо и достаточно, чтобы были положительны все главные диагональные миноры

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1 &= a_1 > 0, \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \\ \dots & \dots \dots \dots \\ \Delta_n &= a_n \Delta_{n-1} \end{aligned} \right\} \quad (2.9.21)$$

его матрицы Гурвица  $M_f$  (условие Гурвица).

**Доказательство.** 1) Докажем сначала необходимость условий Гурвица (2.9.21), т. е. покажем, что если  $f(z) \in H_n$ , то условия Гурвица (2.9.21) выполнены. Для доказательства применим метод математической индукции (см. также [15]).

При  $n = 1$  имеем

$$f(z) = a_0 + a_1 z,$$

причем если  $f(z) \in H_1$ , то  $a_0 > 0$  и  $a_1 \neq 0$ . Так как корень  $z_1 = -a_0/a_1 < 0$ , то условие Гурвица

$$\Delta_1 = a_1 > 0$$

выполнено.

Пусть теперь для всех полиномов  $f(z) \in H_n$  теорема справедлива и  $F(z) \in H_{n+1}$ . На основании леммы 2 полином  $F(z)$  можно рассматривать как присоединенный для некоторого стандартного полинома  $f(z) \in H_n$ , т. е.

$$F(z) = (1 + 2cz) f(z) + f(-z), \quad (2.9.22)$$

где

$$\alpha = 2c > 0.$$

Положим

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n,$$

где

$$a_0 > 0, a_1 > 0, \dots, a_n > 0;$$

тогда

$$F(z) = 2 \sum_{k=0}^{n+1} \left[ ca_{k-1} + \frac{1 + (-1)^k}{2} a_k \right] z^k,$$

где  $a_{-1} = a_{n+1} = 0$ .

Составляя главный диагональный минор  $k$ -го порядка матрицы Гурвица полинома  $F(z)$ , будем иметь

$$D_1 = 2ca_0 > 0$$

и

$$D_{k+1} = 2^{k+1} \begin{vmatrix} ca_0 & a_0 & 0 & 0 & \dots \\ ca_2 & ca_1 + a_2 & ca_0 & a_0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ ca_{2k} & ca_{2k-1} + a_{2k} & ca_{2k-2} & ca_{2k-3} + a_{2k-2} & \dots \end{vmatrix} \\ (k = 1, \dots, n).$$

Отсюда, вынося за знак определителя общие множители с элементов нечетных столбцов (первого, третьего и т. д.); а затем вычитая из элементов четных столбцов (второго, четвертого и т. д.) соответствующие оставшиеся элементы нечетных и вынося за знак определителя общие множители с преобразованных элементов четных столбцов, находим

$$D_{k+1} = 2^{k+1} c^{k+1} \begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2k} & a_{2k-1} & a_{2k-2} & a_{2k-3} & \dots \end{vmatrix} = a^{k+1} a_0 \Delta_k \\ (k = 1, \dots, n),$$

где  $\Delta_k$  — главные диагональные миноры матрицы Гурвица  $M_f$  полинома  $f(z)$ .

Так как для полинома  $f(z) \in H_n$  согласно индукционному предположению выполнены условия Гурвица, то

$$\Delta_k > 0 \quad (k = 1, \dots, n).$$

Поэтому, учитывая, что  $a_0 > 0$ , имеем

$$D_{k+1} > 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n),$$

что и требовалось доказать.

2) Докажем теперь достаточность условий Гурвица, т. е. покажем, что если для стандартного полинома  $f(z)$  выполнены условия Гурвица, то  $f(z) \in H_n$ .

Для  $n=1$  теорема, очевидно, справедлива, так как если

$$f(z) = a_0 + a_1z,$$

где  $a_0 > 0$  и  $\Delta_1 = a_1 > 0$ , то корень полинома

$$z_1 = -\frac{a_0}{a_1} < 0.$$

Пусть теперь теорема верна для всех полиномов  $f(z) \in H_n$  и

$$F(z) = A_0 + A_1z + \dots + A_{n+1}z^{n+1}$$

— некоторый стандартный полином степени  $n+1$ , для которого выполнены условия Гурвица:

$$A_0 > 0, D_1 = A_1 > 0, \dots, D_{n+1} > 0.$$

В силу замечания к лемме 2 этот полином можно рассматривать как присоединенный к некоторому стандартному полиному

$$f(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$$

( $a_0 > 0, a_n \neq 0$ ) степени  $n$ . Так же как при доказательстве первой части теоремы, получаем, что главные диагональные миноры  $\Delta_k$  матрицы Гурвица  $M_f$  удовлетворяют соотношениям

$$D_{k+1} = z^{k+1}a_0\Delta_k > 0 \quad (k=1, 2, \dots, n),$$

где  $\alpha > 0$ . Отсюда

$$\Delta_k > 0 \quad (k=1, 2, \dots, n),$$

т. е. для полинома  $f(z)$  выполнены условия Гурвица. А так как по предположению теорема верна для всех стандартных полиномов степени  $n$ , то  $f(z) \in H_n$ . Таким образом, полином  $F(z)$  является присоединенным к стандартному полиному Гурвица  $f(z)$ , и, следовательно, на основании леммы 1 имеем

$$F(z) \in H_{n+1}.$$

Теорема доказана полностью.

Замечание 1. Если

$$f(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n \quad (2.9.23)$$

есть стандартный полином Гурвица, то имеем

$$f(z) = z^n g\left(\frac{1}{z}\right),$$

где

$$g(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_n \quad (2.9.24)$$

— также стандартный полином Гурвица, и обратно.

Действительно, если  $z_j$  ( $j=1, \dots, n$ ) — корни полинома (2.9.23) и  $\operatorname{Re} z_j < 0$ , то  $\frac{1}{z_j}$  ( $j=1, \dots, n$ ) — корни полинома (2.9.24)

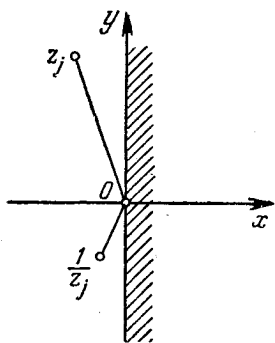


Рис. 12.

$$\operatorname{Re} \frac{1}{z_j} = \frac{\operatorname{Re} z_j}{|z_j|^2} < 0$$

(рис. 12). Поэтому условия Гурвица для полинома можно записывать также в виде

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\Delta}_0 &= a_n > 0, \\ \tilde{\Delta}_1 &= a_{n-1} > 0, \\ \tilde{\Delta}_2 &= \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n \\ a_{n-3} & a_{n-2} \end{vmatrix} > 0, \\ &\dots \\ \tilde{\Delta}_n &= a_0 \tilde{\Delta}_{n-1}. \end{aligned} \right\} \quad (2.9.25)$$

Замечание 2. Пусть

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad (2.9.26)$$

— линейная однородная система с постоянной действительной матрицей  $A = [a_{jk}]$  и

$$\det(\lambda E - A) = 0 \quad (2.9.27)$$

— характеристическое уравнение матрицы  $A$ . В раскрытом виде уравнение (2.9.27) имеет вид

$$\lambda^n - A_1 \lambda^{n-1} + A_2 \lambda^{n-2} + \dots + (-1)^n A_n = 0,$$

где

$$A_1 = \sum_{\alpha} a_{\alpha\alpha} = \operatorname{Sp} A,$$

$$A_2 = \sum_{\alpha < \beta} \begin{vmatrix} a_{\alpha\alpha} & a_{\alpha\beta} \\ a_{\beta\alpha} & a_{\beta\beta} \end{vmatrix},$$

$$\dots$$

$$A_n = \det A.$$

Для асимптотической устойчивости системы (2.9.26) необходимо выполнение следующих условий:

$$-A_1 > 0, \quad A_2 > 0, \quad \dots, \quad (-1)^n A_n > 0.$$

В частности, должно быть

$$\operatorname{Sp} A < 0, \quad (-1)^n \det A > 0. \quad (2.9.28)$$

Если система (2.9.26) — второго порядка ( $n=2$ ), то условия (2.9.28) также достаточны для ее асимптотической устойчивости.



В общем случае для асимптотической устойчивости системы (2.9.26) необходимо и достаточно выполнение условий Гурвица:

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_1 &= -A_1 > 0, \\ \tilde{\Delta}_2 &= \begin{vmatrix} -A_1 & 1 \\ -A_3 & A_2 \end{vmatrix} = -A_1 A_2 + A_3 > 0, \\ &\dots \dots \dots \\ \tilde{\Delta}_n &= (-1)^n A_n \tilde{\Delta}_{n-1} > 0. \end{aligned}$$

Пример 1. Для полинома

$$f(z) = z^3 + pz^2 + qz + r,$$

где  $p, q, r$  действительны, условия Гурвица суть

$$\left. \begin{aligned} r &> 0 \\ \Delta_1 &= q > 0, \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} q & r \\ 1 & p \end{vmatrix} > 0, \\ \Delta_3 &= 1 \cdot \Delta_2 > 0, \end{aligned} \right\}$$

т. е.

$$q > 0, \quad 0 < r < pq.$$

Таким образом, в пространстве коэффициентов область  $Orqr$  полиномов Гурвица ограничена положительной частью координатной плоскости  $r=0$  и гиперболическим параболоидом  $r=pq$  (рис. 13).

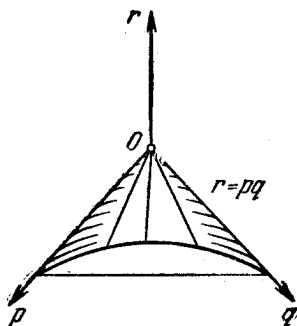


Рис. 13.

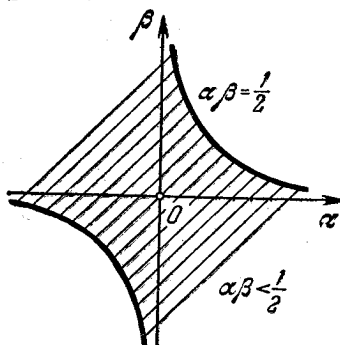


Рис. 14.

Пример 2. Определить область асимптотической устойчивости для системы

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -x + \alpha y, \\ \frac{dy}{dt} &= \beta x - y + \alpha z, \\ \frac{dz}{dt} &= \beta y - z, \end{aligned} \right\} \quad (2.9.29)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — действительные параметры.

Характеристическое уравнение для системы (2.9.29) имеет вид

$$\begin{vmatrix} \lambda + 1 & -\alpha & 0 \\ -\beta & \lambda + 1 & -\alpha \\ 0 & -\beta & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$(\lambda + 1) [\lambda^2 + 2\lambda + (1 - 2\alpha\beta)] = 0.$$

Отсюда асимптотическая устойчивость будет иметь место, если

$$1 - 2\alpha\beta > 0,$$

т. е. (рис. 14)

$$\alpha\beta < \frac{1}{2}.$$

**Замечание.** Чтобы стандартный полином

$$f(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$$

имел нули, лежащие лишь в замкнутой левой полуплоскости  $\operatorname{Re} z \geq 0$ , необходимо и достаточно, чтобы все главные диагональные миноры  $\Delta_1, \dots, \Delta_n$  его матрицы Гурвица были бы неотрицательны:

$$\Delta_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n).$$

Пусть  $A = [a_{jk}]$  — постоянная действительная матрица и  $G$  — область асимптотической устойчивости системы

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad (2.9.30)$$

в пространстве коэффициентов  $a_{jk}$ . Область  $G^* = G \cup \Gamma^*$  простой устойчивости системы (2.9.30) содержится в замкнутой области  $\bar{G} = G \cup \Gamma$ , причем  $\Gamma^*$  представляет собой часть границы  $\Gamma$ , состоящую из точек  $(a_{jk})$ , для которых характеристические корни с нулевой вещественной частью матрицы  $A$  имеют лишь простые элементарные делители («безопасная граница»). Дополнительная часть границы  $\Gamma \setminus \Gamma^*$  не входит в область  $G^*$  («опасная граница»).

## § 10. Критерий Михайлова

Если степень полинома  $f(z)$  сравнительно большая, то применение критерия Гурвица становится затруднительным ввиду необходимости подсчета определителей высоких порядков. В этом случае для определения расположения корней  $z_1, \dots, z_n$  полинома  $f(z)$  на комплексной плоскости иногда оказываются более удобными геометрические признаки, эквивалентные критерию Гурвица. Мы здесь изложим один из них, так называемый *частотный критерий А. В. Михайлова*.

Пусть

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n \quad (2.10.1)$$

— стандартный полином степени  $n$  ( $n \geq 1$ ), т. е. коэффициенты  $a_0, \dots, a_n$  действительны,  $a_0 > 0$  и  $a_n \neq 0$ . Кривая

$$\omega = f(i\omega), \quad (\Gamma)$$

где  $\omega$  — действительный положительный параметр ( $0 \leq \omega \leq +\infty$ ) и  $i = \sqrt{-1}$ , называется *годографом Михайлова* функции  $f(z)$ .

Докажем одну лемму, из которой непосредственно следует принцип Михайлова.

*Лемма.* Пусть  $f(z)$  — стандартный полином степени  $n$ , не имеющий чисто мнимых корней. Тогда угол поворота против хода часовой стрелки ненулевого вектора  $f(i\omega)$  при  $0 \leq \omega \leq +\infty$  равен

$$\Phi = \frac{\pi}{2} (n - 2m), \quad (2.10.2)$$

где  $m$  — число корней полинома  $f(z)$  с положительной вещественной частью ( $0 \leq m \leq n$ ), с учетом их кратностей.

Обратно, если справедлива формула (2.10.2), то на положительной полуплоскости  $\operatorname{Re} z > 0$  расположено точно  $m$  корней полинома  $f(z)$ , где каждый корень считается столько раз, какова его кратность.

*Доказательство.* Доказательство леммы проведем, следуя в основном А. А. Фельдбауму (см. А. А. Фельдбаум, Электрические системы автоматического регулирования, Оборонгиз, 1954, гл. VII).

1) Пусть стандартный полином  $f(z)$  (2.10.1) степени  $n$  имеет всего  $2p$  комплексно-сопряженных корней  $\alpha_j \mp i\beta_j$  ( $j = 1, \dots, p$ ;  $\alpha_j \neq 0$ ,  $\beta_j > 0$ ) и  $q$  действительных корней  $\gamma_k$  ( $k = 1, \dots, q$ ;  $\gamma_k \neq 0$ ), где каждый корень считается столько раз, какова его кратность, т. е.

$$2p + q = n.$$

В частном случае, возможно  $p = 0$  или  $q = 0$ .

Разлагая полином  $f(z)$  на линейные множители и учитывая, что ввиду действительности его коэффициентов комплексно-сопряженные множители могут быть попарно объединены, получим

$$f(z) = a_n \prod_{j=1}^p (z - \alpha_j + i\beta_j)(z - \alpha_j - i\beta_j) \prod_{k=1}^q (z - \gamma_k).$$

Отсюда

$$f(i\omega) = a_n \prod_{j=1}^p (i\omega - \alpha_j + i\beta_j)(i\omega - \alpha_j - i\beta_j) \prod_{k=1}^q (i\omega - \gamma_k). \quad (2.10.3)$$

Интересующий нас угол поворота вектора  $f(i\omega)$ , очевидно, равен

$$\Phi = \Delta_{\Gamma} \operatorname{Arg} f(i\omega),$$

где  $\Delta_{\Gamma}$  обозначает приращение соответствующей функции вдоль годографа Михайлова  $\Gamma$ , когда параметр  $\omega$  изменяется от 0 до  $+\infty$ . Так как при  $0 \leq \omega \leq +\infty$  все множители произведения (2.10.3) ненулевые, то в силу известных теорем об аргументе произведения имеем

$$\begin{aligned} \Phi_p = \Delta_{\Gamma} \operatorname{Arg} a_n + \sum_{j=1}^p \Delta_{\Gamma} [\operatorname{Arg}(i\omega - \alpha_j + i\beta_j) + \\ + \operatorname{Arg}(i\omega - \alpha_j - i\beta_j)] + \sum_{k=1}^k \Delta_{\Gamma} \operatorname{Arg}(i\omega - \gamma_k), \end{aligned} \quad (2.10.4)$$

где под  $\operatorname{Arg} z$  понимается некоторая непрерывная ветвь многозначной функции  $\arg z + 2k\pi$  ( $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$  и  $\arg z$  — главное значение аргумента:  $-\pi < \arg z \leq \pi$ ). Для определенности будем считать, что при  $\omega=0$  аргументы всех слагаемых формулы (2.10.4) равны их главным значениям.

Очевидно,

$$\Delta_{\Gamma} \operatorname{Arg} a_n = 0. \quad (2.10.5)$$

Пусть

$$\operatorname{Arg}(i\omega - \alpha_j + i\beta_j)|_{\omega=0} = \arg(-\alpha_j + i\beta_j) = \varphi_j \quad (0 < \varphi_j < \pi).$$

Тогда

$$\operatorname{Arg}(i\omega - \alpha_j - i\beta_j)|_{\omega=0} = \arg(-\alpha_j - i\beta_j) = \arg(\overline{-\alpha_j + i\beta_j}) = -\varphi_j.$$

Поэтому

$$\{\operatorname{Arg}(i\omega - \alpha_j + i\beta_j) + \operatorname{Arg}(i\omega - \alpha_j - i\beta_j)\}|_{\omega=0} = 0 \quad (j=1, \dots, p). \quad (2.10.6)$$

Так как  $\beta_j > 0$ , то при увеличении параметра  $\omega$ , как ясно из геометрических соображений,  $\operatorname{Arg}(i\omega - \alpha_j + i\beta_j)$ , оставаясь в пределах от 0 до  $\pi$ , будет монотонно возрастать, если  $\alpha_j < 0$ , и монотонно убывать, если  $\alpha_j > 0$ ; при этом

$$\begin{aligned} \operatorname{Arg}(i\omega - \alpha_j + i\beta_j)|_{\omega=+\infty} &= \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \arg(i\omega - \alpha_j + i\beta_j) = \\ &= \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \left[ \arg i\omega + \arg \left( 1 - \frac{\alpha_j - i\beta_j}{i\omega} \right) \right] = \frac{\pi}{2} \quad (j=1, \dots, p) \end{aligned} \quad (2.10.7)$$

при  $\alpha_j \neq 0$ .

Рассмотрим теперь поведение  $\text{Arg}(i\omega - \alpha_j - i\beta_j)$  при  $\omega > 0$ . Если  $\omega = \beta_j - 0 > 0$ , то получаем

$$\begin{aligned} \text{Arg}(i\omega - \alpha_j - i\beta_j)|_{\omega=\beta_j-0} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +\infty} \arg(-\alpha_j - i\varepsilon\omega) = \\ &= \begin{cases} 0 & \text{при } \alpha_j < 0, \\ \pi & \text{при } \alpha_j > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Если же  $\omega \geq \beta_j + 0$ , то в силу свойства непрерывности  $\text{Arg} z$  следует положить

$$\text{Arg}(i\omega - \alpha_j - i\beta_j) = \begin{cases} \arg(i\omega - \alpha_j - i\beta_j) & \text{при } \alpha_j < 0, \\ -2\pi + \arg(i\omega - \alpha_j - i\beta_j) & \text{при } \alpha_j > 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$\text{Arg}(i\omega - \alpha_j - i\beta_j)|_{\omega=+\infty} = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{если } \alpha_j < 0, \\ -\frac{3\pi}{2}, & \text{если } \alpha_j > 0. \end{cases} \quad (2.10.8)$$

Таким образом, из формул (2.10.7) и (2.10.8) находим

$$\begin{aligned} \{\text{Arg}(i\omega - \alpha_j + i\beta_j) + \text{Arg}(i\omega - \alpha_j - i\beta_j)\}|_{\omega=+\infty} &= \\ &= \begin{cases} \pi, & \text{если } \alpha_j < 0, \\ -\pi, & \text{если } \alpha_j > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Delta_{\Gamma} [\text{Arg}(i\omega - \alpha_j + i\beta_j) + \text{Arg}(i\omega - \alpha_j - i\beta_j)] &= \\ &= \{\text{Arg}(i\omega - \alpha_j + i\beta_j) + \text{Arg}(i\omega - \alpha_j - i\beta_j)\}|_{\omega=0}^{+\infty} = \\ &= \begin{cases} \pi, & \text{если } \alpha_j < 0, \\ -\pi, & \text{если } \alpha_j > 0 \end{cases} \quad (j=1, \dots, p). \end{aligned} \quad (2.10.9)$$

Пусть теперь  $z_k = \gamma_k$  — ненулевой действительный корень полинома  $f(z)$ . Имеем

$$\text{Arg}(i\omega - \gamma_k)|_{\omega=0} = \arg(-\gamma_k) = \begin{cases} 0, & \text{если } \gamma_k < 0, \\ \pi, & \text{если } \gamma_k > 0, \end{cases}$$

и

$$\text{Arg}(i\omega - \gamma_k)|_{\omega=+\infty} = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \arg(i\omega - \gamma_k) = \frac{\pi}{2}.$$

Поэтому

$$\Delta_{\Gamma} \text{Arg}(i\omega - \gamma_k) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{если } \gamma_k < 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{если } \gamma_k > 0 \end{cases} \quad (k=1, \dots, q). \quad (2.10.10)$$

Из формул (2.10.9) и (2.10.10) вытекает, что каждый корень с отрицательной вещественной частью стандартного полинома  $f(z)$  обеспечивает при  $0 \leq \omega \leq +\infty$  поворот вектора  $f(i\omega)$  «в среднем» на  $+\frac{\pi}{2}$ , а каждый корень этого полинома с положительной вещественной частью создает при  $0 \leq \omega \leq +\infty$  поворот вектора  $f(i\omega)$  «в среднем» на  $-\frac{\pi}{2}$ .

Пусть  $m$  — число корней нашего стандартного полинома  $f(z)$  с положительной вещественной частью. Тогда число корней этого полинома с отрицательной вещественной частью ввиду отсутствия чисто мнимых корней равно  $n - m$ . Поэтому для суммарного поворота вектора  $f(i\omega)$  при  $0 \leq \omega \leq \infty$  получаем следующее выражение:

$$\Phi = (n - m) \frac{\pi}{2} + m \left( -\frac{\pi}{2} \right) = (n - 2m) \frac{\pi}{2},$$

что и требовалось доказать.

2) Пусть теперь для стандартного полинома  $f(z)$  степени  $n$  без чисто мнимых корней угол поворота при  $0 \leq \omega \leq \infty$  вектора  $f(i\omega)$  определяется формулой (2.10.2) и  $\tilde{m}$  — число его корней с положительной вещественной частью. Тогда согласно доказанному имеем

$$\Phi = \frac{\pi}{2} (n - 2\tilde{m}). \quad (2.10.11)$$

Сравнивая формулы (2.10.11) и (2.10.2), получаем

$$\tilde{m} = m,$$

т. е. в этом случае полином  $f(z)$  имеет в точности  $m$  корней на положительной полуплоскости  $\operatorname{Re} z > 0$ .

Лемма доказана полностью.

*Критерий Михайлова. Для того чтобы стандартный полином  $f(z)$  (2.10.1), не имеющий чисто мнимых корней, являлся полиномом Гурвица, необходимо и достаточно, чтобы угол поворота против хода часовой стрелки вектора  $f(i\omega)$  при  $0 \leq \omega \leq \infty$  был бы равен*

$$\Phi = \frac{\pi}{2} n, \quad (2.10.12)$$

где  $n$  — степень полинома ( $n \geq 1$ ).

Действительно, полагая  $m = 0$  в формуле (2.10.2), получим соотношение (2.10.12).

Следствие. Если для стандартного полинома степени  $n$  имеет место неравенство

$$\Phi < \frac{\pi}{2} n,$$

то  $f(z)$  не является полиномом Гурвица.

Замечание. Если стандартный полином  $f(z)$  есть полином Гурвица степени  $n$ , то, как следует из формулы (2.10.4), вектор  $f(i\omega)$  при  $0 \leq \omega \leq \infty$  монотонно поворачивается против хода часовой стрелки на угол  $\frac{n\pi}{2}$ . Так как  $f(0) = a_0 > 0$ , то годограф  $\Gamma$  Михайлова полинома  $f(z)$ , выходя из точки  $a_0$  положительной полуоси  $\operatorname{Re} z > 0$ , при  $0 \leq \omega \leq \infty$  будет последовательно пересекать полуоси  $\operatorname{Im} z > 0$ ,  $\operatorname{Re} z < 0$ ,  $\operatorname{Im} z < 0$ , ..., проходя через  $n$  квадрантов.

Обратно, если годограф  $\Gamma$  Михайлова стандартного полинома  $f(z)$  степени  $n$  без чисто мнимых корней, выходя из точки  $f(0) = a_0 > 0$  положительной полуоси  $\operatorname{Re} z > 0$ , при  $0 < \omega \leq \infty$  последовательно по одному разу пересекает  $n - 1$  полуосей  $\operatorname{Im} z > 0$ ,  $\operatorname{Re} z < 0$ ,  $\operatorname{Im} z < 0$ , ..., асимптотически стремясь к  $n$ -й по счету полуоси, то угол поворота вектора  $f(i\omega)$ , очевидно, равен  $\frac{n\pi}{2}$  и, следовательно, полином  $f(z)$  есть полином Гурвица. На практике это обстоятельство можно проверить, построив график годографа  $\Gamma$  полинома  $f(z)$ .

Пример. Пользуясь критерием Михайлова, получить условия Гурвица для полинома

$$f(z) = z^3 + pz^2 + qz + r \quad (2.10.13)$$

( $p, q, r$  действительны). Имеем

$$f(i\omega) = (-p\omega^2 + r) + i\omega(-\omega^2 + q).$$

Отсюда точки пересечения годографа  $\Gamma$  ( $0 \leq \omega \leq \infty$ ) полинома  $f(z)$  с полуосями  $\operatorname{Re} z > 0$ ,  $\operatorname{Im} z > 0$ ,  $\operatorname{Re} z < 0$  последовательно суть  $i\omega_k$  ( $k=0, 1, 2$ ), где

$$\omega_0 = 0, \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{r}{p}}, \quad \omega_2 = \sqrt{q}.$$

Так как  $\omega_1$  и  $\omega_2$  должны быть действительны, то

$$\frac{r}{p} > 0 \quad \text{и} \quad q > 0. \quad (2.10.14)$$

Далее, имеем

$$\begin{aligned} f(i\omega_0) &= r, \\ f(i\omega_1) &= i \sqrt{\frac{r}{p}} \left( q - \frac{r}{p} \right), \\ f(i\omega_2) &= -(pq - r). \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая направления векторов  $f(i\omega_k)$  ( $k=0, 1, 2, \dots$ ) для случая полинома Гурвица, находим

$$r > 0, \quad q - \frac{r}{p} > 0, \quad pq - r > 0. \quad (2.10.15)$$

Сверх того, полагая  $\text{Arg} f(i\omega) = 0$  при  $\omega = 0$ , очевидно, получаем

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \text{Arg} f(i\omega) = \frac{3\pi}{2}.$$

Объединяя неравенства (2.10.14) и (2.10.15), получим искомые условия Гурвица:

$$p > 0, \quad q > 0, \quad 0 < r < pq, \quad (2.10.16)$$

что согласуется с результатами, полученными ранее (см. § 9, пример 1).

### § 11. Леммы Гронуолла — Беллмана и Бихари

В дальнейшем будет выгодно использовать две леммы об интегральных неравенствах (см. [6], [18]).

**Лемма Гронуолла — Беллмана.** Пусть  $u(t) \geq 0$  и  $f(t) \geq 0$  при  $t \geq t_0$  и  $u(t)$ ,  $f(t) \in C[t_0, \infty)$ , причем при  $t \geq t_0$  выполнено неравенство

$$u(t) \leq c + \int_{t_0}^t f(t_1) u(t_1) dt_1, \quad (2.11.1)$$

где  $c$  — положительная постоянная. В таком случае при  $t \geq t_0$  имеем

$$u(t) \leq c \exp \int_{t_0}^t f(t_1) dt_1. \quad (2.11.2)$$

**Доказательство.** Из неравенства (2.11.1) получаем

$$\frac{u(t)}{c + \int_{t_0}^t f(t_1) u(t_1) dt_1} \leq 1$$

и

$$\frac{f(t) u(t)}{c + \int_{t_0}^t f(t_1) u(t_1) dt_1} \leq f(t). \quad (2.11.3)$$

Так как

$$\frac{d}{dt} \left[ c + \int_{t_0}^t f(t_1) u(t_1) dt_1 \right] = f(t) u(t),$$

то, интегрируя неравенство (2.11.3) в пределах от  $t_0$  до  $t$ , будем иметь

$$\ln \left[ c + \int_{t_0}^t f(t_1) u(t_1) dt_1 \right] - \ln c \leq \int_{t_0}^t f(t_1) u(t_1) dt_1.$$



Отсюда, используя неравенство (2.11.1), получаем

$$u(t) \leq c + \int_{t_0}^t f(t_1) u(t_1) dt_1 \leq c \exp \int_{t_0}^t f(t_1) dt_1,$$

что и требовалось доказать.

*Замечание.* Переходя в формулах (2.11.1) и (2.11.2) к пределу при  $c \rightarrow +0$ , убеждаемся, что лемма остается верной, если постоянная  $c = 0$ .

*Обобщение леммы Гронуолла — Беллмана.* Пусть непрерывная положительная функция  $u(t)$  для любых значений  $t, \tau \in (a, b)$  удовлетворяет интегральному неравенству

$$u(t) \leq u(\tau) + \int_{\tau}^t f(t_1) u(t_1) dt_1, \quad (2.11.4)$$

где  $f(t) \in C(a, b)$  и  $f(t) \geq 0$  при  $a < t < b$ . Тогда при  $a < t_0 \leq t < b$  справедлива двусторонняя оценка

$$u(t_0) \exp \left[ - \int_{t_0}^t f(t_1) dt_1 \right] \leq u(t) \leq u(t_0) \exp \left[ \int_{t_0}^t f(t_1) dt_1 \right]. \quad (2.11.5)$$

*Доказательство.* Из неравенства (2.11.4) при  $t \geq \tau$  имеем

$$u(t) \leq u(\tau) + \int_{\tau}^t f(t_1) u(t_1) dt_1.$$

Отсюда на основании леммы Гронуолла — Беллмана получаем

$$u(t) \leq u(\tau) \exp \left[ \int_{\tau}^t f(t_1) dt_1 \right]. \quad (2.11.6)$$

Аналогично из неравенства (2.11.4) при  $t \leq \tau$  находим

$$u(t) \leq u(\tau) + \int_t^{\tau} f(t_1) u(t_1) dt_1.$$

Отсюда, используя метод доказательства леммы Гронуолла — Беллмана, будем иметь

$$\frac{u(t)}{u(\tau) + \int_t^{\tau} f(t_1) u(t_1) dt_1} \leq 1$$

и

$$\frac{-f(t) u(t)}{u(\tau) + \int_t^{\tau} f(t_1) u(t_1) dt_1} \geq -f(t).$$

Интегрируя последнее неравенство в пределах от  $t$  до  $\tau$ , получим

$$\ln u(\tau) - \ln \left[ u(\tau) + \int_t^\tau f(t_1) u(t_1) dt_1 \right] \geq - \int_t^\tau f(t_1) dt_1,$$

т. е.

$$u(t) \leq u(\tau) + \int_t^\tau f(t_1) u(t_1) dt_1 \leq u(\tau) \exp \int_t^\tau f(t_1) dt_1$$

Заменяя теперь  $t$  на  $\tau$  и  $\tau$  на  $t$ , из последнего неравенства при  $t \geq \tau$  находим

$$u(\tau) \leq u(t) \exp \int_\tau^t f(t_1) dt_1$$

и, следовательно,

$$u(t) \geq u(\tau) \exp \left[ - \int_\tau^t f(t_1) dt_1 \right]. \quad (2.11.7)$$

Полагая  $\tau = t_0$  в неравенствах (2.11.6) и (2.11.7), получим оценку (2.11.5).

Приведем еще одну лемму, обобщающую лемму Гронуолла — Белмана.

*Лемма Бихари (см. [18]). Пусть  $u(t) \geq 0$  и  $f(t) \geq 0$  при  $t \geq t_0$ , причем  $u(t), f(t) \in C[t_0, \infty)$  и имеет место неравенство*

$$u(t) \leq c + \int_{t_0}^t f(t_1) \Phi(u(t_1)) dt_1, \quad (2.11.8)$$

где  $c$  — положительная постоянная и  $\Phi(u)$  — положительная непрерывная неубывающая функция при  $0 < u < \bar{u}$  ( $\bar{u} \leq \infty$ ), и пусть

$$\Psi(u) = \int_c^u \frac{du_1}{\Phi(u_1)} \quad (0 < u < \bar{u}). \quad (2.11.9)$$

Тогда, если

$$\int_{t_0}^t f(t_1) dt_1 < \Psi(\bar{u} - 0) \quad (t_0 \leq t < \infty), \quad (2.11.10)$$

то при  $t_0 \leq t < \infty$  справедливо неравенство

$$u(t) \leq \Psi^{-1} \left[ \int_{t_0}^t f(t_1) dt_1 \right], \quad (2.11.11)$$

где  $\Psi^{-1}(u)$  — функция, обратная  $\Psi(u)$ .

В частности, если  $\bar{u} = \infty$  и  $\Psi(\infty) = \infty$ , то неравенство (2.11.11) выполнено без всяких ограничений.

Доказательство. В силу возрастания функции  $\Phi(u)$  из неравенства (2.11.8) получаем

$$\Phi(u(t)) \leq \Phi \left[ c + \int_{t_0}^t f(t_1) \Phi(u(t_1)) dt_1 \right]. \quad (2.11.12)$$

Отсюда

$$\frac{f(t) \Phi(u(t))}{\Phi \left[ c + \int_{t_0}^t f(t_1) \Phi(u(t_1)) dt_1 \right]} \leq f(t).$$

Интегрируя неравенство (2.11.12) по  $t$  в пределах от  $t_0$  до  $t$ , при  $t \geq t_0$  будем иметь

$$\int_{t_0}^t \frac{f(t) \Phi(u(t)) dt}{\Phi \left[ c + \int_{t_0}^t f(t_1) \Phi(u(t_1)) dt_1 \right]} \leq \int_{t_0}^t f(t_1) dt_1. \quad (2.11.13)$$

Пусть

$$\omega(t) = c + \int_{t_0}^t f(t_1) \Phi(u(t_1)) dt_1,$$

тогда

$$\omega'(t) = f(t) \Phi(u(t)).$$

Следовательно, формула (2.11.13) принимает вид

$$\int_{t_0}^t \frac{\omega'(t) dt}{\Phi[\omega(t)]} = \int_{\omega(t_0)}^{\omega(t)} \frac{d\omega}{\Phi(\omega)} \leq \int_{t_0}^t f(t_1) dt_1.$$

Отсюда на основании формулы (2.11.9), учитывая, что  $\omega(t_0) = c > 0$  и  $\omega(t) \geq c > 0$ , будем иметь

$$\Psi(\omega(t)) - \Psi(\omega(t_0)) \leq \int_{t_0}^t f(t_1) dt_1,$$

или, так как  $\Psi(\omega(t_0)) = \Psi(c) = 0$ , то

$$\Psi(\omega(t)) \leq \int_{t_0}^t f(t_1) dt_1. \quad (2.11.14)$$

Ввиду того, что

$$\Psi'(u) = \frac{1}{\Phi(u)} > 0 \text{ при } 0 < u < \bar{u},$$

функция  $v = \Psi(u)$  имеет однозначную непрерывную монотонно возрастающую обратную функцию  $u = \Psi^{-1}(v)$ , определенную в области  $\Psi(+0) < v < \Psi(\bar{u} - 0)$ , где  $\Psi(+0) < 0$ . Поэтому, если

выполнено неравенство (2.11.10), то из неравенства (2.11.14) получаем

$$c + \int_{t_0}^t f(t_1) \Phi(u(t_1)) dt_1 = \omega(t) \leq \Psi^{-1} \left[ \int_{t_0}^t f(t_1) dt_1 \right].$$

Отсюда в силу неравенства (2.11.8) вытекает искомое неравенство (2.11.11).

*Следствие 1.* Если  $\Phi(u) = u$ , то имеем неравенство Гроунолла — Беллмана (2.11.2).

*Следствие 2.* Если  $\Phi(u) = u^m$  ( $m > 0$ ,  $m \neq 1$ ), т. е. выполнено неравенство

$$u(t) \leq c + \int_{t_0}^t f(t_1) [u(t_1)]^m dt_1 \quad \text{при } t \geq t_0,$$

то

$$u(t) \leq \left[ c^{1-m} + (1-m) \int_{t_0}^t f(t_1) dt_1 \right]^{\frac{1}{1-m}} \quad \text{при } 0 < m < 1$$

и

$$u(t) \leq \frac{c}{\left[ 1 - (m-1) c^{m-1} \int_{t_0}^t f(t_1) dt_1 \right]^{\frac{1}{m-1}}} \quad (2.11.15)$$

$$\text{при } m > 1 \text{ и } \int_{t_0}^t f(t_1) dt_1 < \frac{1}{(m-1) c^{m-1}} \quad (t_0 \leq t).$$

## § 12. Устойчивость линейной дифференциальной системы с почти постоянной матрицей

*Теорема 1* (см. [6]). Пусть система

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad (2.12.1)$$

где  $A$  — постоянная ( $n \times n$ )-матрица, устойчива при  $t \rightarrow \infty$ . Тогда система

$$\frac{dy}{dt} = [A + B(t)]y, \quad (2.12.2)$$

где  $B(t) \in C[t_0, \infty)$  и

$$\int_{t_0}^{\infty} \|B(t)\| dt < \infty, \quad (2.12.3)$$

также устойчива при  $t \rightarrow \infty$ .

Доказательство. Без нарушения общности рассуждения можно считать, что  $t_0 = 0$ .

Пусть  $X(t)$  — фундаментальная матрица системы (2.12.1) такая, что  $X(0) = E$ .

Рассматривая  $B(t)y$  как свободный член в уравнении (2.12.2) и применяя метод вариации произвольных постоянных Лагранжа, получим, что каждое решение  $y(t)$  удовлетворяет интегральному уравнению

$$y(t) = X(t)y(0) + \int_0^t X(t-t_1)B(t_1)y(t_1)dt_1 \quad (t \geq 0). \quad (2.12.4)$$

Отсюда

$$\|y(t)\| \leq \|X(t)\| \|y(0)\| + \int_0^t \|X(t-t_1)\| \|B(t_1)\| \|y(t_1)\| dt_1.$$

Так как система (2.12.1) устойчива, то матрица  $X(t)$  ограничена, т. е.

$$\|X(t)\| \leq k \quad \text{при } t \geq 0.$$

Таким образом,

$$\|y(t)\| \leq k \|y(0)\| + \int_0^t k \|B(t_1)\| \|y(t_1)\| dt_1.$$

Используя лемму Гронуолла — Беллмана, будем иметь

$$\begin{aligned} \|y(t)\| &\leq k \|y(0)\| \exp \left[ k \int_0^t \|B(t_1)\| dt_1 \right] \leq \\ &\leq k \|y(0)\| \exp \left[ k \int_0^\infty \|B(t_1)\| dt_1 \right] < \infty. \end{aligned}$$

Следовательно (§ 7, теорема 1), система (2.12.2) устойчива при  $t \rightarrow \infty$ .

Пример. Пусть

$$\ddot{x} + \left( a^2 + \frac{b}{t^2} \right) x = 0 \quad (a > 0). \quad (2.12.5)$$

В силу теоремы 1 все решения  $x(t)$  уравнения (2.12.5) вместе с их производными  $\dot{x}(t)$  ограничены на полуоси  $0 < t_0 \leq t < \infty$ .

Замечание. Если матрица  $A = A(t)$  переменная, то, как показал Перрон, теорема 1 в общем случае неверна.

Теорема 2 (см. [6]). Если матрица  $A = [a_{jk}]$  постоянна и система

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad (2.12.6)$$

асимптотически устойчива при  $t \rightarrow \infty$ , то возмущенная линейная система

$$\frac{dy}{dt} = [A + B(t)]y, \quad (2.12.7)$$

где  $B(t) \in C[t_0, \infty)$  и  $B(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , также асимптотически устойчива.

Доказательство. Из асимптотической устойчивости системы (2.12.6) в силу теоремы 2 из § 8 следует, что характеристические корни  $\lambda_j(A)$  матрицы  $A$  обладают отрицательными вещественными частями. Положим

$$\alpha = \max_j \operatorname{Re} \lambda_j(A) < 0 \quad (2.12.8)$$

и выберем число  $\varepsilon > 0$  столь малым, чтобы имело место неравенство

$$\alpha + 2\varepsilon < 0. \quad (2.12.9)$$

В уравнении (2.12.7) сделаем замену переменных

$$y = e^{At}z. \quad (2.12.10)$$

Тогда

$$\frac{dy}{dt} \equiv e^{At} \frac{dz}{dt} + Ae^{At}z = [A + B(t)]e^{At}z$$

и, следовательно,

$$\frac{dz}{dt} = e^{-At}B(t)e^{At}z.$$

Переходя к интегральному уравнению, будем иметь

$$z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-A(t-\tau)}B(\tau)e^{A\tau}z(\tau) d\tau.$$

Отсюда, так как  $y(t_0) = e^{At_0}z(t_0)$ , на основании формулы (2.12.10) для решения  $y(t)$  ( $t_0 \leq t < \infty$ ) получаем интегральное уравнение

$$y(t) = e^{A(t-t_0)}y(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}B(\tau)y(\tau) d\tau.$$

Производя оценку по норме, при  $t \geq t_0$  найдем

$$\|y(t)\| \leq \|e^{A(t-t_0)}\| \|y(t_0)\| + \int_{t_0}^t \|e^{A(t-\tau)}\| \|B(\tau)\| \|y(\tau)\| d\tau.$$

Как известно (см. гл. I, § 13),

$$\|e^{tA}\| \leq c e^{(\alpha+\varepsilon)t} \quad \text{при } t \geq 0,$$

где  $c = c(\varepsilon)$  — некоторая положительная постоянная. Поэтому

$$\|y(t)\| \leq c \|y(t_0)\| e^{(\alpha+\varepsilon)(t-t_0)} + \int_{t_0}^t c e^{(\alpha+\varepsilon)(t-\tau)} \|B(\tau)\| \|y(\tau)\| d\tau,$$

или

$$e^{-(\alpha+\varepsilon)t} \|y(t)\| \leq c \|y(t_0)\| e^{-(\alpha+\varepsilon)t_0} + \int_{t_0}^t c \|B(\tau)\| e^{-(\alpha+\varepsilon)\tau} \|y(\tau)\| d\tau.$$

Отсюда, применяя лемму Гронуолла — Беллмана, будем иметь

$$e^{-(\alpha+\varepsilon)t} \|y(t)\| \leq c \|y(t_0)\| e^{-(\alpha+\varepsilon)t_0} \exp \left[ \int_{t_0}^t c \|B(\tau)\| d\tau \right];$$

следовательно,

$$\|y(t)\| \leq c \|y(t_0)\| e^{(\alpha+\varepsilon)(t-t_0) + c \int_{t_0}^t \|B(\tau)\| d\tau} \quad (2.12.11)$$

На основании обобщенного правила Лопиталья (см. [19])<sup>1)</sup> и условия теоремы получаем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_{t_0}^t \|B(\tau)\| d\tau}{t-t_0} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\|B(t)\|}{1} = 0.$$

Поэтому

$$\int_{t_0}^t \|B(\tau)\| d\tau < \varepsilon (t-t_0)$$

при  $t \geq T$ . Отсюда неравенство (2.12.11) принимает вид

$$\|y(t)\| \leq c \|y(t_0)\| e^{(\alpha+2\varepsilon)(t-t_0)}$$

<sup>1)</sup> Здесь применяется правило Лопиталья в форме Штольца: если для функций  $u(t)$  и  $v(t)$  в условиях формулы Коши существует предел частного

$$\frac{u'(t)}{v'(t)} \quad \text{при } t \rightarrow a \text{ и } v(t) \rightarrow \pm \infty \text{ при } t \rightarrow a,$$

то

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{u(t)}{v(t)} = \lim_{t \rightarrow a} \frac{u'(t)}{v'(t)}.$$

Отметим, что предположение о пределе  $u(t)$  при  $t \rightarrow a$  не делается.

при  $t > T$ , и значит, в силу (2.12.7) для любого решения  $y(t)$  системы (2.11.7) справедливо равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0.$$

Таким образом, система (2.12.7) асимптотически устойчива.

*Замечание.* Теорема 2 остается верной, если  $\|B(t)\| < k$  при  $t \geq T$ , где положительное число  $k$  достаточно мало.

*Следствие.* *Линейная система с полиномиальными коэффициентами*

$$\frac{dy}{dt} = (A_0 t^m + A_1 t^{m-1} + \dots + A_m) y,$$

где  $A_k$  ( $k=0, 1, \dots, m$ ) — постоянные  $(n \times n)$ -матрицы, асимптотически устойчива, если все корни  $\lambda_j$  ( $j=1, \dots, n$ ) векового уравнения

$$\det(A_0 - \lambda E) = 0$$

имеют отрицательные вещественные части:  $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$  ( $j=1, \dots, n$ ).

Действительно, полагая

$$\frac{1}{m+1} t^{m+1} = \tau,$$

будем иметь

$$\frac{dy}{d\tau} = [A_0 + B(\tau)] y,$$

где

$$B(\tau) = \frac{A_1}{[(m+1)\tau]^{\frac{1}{m+1}}} + \dots + \frac{A_m}{[(m+1)\tau]^{\frac{m}{m+1}}}.$$

Так как  $B(\tau) \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow \infty$ , причем  $\tau \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow \infty$ , то наше утверждение непосредственно вытекает из теоремы 2.

*Замечание.* Для линейной дифференциальной системы с переменной матрицей теорема 2, вообще говоря, неверна.

*Пример.* Скалярное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{t} \quad (t > 0),$$

имеющее общее решение

$$x = \frac{c}{t},$$

очевидно, асимптотически устойчиво при  $t \rightarrow \infty$ . Тем не менее скалярное уравнение

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y}{t},$$

коэффициент которого

$$\frac{1}{t} = -\frac{1}{t} + \frac{2}{t}$$



отличается от коэффициента первого уравнения на функцию, бесконечно малую при  $t \rightarrow \infty$ , неустойчиво при  $t \rightarrow \infty$ . Действительно, его общее решение

$$y = ct$$

не ограничено на интервале  $0 < t < \infty$ .

### § 13. Случай Лаппо-Данилевского

Рассмотрим один случай линейной системы с переменной матрицей, для которого нетрудно провести исследование устойчивости.

Положим

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x, \quad (2.13.1)$$

где  $P(t) \in C[t_0, \infty)$ .

Пусть матрица  $P(t)$  перестановочна со своим интегралом, т. е.

$$P(t) \int_{t_0}^t P(t_1) dt_1 = \int_{t_0}^t P(t_1) dt_1 \cdot P(t) \quad (2.13.2)$$

при  $t \geq t_0$  (условие Лаппо-Данилевского). Тогда

$$\Omega(t) = e^{\int_{t_0}^t P(t_1) dt_1} \quad (2.13.3)$$

представляет собой матрицант системы (2.13.1) (см. [20]). Действительно, учитывая, что

$$\frac{d}{dt} \int_{t_0}^t P(t_1) dt_1 = P(t),$$

на основании условия (2.13.2) имеем (гл. I, § 14)

$$\dot{\Omega}(t) = e^{\int_{t_0}^t P(t_1) dt_1} P(t) = P(t) e^{\int_{t_0}^t P(t_1) dt_1} = P(t) \Omega(t).$$

Кроме того,

$$\Omega(t_0) = E.$$

Таким образом, общее решение системы (2.13.1) есть

$$x(t) = \exp \int_{t_0}^t P(t_1) dt_1 \cdot x(t_0). \quad (2.13.4)$$

Пример. Если  $(2 \times 2)$ -матрица имеет вид (см. [20])

$$P(t) = \begin{bmatrix} p(t) & q(t) \\ q(t) & p(t) \end{bmatrix},$$

то условие (2.13.2), очевидно, выполнено.

Теорема. Пусть для любой пары  $(t_0, t) \in (a, \infty)$  выполнено условие (2.13.2) и существует предел

$$A = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t P(t_1) dt_1. \quad (2.13.5)$$

Тогда, если все собственные значения  $\lambda_j = \lambda_j(A)$  ( $j = 1, \dots, n$ ) предельной матрицы  $A$  расположены в левой полуплоскости, т. е.

$$\operatorname{Re} \lambda_j(A) < 0 \quad (j = 1, \dots, n), \quad (2.13.6)$$

то линейная система (2.13.1) асимптотически устойчива при  $t \rightarrow \infty$ .

Доказательство. 1) Из условия (2.13.2) при  $(t, s) \in (a, \infty)$  имеем

$$P(t) \int_s^t P(t_1) dt_1 = \int_s^t P(t_1) dt_1 \cdot P(t). \quad (2.13.7)$$

Дифференцируя равенство (2.13.7) по переменной  $s$ , получим

$$P(t) [-P(s)] = [-P(s)] \cdot P(t),$$

т. е.

$$P(t) P(s) = P(s) P(t).$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t P(t_1) dt_1 \cdot \frac{1}{s} \int_{t_0}^s P(t_2) dt_2 &= \frac{1}{s} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^s P(t_1) P(t_2) dt_2 = \\ &= \frac{1}{s} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^s P(t_2) P(t_1) dt_2 = \frac{1}{s} \int_{t_0}^s P(t_2) dt_2 \int_{t_0}^t P(t_1) dt_1. \end{aligned}$$

Переходя в последнем равенстве к пределу при  $s \rightarrow \infty$ , будем иметь

$$\int_{t_0}^t P(t_1) dt_1 \cdot A = A \cdot \int_{t_0}^t P(t_1) dt_1; \quad (2.13.8)$$

таким образом, предельная матрица  $A$  перестановочна с интегралом

$$\int_{t_0}^t P(t_1) dt_1.$$

2) Положим

$$\frac{1}{t} \int_{t_0}^t P(t_1) dt_1 = A + B(t),$$

где  $B(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Докажем, что матрицы  $A$  и  $B(t)$  перестановочны. Действительно, учитывая соотношение (2.13.8), имеем

$$\begin{aligned} A \cdot B(t) &= A \cdot \left[ \frac{1}{t} \int_{t_0}^t P(t_1) dt_1 - A \right] = \\ &= \frac{1}{t} \int_{t_0}^t P(t_1) dt_1 A - A^2 = B(t) A. \end{aligned} \quad (2.13.9)$$

На основании формулы (2.13.4) выводим, что любое решение  $\mathbf{x}(t)$  системы (2.13.1) имеет вид

$$\mathbf{x}(t) = e^{\int_{t_0}^t P(t_1) dt_1} \cdot \mathbf{x}(t_0) = e^{tA + tB(t)} \cdot \mathbf{x}(t_0).$$

Отсюда в силу перестановочности матриц  $A$  и  $B(t)$  получаем

$$\mathbf{x}(t) = e^{tA} \cdot e^{tB(t)} \cdot \mathbf{x}(t_0). \quad (2.13.10)$$

Пусть

$$\min_j \operatorname{Re} \lambda_j(A) = \alpha < 0$$

и  $\varepsilon > 0$  таково, что

$$\alpha + 2\varepsilon < 0.$$

Выберем  $T$  столь большим, чтобы выполнялось неравенство

$$\|B(t)\| < \varepsilon \quad \text{при } t \geq T > 0.$$

Из формулы (2.13.10), учитывая оценку (1.13.6) и используя первую норму, находим

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}(t)\| &\leq \|e^{tA}\| \cdot \|e^{tB(t)}\| \|\mathbf{x}(t_0)\| \leq c \cdot e^{(\alpha + \varepsilon)t} \cdot e^{t\|B(t)\|} \|\mathbf{x}(t_0)\| \leq \\ &\leq c \|\mathbf{x}(t_0)\| e^{(\alpha + 2\varepsilon)t} \quad \text{при } t \geq T. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = 0$$

и, значит, линейная система (2.13.1) асимптотически устойчива при  $t \rightarrow \infty$ .

### Упражнения к главе II

1. Методом вариации произвольных постоянных Лагранжа найти частное решение уравнения

$$\ddot{y} + 2p\dot{y} + (p^2 + q^2)y = f(t)$$

( $p, q$  — постоянные;  $f(t) \in C[0, \infty)$ ), удовлетворяющее условиям:

$$y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 0.$$

2. Доказать, что полином

$$f(z) = z^3 + pz + q$$

( $p, q$  действительны) есть полином Гурвица тогда и только тогда, когда  $p > 0$  и  $q > 0$ .

Вывести условия Гурвица для полинома  $f(z)$ , если его коэффициенты  $p$  и  $q$  — комплексные числа.

3. Пусть  $f(z)$  — стандартный полином и  $f(-\delta) > 0$  ( $\delta > 0$ ), причем для полинома

$$g(z) = f(z - \delta)$$

выполнены условия Гурвица.

Доказать, что корни  $z_j$  полинома  $f(z)$  удовлетворяют усиленному условию:

$$\operatorname{Re} z_j < -\delta.$$

4. Написать условия Гурвица для возвратного уравнения

$$z^4 + pz^3 + qz^2 + pz + 1 = 0$$

( $p$  и  $q$  действительны).

5. Найти область асимптотической устойчивости для скалярной системы

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -x + \alpha y + \beta z, \\ \frac{dy}{dt} &= -\alpha x - y + \alpha z, \\ \frac{dz}{dt} &= -\beta x - \alpha y - z \end{aligned} \right\}$$

( $\alpha$  и  $\beta$  — действительные постоянные).

6. Используя следствие теоремы 2, указать достаточные условия асимптотической устойчивости линейной скалярной системы

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (a + \alpha t)x + (b + \beta t)y, \\ \frac{dy}{dt} &= (c + \gamma t)x + (d + \delta t)y \end{aligned} \right\}$$

( $a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \delta$  — действительные постоянные).

7. Определить область устойчивости системы

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax + by, \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy \end{aligned} \right\}$$

( $a, b, c,$  и  $d$  — действительные постоянные).

8. Построить годограф Михайлова для полинома

$$f(z) = z^3 + z^2 + z + 2$$

и определить расположение его корней на комплексной плоскости.

9. Методом Михайлова вывести условия Гурвица для полинома

$$f(z) = z^3 + pz + q$$

( $p$  и  $q$  действительны).

10. Доказать аналог леммы Гронуолла. Пусть  $\varphi(t), \psi(t), \chi(t) \in C[a, b]$  и  $\chi(t) > 0$ , при  $a \leq t \leq b$ , причем

$$\varphi(t) \leq \psi(t) + \int_a^t \varphi(s) \chi(s) ds \quad (a \leq t < b),$$

Тогда

$$\varphi(t) \leq \psi(t) + \int_a^t \psi(s) \exp \left[ \int_s^t \chi(u) du \right] ds$$

при  $a \leq t \leq b$ .

11. Пусть

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad (*)$$

где  $A(t) \in C[t_0, \infty)$ .

Доказать, что

$$\|x(t_0)\| \exp \left[ - \int_{t_0}^t \|A(t_1)\| dt_1 \right] \leq \|x(t)\| \leq \|x(t_0)\| \exp \int_{t_0}^t \|A(t_1)\| dt_1,$$

при  $t \geq t_0$ .

12. Доказать, что если

$$\int_{t_0}^{\infty} \|A(t_1) + A^T(t_1)\| dt_1 < \infty,$$

то все решения действительной системы (\*) из 11 ограничены на  $[t_0, \infty)$ .

13. Доказать, что если  $a > 0$  и

$$\int_{t_0}^{\infty} \|b(t_1)\| dt_1 < \infty,$$

то все решения скалярного уравнения

$$\ddot{x} + [a + b(t)]x = 0$$

ограничены на  $[t_0, \infty)$ .

14. Доказать, что линейная система

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x$$

равномерно устойчива в области  $T < t_0 < \infty$  тогда и только тогда, когда ее матрица Коши

$$K(t, t_0) = X(t)X^{-1}(t_0)$$

ограничена в области  $Z \{t_0 \leq t < \infty, T < t_0 < \infty\}$  (Контти).

15. Пусть система

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

( $A = \text{const}$ ) устойчива.

Показать, что если

$$B(t) \in C[0, \infty) \text{ и } \int_0^{\infty} \|B(t)\| dt < \infty,$$

то система

$$\frac{dy}{dt} = [A + B(t)]y$$

равномерно устойчива в области  $[0, \infty)$ .

16. Показать, что все решения скалярной системы

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{2y}{t} \quad (t \geq 1)$$

ограничены на  $[1, \infty)$ ; однако эта система не является равномерно устойчивой в области  $1 \leq t, t_0 < \infty$ .

17. Пусть система

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x,$$

где  $A(t) \in C[t_0, \infty)$ , устойчива при  $t \rightarrow \infty$  и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \text{Sp } A(t_1) dt_1 > -\infty, \quad \int_{t_0}^{\infty} \|f(t_1)\| dt_1 < \infty.$$

Доказать, что все решения неоднородной системы

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + f(t)$$

ограничены на  $[t, \infty)$ .

18. Пусть  $A(t) \in C[t_0, \infty)$  и все решения системы

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x$$

ограничены на  $[t_0, \infty)$ , причем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \text{Sp } A(t) dt > -\infty.$$

Тогда, если

$$\int_{t_0}^{\infty} \|B(t)\| dt < \infty,$$

то все решения системы

$$\frac{dy}{dt} = [A(t) + B(t)]y$$

также ограничены на  $[t_0, \infty)$  (см. [6]).

Рассмотреть случай скалярного уравнения

$$\dot{x} + a(t)x = 0.$$

### § 1. Характеристические показатели функций

Пусть  $\varphi(t)$  — действительная функция, определенная в интервале  $t_0 < t < \infty$ . Если для некоторой последовательности  $t_k \rightarrow +\infty$  ( $k=1, 2, \dots$ ) существует конечный или бесконечный предел определенного знака

$$a = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(t_k),$$

то число  $a$  или символ  $-\infty$  ( $+\infty$ ) называется *частичным пределом* функции  $\varphi(t)$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Определение 1. Наибольший из частичных пределов  $a$  функции  $\varphi(t)$  при  $t \rightarrow \infty$  называется ее *верхним пределом*:

$$\alpha = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \varphi(t).$$

Более точно: а) если для любого отрицательного числа  $-E$  справедливо неравенство

$$\varphi(t) < -E \text{ при } t > T(E),$$

то полагают

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = -\infty;$$

б) если (рис. 15) для некоторого числа  $\alpha$  при любом  $\varepsilon > 0$  выполнено неравенство

$$\varphi(t) < \alpha + \varepsilon \text{ при } t > T(\varepsilon),$$

причем существует последовательность  $t_k \rightarrow \infty$  такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(t_k) = \alpha,$$

то считают

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \alpha;$$

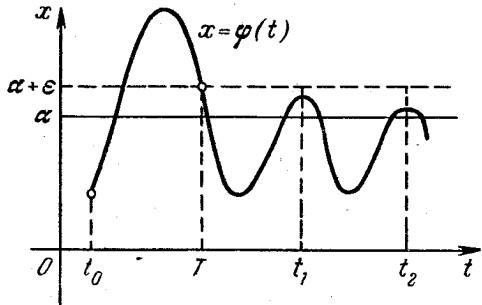


Рис. 15.

в) наконец, если функция  $\varphi(t)$  не ограничена сверху на любом интервале  $(T, \infty)$ , то принимают

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = +\infty.$$

Аналогично определяется *нижний предел* функции  $\varphi(t)$  при  $t \rightarrow +\infty$  как наименьший из ее частичных пределов  $\beta$  при  $t \rightarrow \infty$ :

$$\beta = \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t).$$

Можно также положить

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = -\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} [-\varphi(t)].$$

Очевидно,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) \leq \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \varphi(t),$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда существует конечный или бесконечный  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t)$ . В этом случае

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t).$$

Легко убедиться, что 1) верхний предел функции обладает свойством монотонности, т. е. если

$$\varphi(t) \leq \psi(t),$$

то

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) \leq \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \psi(t);$$

2) справедливо неравенство

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} [\varphi(t) + \psi(t)] \leq \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) + \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \psi(t),$$

причем это неравенство превращается в равенство, если существует конечный предел при  $t \rightarrow +\infty$  хотя бы одной из функций  $\varphi(t)$  или  $\psi(t)$ ;

3) если  $\varphi(t) \geq 0$  и  $\psi(t) \geq 0$ , то

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} [\varphi(t) \psi(t)] \leq \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \psi(t)$$

в предположении, что правая часть неравенства имеет смысл, причем, если существует  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t)$  или  $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t)$ , последнее неравенство превращается в равенство.



Пример 1. Имеем

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \sin^2 t = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \cos^2 t = 1.$$

Здесь

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} (\sin^2 t + \cos^2 t) = 1 < \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \sin^2 t + \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \cos^2 t = 2.$$

Рассмотрим показательную функцию

$$e^{\alpha t},$$

где  $\alpha$  действительно. Множитель  $\alpha$  характеризует рост функции  $e^{\alpha t}$ ; если  $\alpha > 0$ , то, очевидно,  $e^{\alpha t} \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow \infty$ ; если же  $\alpha < 0$ , то  $e^{\alpha t} \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ . Число  $\alpha$  будем называть *характеристическим показателем* функции  $e^{\alpha t}$ .

В общем случае рассмотрим комплекснозначную функцию

$$f(t) = f_1(t) + i f_2(t)$$

действительного переменного  $t$ , определенную в интервале  $(t_0, \infty)$ . Модуль этой функции можно представить в показательном виде

$$|f(t)| = e^{\alpha(t) \cdot t},$$

где

$$\alpha(t) = \frac{1}{t} \ln |f(t)|$$

играет роль множителя при  $t$ . Изучая рост функции  $|f(t)|$ , естественно рассматривать максимальные значения функции  $\alpha(t)$ .

Определение 2. Число (или символ  $-\infty$  или  $+\infty$ ), определяемое формулой

$$\chi[f] = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |f(t)|, \quad (3.1.1)$$

будем называть *характеристическим показателем Ляпунова* (короче, *характеристическим показателем*).

Это — функционал, определенный на множестве функций  $\{f(t)\}$ , заданных на полуоси  $(t_0, \infty)$ . Для показательной функции  $e^{\alpha t}$ , очевидно, имеем

$$\chi[e^{\alpha t}] = \alpha.$$

Характеристический показатель  $\alpha$  равен взятому с обратным знаком *характеристическому числу* функции  $f(t)$ , введенному Ляпуновым. Изложенные ниже теоремы о характеристических показателях функций аналогичны соответствующим теоремам Ляпунова (см. [15]).

Очевидно, имеем:

- а)  $\chi[f(t)] = \chi[|f(t)|]$ ;  
 б)  $\chi[cf(t)] = \chi[f(t)]$  ( $c \neq 0$ ).

Пример 2. На основании формулы (3.1.1) получаем

$$\chi[t^m] = 0 \quad (m - \text{любая постоянная});$$

$$\chi[e^t \sin t] = 1; \quad \chi[e^{t^2}] = +\infty \text{ и т. п.}$$

Из формулы (3.1.1) вытекает, что характеристический показатель обладает свойством монотонности: если

$$|f(t)| \leq |F(t)| \text{ при } t > T,$$

то

$$\chi[f] \leq \chi[F]. \quad (3.1.2)$$

Заметим, что для любой последовательности  $t_k \rightarrow +\infty$  имеем

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{t_k} \ln |f(t_k)| \leq \chi[f(t)].$$

Лемма. Если

$$\chi[f] = \alpha \neq \pm\infty, \quad (3.1.3)$$

то 1) для любого  $\varepsilon > 0$  справедлива формула

$$f(t) = o[e^{(\alpha+\varepsilon)t}],$$

т. е.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|f(t)|}{e^{(\alpha+\varepsilon)t}} = 0; \quad (3.1.4)$$

2)

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{|f(t)|}{e^{(\alpha-\varepsilon)t}} = +\infty,$$

т. е. существует последовательность  $t_k \rightarrow \infty$  такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|f(t_k)|}{e^{(\alpha-\varepsilon)t_k}} = +\infty. \quad (3.1.5)$$

Обратно, если для некоторого  $\alpha$  при любом  $\varepsilon > 0$  выполнено соотношение (3.1.4), то

$$\chi[f] \leq \alpha;$$

если же имеет место соотношение (3.1.5), то

$$\chi[f] \geq \alpha;$$

наконец, если выполнены оба соотношения (3.1.4) и (3.1.5), то

$$\chi[f] = \alpha.$$

Доказательство. 1) Докажем сначала необходимость. Пусть

$$\chi[f] = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |f(t)| = \alpha.$$

Отсюда

$$\frac{1}{t} \ln |f(t)| < \alpha + \frac{\varepsilon}{2} \text{ при } t > T$$

и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{t_k} \ln |f(t_k)| = \alpha,$$

где  $t_k \rightarrow \infty$ . Следовательно,

$$|f(t)| < e^{(\alpha + \frac{\varepsilon}{2})t} \text{ при } t > T$$

и

$$|f(t_k)| > e^{(\alpha - \frac{\varepsilon}{2})t_k} \text{ при } k > N.$$

Из последних соотношений вытекают формулы (3.1.4) и (3.1.5).

2) Установим теперь достаточность. Если имеет место формула (3.1.4), то, очевидно, имеем

$$\chi[f] \leq \chi[e^{(\alpha + \varepsilon)t}] = \alpha + \varepsilon.$$

Отсюда ввиду произвольности числа  $\varepsilon$  получаем

$$\chi[f] \leq \alpha;$$

если выполнено соотношение (3.1.5), то имеем

$$\chi[f] \geq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{t_k} \ln |f(t_k)| \geq \alpha - \varepsilon$$

и, следовательно,

$$\chi[f] \geq \alpha.$$

Если же имеют место оба соотношения (3.1.4) и (3.1.5), то, очевидно, получаем

$$\chi[f] = \alpha.$$

Замечание. Таким образом, если  $\chi[f] = \alpha$ , то при  $t \rightarrow \infty$  модуль функции  $y = |f(t)|$  растет медленнее, чем любая показательная функция  $y_2 = e^{(\alpha + \varepsilon)t}$  где  $\varepsilon > 0$ , и по некоторой последовательности  $t_k \rightarrow \infty$  быстрее, чем  $y_1 = e^{(\alpha - \varepsilon)t}$  (рис. 16).

Теорема 1. Характеристический показатель суммы конечного числа функций  $f_k(t)$  ( $k = 1, \dots, m$ ) не превышает наиболь-

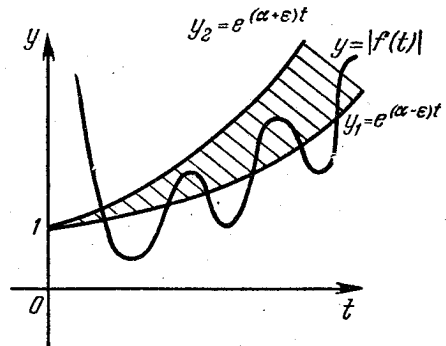


Рис. 16.

шего из характеристических показателей этих функций (в случае их конечности) и совпадает с ним, если наибольшим характеристическим показателем обладает лишь одно из слагаемых, т. е.

$$\chi \left[ \sum_{k=1}^m f_k(t) \right] \leq \max_k \chi [f_k(t)]. \quad (3.1.6)$$

Доказательство. 1) Пусть

$$\max_k \chi [f_k(t)] = \alpha \neq \pm \infty.$$

В силу леммы при любом  $\varepsilon > 0$  имеем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|f_k(t)|}{e^{(\alpha + \varepsilon)t}} = 0 \quad (k = 1, \dots, m).$$

Отсюда

$$\frac{\left| \sum_{k=1}^m f_k(t) \right|}{e^{(\alpha + \varepsilon)t}} \leq \sum_{k=1}^m \frac{|f_k(t)|}{e^{(\alpha + \varepsilon)t}} = o(1) \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

Следовательно, на основании второй части леммы имеем

$$\chi \left[ \sum_k f_k(t) \right] \leq \alpha = \max_k \chi [f_k(t)]. \quad (3.1.7)$$

2) Пусть

$$\max_k \chi [f_k(t)] = \chi [f_p(t)] = \alpha$$

и

$$\chi [f_k(t)] = \alpha_k < \alpha \quad \text{при } k \neq p.$$

Допустим, что последовательность  $t_q \rightarrow \infty$  такова, что

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \frac{|f_p(t_q)|}{e^{(\alpha - \varepsilon)t_q}} = +\infty.$$

При  $\alpha_k \neq -\infty$  имеем

$$\frac{\left| \sum_{k=1}^m f_k(t_q) \right|}{e^{(\alpha - \varepsilon)t_q}} \geq \frac{|f_p(t_q)|}{e^{(\alpha - \varepsilon)t_q}} - \sum_{k \neq p} \frac{|f_k(t_q)|}{e^{(\alpha_k + \varepsilon)t_q}} \frac{1}{e^{(\alpha - \alpha_k - 2\varepsilon)t_q}}.$$

Отсюда при  $0 < \varepsilon < \min_{k \neq p} \frac{\alpha - \alpha_k}{2}$  получаем

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \frac{\left| \sum_{k=1}^m f_k(t_q) \right|}{e^{(\alpha - \varepsilon)t_q}} = +\infty.$$

Поэтому

$$\chi \left[ \sum_k f_k(t) \right] \geq \alpha.$$

В сочетании с неравенством (3.1.7) это дает

$$\chi \left[ \sum_k f_k(t) \right] = \alpha = \max_k \chi [f_k(t)].$$

*Замечание.* Неравенство (3.1.6) формально остается верным, если все или некоторые  $\alpha_k = +\infty$  или  $-\infty$ .

*Теорема 2.* *Характеристический показатель произведения конечного числа функций  $f_k(t)$  ( $k=1, \dots, m$ ) не превышает суммы характеристических показателей этих функций, т. е.*

$$\chi \left[ \prod_{k=1}^m f_k(t) \right] \leq \sum_{k=1}^m \chi [f_k(t)]^1. \quad (3.1.8)$$

*Доказательство.* Очевидно, имеем

$$\begin{aligned} \chi \left[ \prod_k f_k(t) \right] &= \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left| \prod_k f_k(t) \right| = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \sum_k \frac{1}{t} \ln |f_k(t)| \leq \\ &\leq \sum_k \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |f_k(t)| = \sum_k \chi [f_k(t)]. \end{aligned}$$

*Следствие.* *Характеристический показатель конечной линейной комбинации функций  $f_k(t)$  ( $k=1, \dots, m$ ) с ограниченными коэффициентами  $c_k(t)$  не превышает наибольшего из характеристических показателей комбинируемых функций, т. е.*

$$\chi \left[ \sum_{k=1}^m c_k(t) f_k(t) \right] \leq \max_k \chi [f_k(t)].$$

Действительно, учитывая, что

$$\chi [c_k(t)] \leq 0,$$

на основании теорем 1 и 2 имеем

$$\begin{aligned} \chi \left[ \sum_k c_k(t) f_k(t) \right] &\leq \max_k \chi [c_k(t) f_k(t)] \leq \\ &\leq \max_k \{ \chi [c_k(t)] + \chi [f_k(t)] \} \leq \max_k \chi [f_k(t)]. \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Формула (3.1.8) становится неопределенной, если среди функций  $f_k(t)$  имеются функции  $f_p(t)$  и  $f_q(t)$  такие, что  $\chi [f_p(t)] = -\infty$  и  $\chi [f_q(t)] = +\infty$ .

Замечание. Если линейная комбинация функций

$$\sum_{k=1}^m c_k f_k(t) \quad (c_k \neq 0),$$

где  $c_k$  постоянны, содержит лишь одну функцию с наибольшим характеристическим показателем, то

$$\chi \left[ \sum_{k=1}^m c_k f_k(t) \right] = \max_k \chi [f_k(t)].$$

Определение 3. Назовем характеристический показатель функции  $f(t)$  ( $t > t_0$ ) *строгим*, если существует конечный предел

$$\chi[f] = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |f(t)|. \quad (3.1.9)$$

В этом случае, очевидно,  $f(t) \neq 0$  при  $t > T$ .

Если функция  $f(t)$  имеет строгий характеристический показатель, то из формулы (3.1.9) получаем

$$\chi \left[ \frac{1}{f} \right] = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left| \frac{1}{f(t)} \right| = -\chi[f],$$

т. е.

$$\chi[f] + \chi \left[ \frac{1}{f} \right] = 0. \quad (3.1.10)$$

Обратно, если выполнено равенство (3.1.10), то, учитывая, что

$$\chi[f] = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |f(t)|$$

и

$$\chi \left[ \frac{1}{f} \right] = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{t} \ln |f(t)| \right] = -\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |f(t)|,$$

будем иметь

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |f(t)| = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |f(t)|,$$

т. е. существует предел (3.1.9).

Теорема 3. Если функция  $f(t)$  имеет строгий характеристический показатель, то характеристический показатель произведения функций  $f(t)$  и  $g(t)$  равен сумме характеристических показателей этих функций, т. е.

$$\chi[f(t)g(t)] = \chi[f(t)] + \chi[g(t)]. \quad (3.1.11)$$

Доказательство. На основании теоремы 2 имеем

$$\chi [fg] \leq \chi [f] + \chi [g]. \quad (3.1.12)$$

С другой стороны, учитывая формулу (3.1.10), получаем

$$\chi [g] = \chi \left[ fg \cdot \frac{1}{f} \right] \leq \chi [fg] - \chi [f],$$

т. е.

$$\chi [fg] \geq \chi [f] + \chi [g]. \quad (3.1.13)$$

Из формул (3.1.12) и (3.1.13) вытекает формула (3.1.11).

Следствие.  $\chi [e^{\alpha t} y] = \alpha + \chi [y]$ .

Определение 4. Под *интегралом* функции  $f(t)$  ( $t_0 \leq t < \infty$ ), следуя Ляпунову (см. [13]), будем понимать

$$F(t) = \int_{t_0}^t f(t_1) dt_1, \quad \text{если } \chi [f] \geq 0, \quad (3.1.14)$$

и

$$F(t) = \int_t^{\infty} f(t_1) dt_1, \quad \text{если } \chi [f] < 0. \quad (3.1.15)$$

Теорема 4. *Характеристический показатель интеграла не превышает характеристического показателя подинтегральной функции.*

Доказательство. Пусть

$$\chi [f(t)] = \alpha \neq \pm \infty;$$

тогда для любого  $\varepsilon > 0$  будем иметь

$$|f(t)| e^{-(\alpha + \varepsilon)t} \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

Отсюда

$$|f(t)| \leq M e^{(\alpha + \varepsilon)t},$$

где  $M$  — некоторая положительная постоянная.

1) Если  $\alpha \geq 0$ , то из (3.1.14) имеем

$$\begin{aligned} |F(t)| &\leq \int_{t_0}^t |f(t_1)| dt_1 \leq \int_{t_0}^t M e^{(\alpha + \varepsilon)t_1} dt_1 = \\ &= \frac{M}{\alpha + \varepsilon} [e^{(\alpha + \varepsilon)t} - e^{(\alpha + \varepsilon)t_0}] < \frac{M}{\alpha + \varepsilon} e^{(\alpha + \varepsilon)t} \quad (t \geq t_0). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\chi [F(t)] = \chi [|F(t)|] \leq \alpha + \varepsilon,$$

а так как  $\varepsilon > 0$  произвольно, то

$$\chi [F(t)] \leq \alpha = \chi [f(t)].$$

2) Если  $\alpha < 0$ , то из (3.1.15) при  $0 < \varepsilon < |\alpha|$  получаем

$$|F(t)| \leq \int_t^{\infty} |f(t_1)| dt_1 \leq M \int_t^{\infty} e^{(\alpha+\varepsilon)t_1} dt_1 = \frac{Me^{(\alpha+\varepsilon)t}}{|\alpha+\varepsilon|}.$$

Отсюда аналогично предыдущему выводим

$$\chi[F] \leq \alpha = \chi[f].$$

3) Утверждения теоремы, очевидно, остаются в силе, если  $\alpha = -\infty$  или  $\alpha = +\infty$ .

Следствие. Если

$$\chi[\varphi] \leq \alpha, \quad \chi[\psi] \leq \beta \quad (\alpha + \beta \geq 0),$$

то

$$\chi \left[ \int_{t_0}^t \varphi(t_1) \psi(t_1) dt_1 \right] \leq \alpha + \beta. \quad (3.1.16)$$

Действительно, используя свойство монотонности характеристических чисел и теорему 4, имеем

$$\begin{aligned} \chi \left[ \int_{t_0}^t \varphi(t_1) \psi(t_1) dt_1 \right] &\leq \chi \left[ \int_{t_0}^t Me^{(\alpha+\varepsilon)t_1} |\psi(t_1)| dt_1 \right] \leq \\ &\leq \alpha + \varepsilon + \chi[|\psi|] \leq \alpha + \beta + \varepsilon. \end{aligned}$$

А так как  $\varepsilon > 0$  произвольно, то отсюда вытекает неравенство (3.1.16).

## § 2. Характеристические показатели функциональных матриц

Определение. Назовём *характеристическим показателем* матрицы  $F(t) = [f_{jk}(t)]$  определенной на  $[t_0, \infty)$ , число или символ  $+\infty$  ( $-\infty$ ):

$$\chi[F(t)] = \max_{j, k} \chi[f_{jk}(t)]. \quad (3.2.1)$$

Заметим, что если

$$F^T(t) = [f_{kj}(t)]$$

— транспонированная матрица, то из формулы (3.2.1) вытекает

$$\chi[F^T(t)] = \chi[F(t)].$$

Лемма. *Характеристический показатель конечномерной матрицы  $F(t)$  совпадает с характеристическим показателем ее нормы, т. е.*

$$\chi[F(t)] = \chi[\|F(t)\|],$$



где под нормой матрицы понимается одна из трех рассмотренных выше норм (гл. I, § 4).

Доказательство. Так как

$$|f_{jk}(t)| \leq \|F(t)\|,$$

то

$$\chi[f_{jk}(t)] \leq \chi[\|F(t)\|]$$

и, следовательно,

$$\chi[F(t)] \leq \chi[\|F(t)\|].$$

С другой стороны, очевидно, имеем

$$\|F(t)\| \leq \sum_{j,k} |f_{jk}(t)|.$$

Поэтому на основании теоремы 1 из § 1 получаем

$$\chi[\|F(t)\|] \leq \max_{j,k} \chi[f_{jk}(t)] = \chi[F(t)].$$

Таким образом,

$$\chi[F(t)] = \chi[\|F(t)\|].$$

*Теорема 1. Характеристический показатель суммы конечного числа матриц не превышает наибольшего из характеристических показателей этих матриц.*

Доказательство. Пусть  $F_s(t)$  ( $s=1, \dots, N$ ) — матрицы одного и того же типа  $m \times n$  и

$$F(t) = \sum_{s=1}^N F_s(t).$$

Отсюда

$$\|F(t)\| \leq \sum_{s=1}^N \|F_s(t)\|$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \chi[F(t)] &= \chi[\|F(t)\|] \leq \chi\left[\sum_{s=1}^N \|F_s(t)\|\right] = \\ &= \max_s \chi[\|F_s(t)\|] = \max_s \chi[F_s(t)], \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

что и требовалось доказать.

*Замечание.* Если среди матриц  $F_s(t)$  ( $s=1, \dots, N$ ) имеется лишь одна обладающая наибольшим характеристическим показателем, то характеристический показатель суммы этих матриц равен сумме их характеристических показателей.

Действительно, пусть

$$\chi[F_1(t)] > \chi[F_s(t)] \text{ при } s > 1$$

и

$$F_s(t) = [f_{jk}^{(s)}(t)] \quad (s = 1, \dots, N),$$

$$F(t) = \sum_{s=1}^N F_s(t) = [f_{jk}(t)].$$

Допустим, что

$$\chi[F_1(t)] = \max_{j, k} \chi[f_{jk}^{(1)}(t)] = \chi[f_{pq}^{(1)}(t)].$$

На основании теоремы 1 из § 1, учитывая, что

$$\chi[f_{pq}^{(s)}(t)] \leq \chi[F_s(t)] < \chi[f_{pq}^{(1)}(t)]$$

при  $s > 1$ , имеем

$$\chi[f_{pq}(t)] = \chi[f_{pq}^{(1)}(t)] = \chi[F_1(t)].$$

Следовательно,

$$\chi[F(t)] \geq \chi[F_1(t)] = \max_s \chi[F_s(t)].$$

Сопоставляя это неравенство с неравенством (3.2.2), получим окончательно

$$\chi[F(t)] = \max_s \chi[F_s(t)],$$

что и требовалось доказать.

*Теорема 2. Характеристический показатель произведения конечного числа матриц не превышает суммы характеристических показателей этих матриц.*

*Доказательство.* Пусть  $F_s(t)$  ( $s = 1, \dots, N$ ) — матрицы, допускающие последовательное умножение, и

$$F(t) = \prod_{s=1}^N F_s(t).$$

Отсюда

$$\|F(t)\| \leq \prod_s \|F_s(t)\|$$

и, следовательно,

$$\chi[F(t)] = \chi[\|F(t)\|] \leq \sum_s \chi[\|F_s(t)\|] = \sum_s \chi[F_s(t)],$$

что и требовалось доказать.

Следствие. *Характеристический показатель линейной комбинации*

$$\sum_s c_s F_s(t) \quad (c_s \neq 0)$$

*нескольких матриц не превышает наибольшего из характеристических показателей этих матриц и совпадает с ним, если наибольший характеристический показатель имеет лишь одна из матриц.*

### § 3. Спектр линейной однородной системы

Пусть

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \quad (3.3.1)$$

— линейная дифференциальная система, где  $A(t) \in C(a, \infty)$ .

Теорема Ляпунова (о характеристических показателях решений линейной системы). *Если матрица линейной системы (3.3.1) ограничена,*

$$\|A(t)\| \leq c < \infty, \quad (3.3.2)$$

*то каждое действительное или комплексное нетривиальное ее решение  $x = x(t)$  ( $a < t_0 \leq t < \infty$ ) имеет конечный характеристический показатель.*

Доказательство. Пусть

$$x = \text{colop } [x_1, \dots, x_n] \neq 0$$

и  $t_0, t \in (a, \infty)$ . Из уравнения (3.3.1) получаем

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t A(t_1)x(t_1)dt_1.$$

Отсюда

$$\|x(t)\| \leq \|x(t_0)\| + \int_{t_0}^t \|A(t_1)\| \|x(t_1)\| dt_1.$$

Применяя обобщение леммы Гронуолла — Беллмана (гл. II, § 11), при  $t \geq t_0$  будем иметь

$$\begin{aligned} \|x(t_0)\| \exp \left[ - \int_{t_0}^t \|A(t_1)\| dt_1 \right] &\leq \\ &\leq \|x(t)\| \leq \|x(t_0)\| \exp \left[ \int_{t_0}^t \|A(t_1)\| dt_1 \right]. \end{aligned}$$

Следовательно, учитывая, что

$$\chi \left[ \frac{\|x(t)\|}{\|x(t_0)\|} \right] = \chi[x(t)],$$

получим

$$\chi \left\{ \exp \left[ - \int_{t_0}^t \|A(t_1)\| dt_1 \right] \right\} \leq \chi[x(t)] \leq \chi \left\{ \exp \int_{t_0}^t \|A(t_1)\| dt_1 \right\},$$

т. е.

$$-\underline{A} \leq \chi[x(t)] \leq \bar{A}, \quad (3.3.3)$$

где

$$\underline{A} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \|A(t_1)\| dt_1$$

и

$$\bar{A} = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \|A(t_1)\| dt_1.$$

Таким образом, все характеристические числа нетривиальных решений  $x(t)$  линейной системы (3.3.1) содержатся в конечном отрезке  $[-\underline{A}, \bar{A}] \subset [-c, c]$ .

Теорема Ляпунова доказана.

Замечание. Если матрица  $A(t)$  линейной системы (3.3.1) действительна и некоторое комплексное решение ее

$$z = \xi_1(t) + i\xi_2(t)$$

( $\xi_k(t)$  действительны;  $k=1, 2$ ) имеет характеристический показатель

$$\chi[z] = \alpha,$$

то существует действительное решение  $x = x(t)$  этой системы, имеющее тот же характеристический показатель:  $\chi[x] = \alpha$ .

В самом деле, так как

$$\frac{d}{dt} [\xi_1(t) + i\xi_2(t)] = A(t) [\xi_1(t) + i\xi_2(t)],$$

то

$$\frac{d\xi_k(t)}{dt} = A(t) \xi_k(t) \quad (k=1, 2),$$

т. е. действительная и мнимая части комплексного решения  $z$  являются решениями системы (3.3.1). Положим  $x = \xi_s(t)$ , где

$$\chi[\xi_s(t)] = \max_k \chi[\xi_k(t)].$$

Так как

$$\chi[\xi_k(t)] \leq \chi[z] \leq \max_k \chi[\xi_k(t)] \quad (k = 1, 2),$$

то, очевидно, имеем

$$\chi[\xi_s(t)] = \chi[z] = \alpha,$$

что и требовалось доказать.

Без нарушения общности рассуждения можно предполагать, что

$$\xi_s(t) = \operatorname{Re} z,$$

так как в случае необходимости можно использовать решение

$$\hat{z} = -iz(t) = \xi_2(t) - i\xi_1(t).$$

Изучим более точно структуру множества характеристических показателей решений линейной дифференциальной системы с ограниченной матрицей  $A(t)$ .

*Лемма. Вектор-функции  $x^{(k)}(t)$  ( $k = 1, \dots, m$ ), определенные на  $[t_0, \infty)$  и обладающие различными характеристическими показателями, линейно независимы.*

*Доказательство.* Пусть

$$\chi[x^{(k)}(t)] = \alpha_k \quad (k = 1, \dots, m)$$

и для определенности

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_m. \quad (3.3.4)$$

Предположим, что

$$\sum_{k=1}^m c_k x^{(k)}(t) \equiv 0 \quad \text{при } t_0 \leq t < \infty, \quad (3.3.5)$$

причем  $c_p \neq 0$ , где  $1 \leq p \leq m$ , и  $c_q = 0$  при  $q > p$ . Тогда из соотношения (3.3.5) имеем

$$x^{(p)}(t) = \sum_{k=1}^{p-1} \left[ -\frac{c_k}{c_p} x^{(k)}(t) \right]$$

и, следовательно, на основании следствия теоремы 2 из § 1 получаем

$$\alpha_p = \chi[x^{(p)}(t)] \leq \max_{k < p} \chi[x^{(k)}(t)] = \alpha_{p-1},$$

что противоречит условию (3.3.4).

Таким образом,  $x^{(1)}(t), \dots, x^{(m)}(t)$  линейно независимы.

**Определение.** Множество всех собственных характеристических показателей (т. е. отличных от  $-\infty$  и  $+\infty$ ) решений дифференциальной системы будем называть ее *спектром*.

Из приведенного выше замечания следует, что если матрица  $A(t)$  линейной однородной системы действительна, то спектр ее может быть реализован на множестве действительных решений.

**Теорема.** *Спектр линейной однородной дифференциальной системы с непрерывной ограниченной матрицей состоит из конечного числа элементов*

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_m \quad (m \leq n).$$

Доказательство теоремы непосредственно вытекает из леммы и того обстоятельства, что линейная дифференциальная система порядка  $n$  имеет самое большее  $n$  линейно независимых решений.

Заметим, что характеристические показатели  $\alpha_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ) нетривиальных решений линейной системы

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

с постоянной матрицей  $A$  являются вещественными частями характеристических корней матрицы  $A$ , т. е.

$$\alpha_j = \operatorname{Re} \lambda_j(A) \quad (j = 1, \dots, m),$$

где  $\lambda_j = \lambda_j(A)$  — корни векового уравнения

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

с различными вещественными частями (гл. II, § 8).

**З а м е ч а н и е.** Нелинейная дифференциальная система может иметь спектр произвольной природы, например, содержащий бесконечное множество элементов.

**П р и м е р.** Скалярное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t} \ln x \quad (t > 0, x > 0)$$

имеет общее решение

$$x = e^{ct}$$

и, следовательно, это уравнение обладает сплошным спектром  $-\infty < \alpha < \infty$ .

#### § 4. Нормальные фундаментальные системы

Пусть в  $n$ -мерном пространстве  $\mathfrak{R}^n$  задана линейная однородная система

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad (3.4.1)$$

где  $A(t) \in C[t_0, \infty)$ ,  $\sup_t \|A(t)\| < \infty$  и  $-\infty < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_m < +\infty$  ( $m \leq n$ ) — ее спектр, расположенный в порядке возрастания.

Как известно (см. [9], [10]), совокупность всех решений  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  ( $t_0 \leq t < \infty$ ) системы (3.4.1) представляет собой линейное пространство  $\hat{\mathfrak{R}}^n$  (*пространство решений*), точками которого являются отдельные решения, а любая фундаментальная система

$$\hat{X}(t) = \{ \mathbf{x}^{(1)}(t), \dots, \mathbf{x}^{(n)}(t) \},$$

состоящая из максимального числа линейно независимых решений  $\hat{\mathbf{x}}_s(t)$  ( $s = 1, \dots, n$ ), служит базисом.

Пусть фундаментальная система  $\hat{X}(t)$  содержит  $\hat{n}_s$  решений с характеристическим показателем  $\alpha_s$  ( $s = 1, \dots, m$ ), причем некоторые  $\hat{n}_s$  могут быть и нулями. Величину

$$\sigma_{\hat{X}} = \sum_{s=1}^m \hat{n}_s \alpha_s, \quad (3.4.2)$$

где  $\sum_{s=1}^m \hat{n}_s = n$ , будем называть *суммой* характеристических показателей системы  $\hat{X}(t)$ . Так как число характеристических показателей линейной системы конечно, то существуют фундаментальные системы  $X(t)$  с наименьшей суммой характеристических показателей, т. е.

$$\sigma_X = \min_{\hat{X}} \sigma_{\hat{X}}. \quad (3.4.3)$$

Такие фундаментальные системы и соответствующие им фундаментальные матрицы будем называть *нормальными* (в смысле Ляпунова).

**Определение 1.** Фундаментальная система называется *нормальной*, если сумма ее характеристических показателей есть наименьшая по сравнению с другими фундаментальными системами.

Если матрица  $A(t)$  действительна, то для каждого характеристического показателя  $\alpha_s$  существуют действительные решения с таким показателем, и в этом случае нормальной фундаментальную систему можно также полагать действительной.

Пусть  $N_s$  ( $s = 1, \dots, m$ ) — максимальное число линейно независимых решений системы (3.4.1), обладающих характеристическим показателем  $\alpha_s$ . Рассмотрим совокупность  $\mathfrak{M}_s$  всех решений  $\mathbf{x}(t)$ , включая тривиальное, характеристические показатели которых не превышают числа  $\alpha_s$ , т. е.

$$\mathfrak{M}_s = \{ \mathbf{x}(t) : \chi[\mathbf{x}(t)] \leq \alpha_s \}.$$

В частности, имеем  $\mathfrak{M}_0 = \hat{O}$ ,  $\mathfrak{M}_n = \hat{\mathfrak{R}}^n$ . Из теорем о характеристических показателях следует, что если  $\mathbf{x}(t) \in \mathfrak{M}_s$  и  $\mathbf{y}(t) \in \mathfrak{M}_s$ , то  $c\mathbf{x}(t) \in \mathfrak{M}_s$  ( $c$  — постоянная) и  $\mathbf{x}(t) + \mathbf{y}(t) \in \mathfrak{M}_s$ . Поэтому  $\mathfrak{M}_s$

является линейным подпространством (см. приложение) пространства решений  $\mathfrak{M}^n$ .

Лемма 1. Число  $N_s$  совпадает с размерностью линейного подпространства  $\mathfrak{M}_s$ , т. е.

$$N_s = \dim \mathfrak{M}_s \quad (s = 1, \dots, m). \quad (3.4.4)$$

Доказательство. В самом деле, по определению каждое решение с характеристическим показателем  $\alpha_s$  входит в  $\mathfrak{M}_s$ , т. е.

$$\dim \mathfrak{M}_s \geq N_s. \quad (3.4.5)$$

С другой стороны, пусть  $\{x^{(p)}(t), y^{(q)}(t)\}$  — некоторый базис пространства  $\mathfrak{M}_s$ , где

$$\chi[x^{(p)}(t)] < \alpha_s \text{ и } \chi[y^{(q)}(t)] = \alpha_s.$$

Этот базис обязательно должен содержать решение с наибольшим характеристическим показателем  $\alpha_s$ , так как в противном случае существовали бы решения системы (3.4.1), которые нельзя представить в виде линейной комбинации базисных решений. Пусть  $y^{(r)}(t)$  — решение системы (3.4.1) такое, что  $\chi[y^{(r)}(t)] = \alpha_s$ . Система решений  $\{x^{(p)}(t) + y^{(r)}(t), y^{(q)}(t)\}$  образует новый базис подпространства  $\mathfrak{M}_s$ . Действительно, если

$$\sum_p a_p [x^{(p)}(t) + y^{(r)}(t)] + \sum_q b_q y^{(q)}(t) \equiv 0,$$

то

$$\sum_p a_p x^{(p)}(t) + \left(\sum_p a_p + b_r\right) y^{(r)}(t) + \sum_{q \neq r} b_q y^{(q)}(t) \equiv 0.$$

Отсюда в силу линейной независимости решений  $x^{(p)}(t)$  и  $y^{(q)}(t)$  получим

$$a_p = 0, \quad \sum_p a_p + b_r = 0, \quad b_q = 0 \text{ при } q \neq r,$$

и, значит, все  $b_q = 0$ . Таким образом, система решений

$$\{x^{(p)}(t) + y^{(r)}(t), y^{(q)}(t)\}$$

есть базис подпространства  $\mathfrak{M}_s$ , причем, очевидно, каждый элемент его обладает характеристическим показателем  $\alpha_s$ . Следовательно,

$$\dim \mathfrak{M}_s \leq N_s. \quad (3.4.6)$$

Из неравенств (3.4.5) и (3.4.6) следует равенство (3.4.4).

Следствие 1. Имеет место строгое неравенство

$$N_1 < N_2 < \dots < N_m,$$

где  $N_m = n$ .



Следствие 2. Если  $\hat{n}_s (s=1, \dots, m)$  — число решений с характеристическим показателем  $\alpha_s$ , входящих в произвольную фундаментальную систему  $\hat{X}(t)$ , то справедливы неравенства

$$\hat{n}_1 + \hat{n}_2 + \dots + \hat{n}_s \leq N_s (s=1, \dots, m). \quad (3.4.7)$$

Действительно, каждая часть фундаментальной системы  $\hat{X}(t)$ , включающая все линейно независимые решения с характеристическими показателями, не превосходящими  $\alpha_s$ , очевидно, содержится в подпространстве  $\mathfrak{M}_s$ .

Замечание. Число элементов (в обобщенном понимании) линейного пространства размерности  $p$  будем условно обозначать символом  $\infty^p$ .

В этом смысле можно сказать, что линейная система (3.4.1) имеет

$$\infty^{N_s} - \infty^{N_{s-1}}$$

решений с характеристическим показателем  $\alpha_s (s=1, \dots, m; N_0=0)$ . Таким образом, почти все решения линейной однородной дифференциальной системы обладают наибольшим характеристическим показателем

$$\alpha = \max_s \alpha_s.$$

Пример. Пусть общее решение линейной дифференциальной системы имеет вид

$$x = c_1 a e^t + c_2 b e^{2t} + c_3 c e^{3t},$$

где  $c_1, c_2, c_3$  — действительные произвольные постоянные и  $a, b, c$  — постоянные ненулевые векторы. Тогда каждое решение в пространстве  $\mathcal{O} c_1 c_2 c_3$  будет характеризоваться вектором  $c = (c_1, c_2, c_3)$  (рис. 17).

Спектр системы, очевидно,  $\{1, 2, 3\}$ . Решениям  $x$  таким, что

$$\chi[x] = 1,$$

соответствует прямая  $\mathcal{R}^1 = \{c_2 = 0, c_3 = 0\}$  с исключенным нулевым вектором (рис. 17). Решениям  $x$  с характеристическим показателем

$$\chi[x] = 2$$

отвечает плоскость

$$\mathcal{R}^2 = \{c_3 = 0\}$$

с исключенной прямой  $\mathcal{R}^1$ . Наконец, решениям  $x$  с максимальным характеристическим числом

$$\chi[x] = 3$$

соответствует трехмерное пространство  $\mathcal{R}^3 = \mathcal{O} c_1 c_2 c_3$  с исключенной плоскостью  $\mathcal{R}^2$ .

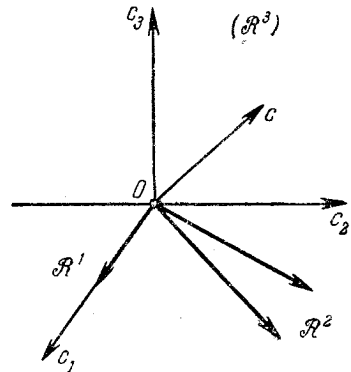


Рис. 17.

Чтобы охарактеризовать нормальные фундаментальные системы решений, введем понятие несжимаемости системы функций.

Определение 2. Мы скажем, что система ненулевых вектор-функций  $\mathbf{x}^{(1)}(t), \dots, \mathbf{x}^{(k)}(t)$  ( $k \leq n$ ) обладает свойством несжимаемости, если характеристический показатель любой существенной их линейной комбинации

$$\mathbf{y} = \sum_{j \leq k} c_j \mathbf{x}^{(j)}(t) \quad (c_j \neq 0),$$

где  $c_j$  постоянны, совпадает с наибольшим из характеристических показателей комбинируемых решений, т. е. для всякой комбинации  $\mathbf{y}$  имеем

$$\chi[\mathbf{y}] = \max_j \chi[\mathbf{x}^{(j)}(t)].$$

Очевидно, если ненулевые вектор-функции обладают свойством несжимаемости и характеристические числа их отличны от  $-\infty$ , то эти вектор-функции линейно независимы. Обратное неверно.

Заметим, что совокупность вектор-функций с различными характеристическими числами, очевидно, обладает свойством несжимаемости.

Лемма 2. Если фундаментальная система  $X(t)$  обладает свойством несжимаемости и  $n_s$  ( $s=1, \dots, m$ ) — число ее решений с характеристическим показателем  $\alpha_s$ , а  $N_s$  — максимальное число линейно независимых решений системы с характеристическим показателем  $\alpha_s$ , то справедливы равенства

$$n_1 + n_2 + \dots + n_s = N_s \quad (s=1, \dots, m), \quad (3.4.8)$$

т. е. в этом случае суммы  $\sum_{k=1}^s n_k$  ( $s=1, \dots, m$ ) достигают своих наибольших значений.

Доказательство. Действительно, по свойству несжимаемости решение  $\mathbf{x}(t)$ , обладающее характеристическим показателем  $\alpha_s$ , может быть линейной комбинацией лишь тех решений из фундаментальной системы  $X(t)$ , характеристические показатели которых не превышают  $\alpha_s$ , т. е.

$$N_s \leq n_1 + n_2 + \dots + n_s. \quad (3.4.9)$$

С другой стороны, всегда

$$n_1 + n_2 + \dots + n_s \leq N_s. \quad (3.4.10)$$

Сопоставляя неравенства (3.4.9) и (3.4.10), получаем равенства (3.4.8).

Теорема Ляпунова (о нормальности фундаментальной системы). *Фундаментальная система линейной си-*

стемы (3.4.1) является нормальной тогда и только тогда, когда она обладает свойством несжимаемости.

Доказательство. 1) Докажем сначала необходимость условий теоремы, т. е. допустим, что система обладает свойством несжимаемости, и докажем, что она нормальная.

Предположим противное: пусть существует фундаментальная система  $Y(t) = \{y^{(1)}(t), \dots, y^{(n)}(t)\}$  такая, что

$$\sigma_Y < \sigma_X, \quad (3.4.11)$$

где

$$\sigma_Y = \sum_{s=1}^m \nu_s \alpha_s, \quad \sigma_X = \sum_{s=1}^m n_s \alpha_s, \quad \left( \sum_{s=1}^m \nu_s = \sum_{s=1}^m n_s = n \right),$$

$\alpha_s$  — характеристические показатели нетривиальных решений системы (3.4.1) и  $\nu_s, n_s$  ( $s = 1, \dots, m$ ) — числа линейно независимых решений с характеристическим показателем  $\alpha_s$ , содержащихся, соответственно, в фундаментальных системах  $Y(t)$  и  $X(t)$ . Для определенности в матрицах  $Y(t)$  и  $X(t)$  решения расположим в порядке возрастания их характеристических показателей.

Пусть  $N'_s = \sum_{k=1}^s n_k$  ( $s = 1, \dots, m$ ) — максимальное число линейно независимых решений системы с характеристическим показателем  $\alpha_s$ . Вводя обозначение

$$N'_s = \sum_{k=1}^s \nu_k \quad (s = 1, \dots, m),$$

в силу лемм 1 и 2 получаем

$$N'_1 \leq N_1, N'_2 \leq N_2, \dots, N'_{m-1} \leq N_{m-1}, \\ N'_m = N_m = n,$$

причем

$$\nu_s = N'_s - N'_{s-1}, \quad n_s = N_s - N_{s-1} \quad (s = 1, \dots, m; N'_0 = N_0 = 0).$$

Имеем

$$\begin{aligned} \sigma_Y &= \sum_{s=1}^m \nu_s \alpha_s = \sum_{s=1}^m (N'_s - N'_{s-1}) \alpha_s = \\ &= N'_m \alpha_m - \sum_{s=1}^{m-1} N'_s (\alpha_{s+1} - \alpha_s) \geq \\ &\geq N_m \alpha_m - \sum_{s=1}^{m-1} N_s (\alpha_{s+1} - \alpha_s) = \\ &= \sum_{s=1}^m n_s \alpha_s = \sigma_X, \end{aligned} \quad (3.4.12)$$

что противоречит неравенству (3.4.11).

Итак, несжимаемая система  $X$  нормальная.

2) Докажем теперь достаточность условия теоремы, т. е. предположим, что система  $X$  нормальная, и докажем, что она обладает свойством несжимаемости.

Предположим противное: пусть существует линейная комбинация

$$y = \sum_{j=1}^p c_j x^{(j)}(t) \quad (c_p \neq 0) \quad (3.4.13)$$

такая, что

$$\chi[y] < \max_j \chi[x^{(j)}(t)] = \chi[x^{(p)}(t)]. \quad (3.4.14)$$

Рассмотрим систему решений

$$Y = \{ x^{(1)}(t), \dots, x^{(p-1)}(t), y(t), x^{(p+1)}(t), \dots, x^{(n)}(t) \}.$$

Система  $Y$  является фундаментальной. В самом деле, пусть

$$\sum_{j \neq p} a_j x^{(j)}(t) + a_p y(t) \equiv 0, \quad (3.4.15)$$

где

$$\sum_{j=1}^n |a_j| \neq 0.$$

Отсюда в силу линейной независимости решений  $x^{(j)}(t)$  имеем

$$a_p \neq 0. \quad (3.4.16)$$

Подставляя в тождество (3.4.15) выражение для  $y(t)$  (3.4.13), будем иметь

$$\sum_{j < p} (a_j + a_p c_j) x^{(j)}(t) + a_p c_p x^{(p)}(t) + \sum_{j > p} a_j x^{(j)}(t) \equiv 0.$$

Из последнего тождества, очевидно, получаем

$$a_p c_p = 0,$$

что невозможно в силу условий (3.4.13) и (3.4.16). Следовательно, система  $Y$  фундаментальная.

На основании неравенства (3.4.14) находим

$$\sigma_Y < \sigma_X,$$

что противоречит нормальности системы  $X$ .

Таким образом, всякая нормальная система  $X$  обладает свойством несжимаемости.

**Следствие 1.** Во всех нормальных фундаментальных системах  $X(t)$  количество  $n_s$  решений с характеристическим показателем  $\alpha_s$  ( $s = 1, \dots, m$ ) одно и то же.

Действительно, в силу леммы 2 получаем

$$n_s = N_s - N_{s-1} \quad (s = 1, \dots, m; N_0 = 0),$$

где

$$N_s = \dim \mathfrak{M}_s.$$

*Следствие 2. Всякая нормальная фундаментальная система реализует весь спектр линейной системы.*

Действительно, так как

$$0 = N_0 < N_1 < \dots < N_m = n,$$

то

$$n_s = N_s - N_{s-1} \geq 1 \quad (s = 1, \dots, m).$$

Свойство несжимаемости Ляпунов положил в основу понятия нормальности фундаментальной системы (см. [13]).

*Определение 3.* Совокупность всех характеристических показателей  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  нетривиальных решений линейной однородной системы (3.4.1), где каждый повторяется столько раз, сколько  $n_s$  ( $s = 1, \dots, m$ ) линейно независимых решений с характеристическим показателем  $\alpha_s$  содержится в некоторой ее нормальной фундаментальной системе  $X_t$ , будем называть *полным спектром* системы (3.4.1), а сумму

$$S = \sum_{k=1}^n \alpha_k \equiv \sum_{s=1}^m n_s \alpha_s$$

— *суммой характеристических показателей* линейной системы ( $n_s$  — *кратности* элементов спектра).

*Теорема Ляпунова* (о построении нормальной фундаментальной системы решений). Пусть дана линейная дифференциальная система

$$\frac{dx}{dt} = A(t) x, \quad (3.4.17)$$

где  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $A(t) \in C(a, \infty)$ ,  $\sup_t \|A(t)\| < \infty$ , и пусть  $Z(t) = \{z^{(1)}(t), \dots, z^{(n)}(t)\}$  — ее фундаментальная матрица. Тогда существует постоянная треугольная матрица.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ c_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (3.4.18)$$

такая, что

$$X(t) = Z(t) C \quad (3.4.19)$$

есть нормальная фундаментальная матрица системы (3.4.17).

Доказательство. 1) Пусть

$$X(t) = \{\mathbf{x}^{(1)}(t), \dots, \mathbf{x}^{(n)}(t)\}.$$

Подберем числа  $c_{jk}$  ( $k < j$ ) так, чтобы

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}^{(1)}(t) &= \mathbf{z}^{(1)}(t) + c_{21}\mathbf{z}^{(2)}(t) + \dots + c_{n1}\mathbf{z}^{(n)}(t), \\ \mathbf{x}^{(2)}(t) &= \dots \quad \mathbf{z}^{(2)}(t) + \dots + c_{n2}\mathbf{z}^{(n)}(t), \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \mathbf{x}^{(n)}(t) &= \dots \quad \dots \quad \dots \quad \mathbf{z}^{(n)}(t), \end{aligned} \right\} \quad (3.4.20)$$

причем

$$\chi[\mathbf{x}^{(s)}(t)] = \min_{b_{s+1,s}, \dots, b_{ns}} \chi[\mathbf{z}^{(s)}(t) + b_{s+1,s}\mathbf{z}^{(s)}(t) + \dots + b_{ns}\mathbf{z}^{(n)}(t)]$$

( $s = 1, \dots, n$ ).

Очевидно, справедлива формула (3.4.18). Кроме того, так как  $\det C = 1$ , то

$$\det X(t) = \det Z(t) \cdot \det C = \det Z(t) \neq 0$$

и, следовательно,  $X(t)$  есть фундаментальная матрица системы (3.4.17).

2) Докажем теперь, что так построенная матрица  $X(t)$  является нормальной фундаментальной матрицей системы (3.4.17).

Пусть  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  ( $m \leq n$ ) — полная совокупность различных характеристических показателей системы  $X$ . Рассмотрим произвольную группу решений  $\mathbf{x}^{(n_{1s})}(t), \dots, \mathbf{x}^{(n_{ks})}(t)$  из  $X(t)$ , обладающих одним и тем же характеристическим показателем

$$\chi[\mathbf{x}^{(n_{js})}(t)] = \alpha_s \quad (j = 1, \dots, k; s \in [1, m]).$$

Для любой их линейной комбинации

$$\mathbf{y}(t) = \sum_j a_j \mathbf{x}^{(n_{js})}(t) \quad (a_j \neq 0)$$

имеем

$$\chi[\mathbf{y}(t)] \leq \alpha_s. \quad (3.4.21)$$

С другой стороны, полагая

$$n_{ps} = \min_j n_{js},$$

на основании структуры формул (3.4.20) получаем

$$\mathbf{y}(t) = a_p \mathbf{x}^{(n_{ps})}(t) + \sum_{n_{js} > n_{ps}} a_j \mathbf{x}^{(n_{js})}(t) = a_p \{\mathbf{z}^{(n_{ps})}(t) + \sum_{j > n_{ps}} b_j \mathbf{z}^{(j)}(t)\},$$

где  $a_p \neq 0$  и  $b_j$  — некоторые постоянные, не обязательно отличные от нуля. Отсюда, учитывая способ комплектования функций  $\mathbf{x}^{(j)}(t)$ , находим

$$\chi[\mathbf{y}(t)] \geq \chi[\mathbf{x}^{(n_{ps})}(t)] = \alpha_s.$$

Таким образом,

$$\chi\left[\sum_j a_j \mathbf{x}^{(n_{js})}(t)\right] = \alpha_s \quad (a_j \neq 0). \quad (3.4.22)$$

Рассмотрим теперь произвольную линейную комбинацию

$$\sum_j b_j \mathbf{x}^{(n_j)}(t) \quad (b_j \neq 0)$$

решений из фундаментальной матрицы  $X(t)$ . Выделяя из них максимальные совокупности решений  $\mathbf{x}^{(n_{js})}(t)$ , обладающих одинаковыми характеристическими показателями  $\alpha_s$ , и учитывая формулу (3.4.22); будем иметь

$$\begin{aligned} \chi\left[\sum_j b_j \mathbf{x}^{(n_j)}(t)\right] &= \chi\left[\sum_s \sum_j b_{js} \mathbf{x}^{(n_{js})}(t)\right] = \max_s \chi\left[\sum_j b_{js} \mathbf{x}^{(n_{js})}(t)\right] = \\ &= \max_s \alpha_s = \max_j \chi[\mathbf{x}^{(n_j)}(t)]. \end{aligned}$$

Следовательно, система  $X$  обладает свойством несжимаемости и в силу теоремы Ляпунова является нормальной.

*Следствие.* Если линейная система (3.4.17) имеет треугольную фундаментальную матрицу

$$Z(t) = \begin{bmatrix} z_{11}(t) & 0 & \dots & 0 \\ z_{21}(t) & z_{22}(t) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{n1}(t) & z_{n2}(t) & \dots & z_{nn}(t) \end{bmatrix},$$

то для этой системы существует нормальная треугольная матрица  $X(t) = (x_{jk}(t))$ , где  $x_{jk}(t) = 0$  при  $k > j$ , причем  $x_{jj}(t) = z_{jj}(t)$ .

Этот результат непосредственно вытекает из формулы (3.4.19).

## § 5. Достаточное условие асимптотической устойчивости линейной дифференциальной системы

Пусть

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad (3.5.1)$$

где  $A(t) \in C(a, \infty)$ ,  $\sup_t \|A(t)\| < \infty$ , и  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$  — спектр системы (3.5.1), причем  $m \leq n$ .

**Теорема.** Для асимптотической устойчивости линейной однородной системы (3.5.1) достаточно, чтобы наибольший характеристический ее показатель был бы отрицательным, т. е.

$$\alpha = \max_k \alpha_k < 0. \quad (3.5.2)$$

**Доказательство.** Пусть  $\mathbf{x}(t) \neq \mathbf{0}$  — произвольное нетривиальное решение системы (3.5.1). Выберем  $\varepsilon > 0$  столь малым, чтобы имело место неравенство

$$\alpha + \varepsilon < 0.$$

Так как

$$\chi[\mathbf{x}(t)] < \alpha + \varepsilon,$$

то имеем

$$\frac{\|\mathbf{x}(t)\|}{e^{(\alpha+\varepsilon)t}} \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty,$$

т. е.

$$\mathbf{x}(t) = o(e^{(\alpha+\varepsilon)t}) \quad \text{при } t \rightarrow \infty$$

и, следовательно,  $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0}$  при  $t \rightarrow \infty$ . Отсюда следует (§ 7, теорема 2), что система (3.5.1) (т. е. все ее решения) асимптотически устойчива при  $t \rightarrow \infty$ .

**З а м е ч а н и е.** Пусть  $X(t) = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$  — нормальная фундаментальная система решений и

$$\chi[\mathbf{x}_j] = \alpha_j \quad (j = 1, \dots, n).$$

Положим

$$\mathbf{x}_j = e^{\alpha_j t} \xi_j,$$

имеем (см. § 1, теорема 3, следствие)

$$\alpha_j = \chi[\mathbf{x}_j] = \alpha_j + \chi[\xi_j],$$

т. е.

$$\chi[\xi_j] = 0.$$

Таким образом, общее решение системы (3.5.1) может быть записано в виде

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n c_j \xi_j(t) e^{\alpha_j t}, \quad (3.5.3)$$

где  $c_j$  — произвольные постоянные,  $\chi[\xi_j(t)] = 0$ ,  $\alpha_j$  — точки спектра,  $\xi_j(t) e^{\alpha_j t}$  — линейно независимые частные решения; при этом  $\alpha_j$  повторяется столько раз, сколько раз встречается частное решение с характеристическим показателем  $\alpha_j$  в нормальной фундаментальной системе решений.



### § 6. Неравенство Важевского

Теорема (см. [22]). Для любого решения линейной дифференциальной системы

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \quad (A(t) \in C[t_0, \infty)) \quad (3.6.1)$$

при  $t_0 \leq t < \infty$  справедливо неравенство

$$|x(t_0)| \exp \int_{t_0}^t \lambda(t_1) dt_1 \leq |x(t)| \leq |x(t_0)| \exp \int_{t_0}^t \Lambda(t_1) dt_1, \quad (3.6.2)$$

где  $|x(t)|$  — евклидова норма вектора  $x(t)$ ;  $\lambda(t)$  и  $\Lambda(t)$  — наименьший и наибольший характеристические корни эрмитово-симметризованной матрицы:

$$A^H(t) = \frac{1}{2} [A(t) + A^*(t)], \quad (3.6.3)$$

причем  $A(t) = [a_{jk}(t)]$  и  $A^*(t) = [\overline{a_{kj}(t)}]$  — ее эрмитово-сопряженная матрица.

Доказательство. Пусть

$$x = \text{colon } [x_1, \dots, x_n]$$

— нетривиальное решение системы (3.6.1) и

$$x^* = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$$

— эрмитово сопряженный вектор-строка. Очевидно,

$$|x|^2 = x^*x.$$

В силу системы (3.6.1), учитывая, что

$$\frac{dx^*}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}\right)^* = x^*A^*(t),$$

получаем

$$\frac{d}{dt} (|x|^2) = x^* \frac{dx}{dt} + \frac{dx^*}{dt} x = x^* A(t)x + x^* A^*(t)x = 2x^* A^H(t)x. \quad (3.6.4)$$

Так как матрица  $A^H(t)$  эрмитова, то при любом  $t \in [t_0, \infty)$  будем иметь (гл. I, § 5)

$$\lambda(t)x^*x \leq x^*A^H(t)x \leq \Lambda(t)x^*x,$$

где  $\lambda(t)$  и  $\Lambda(t)$  — соответственно наименьший и наибольший корни векового уравнения

$$\det [A^H(t) - \lambda E] = 0.$$

Поэтому на основании формулы (3.6.4) находим

$$2\lambda(t) |\mathbf{x}|^2 \leq \frac{d}{dt} (|\mathbf{x}|^2) \leq 2\Lambda(t) |\mathbf{x}|^2. \quad (3.6.5)$$

Интегрируя неравенство (3.6.5) в пределах от  $t_0$  до  $t$ , получим формулу (3.6.2).

Формула (3.6.2), очевидно, справедлива также и для тривиального решения  $\mathbf{x} \equiv 0$ .

Следствие 1. Для асимптотической устойчивости линейной однородной системы (3.6.1) достаточно выполнения условия

$$\Lambda(t) \leq -h < 0 \quad \text{при } t \in [t_0, \infty),$$

где  $h$  — положительная постоянная.

Следствие 2. Спектр линейной системы (3.6.1) целиком расположен на отрезке  $[l, L]$ , где

$$l = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \lambda(t_1) dt_1$$

и

$$L = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \Lambda(t_1) dt_1.$$

Для асимптотической устойчивости системы (3.6.1) достаточно, чтобы было

$$L < 0.$$

## § 7. Неравенство Ляпунова

Пусть линейная дифференциальная система

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t) \mathbf{x} \quad (3.7.1)$$

с ограниченной действительной матрицей  $A(t) \in C[t_0, \infty)$  имеет спектр

$$-\infty < \alpha_1 < \dots < \alpha_m < +\infty \quad (m \leq n).$$

Обозначим через  $X(t) = (x_{jk}(t))$  ее фундаментальную матрицу, где первый индекс  $j$ , как всегда, обозначает номер координаты, а второй  $k$  — номер решения, и пусть

$$\sigma_X = \sum_{k=1}^n \chi[\mathbf{x}^{(k)}] = \sum_{s=1}^m n_s \alpha_s \quad (3.7.2)$$

— сумма характеристических показателей всех решений из  $X(t)$ , где число  $n_s$  ( $n_s \geq 1$ ) показывает, сколько решений с характеристическим показателем  $\alpha_s$  содержится в системе  $X(t)$ .

Рассмотрим определитель Вронского

$$W(t) = \det X(t).$$

Развертывая определитель  $W(t)$ , согласно обычным правилам, будем иметь

$$W(t) = \sum_{(p_1, \dots, p_n)} (-1)^x x_{p_1 1}(t) \dots x_{p_n n}(t), \quad (3.7.3)$$

где сумма (3.7.2) распространена на все перестановки  $(p_1, \dots, p_n)$  из  $n$  элементов  $1, \dots, n$  и  $(-1)^x$  — сигнатура перестановки, равная  $+1$ , если перестановка четная, и  $-1$ , если перестановка нечетная. Используя теоремы о характеристических показателях суммы и произведения (§ 1) и учитывая равенство (3.7.2), получим

$$\chi[W(t)] \leq \max_{(p_1, \dots, p_n)} \{\chi[x_{p_1 1}(t)] + \dots + \chi[x_{p_n n}(t)]\} \leq \sigma_X. \quad (3.7.4)$$

С другой стороны, на основании формулы Остроградского — Лнувилля (гл. II, § 3) имеем

$$W(t) = W(t_0) \exp \int_{t_0}^t \text{Sp } A(t_1) dt_1;$$

поэтому

$$\chi[W(t)] = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |W(t)| = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \text{Sp } A(t_1) dt_1.$$

Отсюда на основании неравенства (3.7.4) получаем *неравенство Ляпунова*

$$\sigma_X = \sum_{k=1}^m n_k \alpha_k \geq \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \text{Sp } A(t_1) dt_1. \quad (3.7.5)$$

Так как матрица  $A(t)$  ограничена, то, очевидно,

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \text{Sp } A(t_1) dt_1 = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t \text{Sp } A(t_1) dt_1.$$

Следовательно,

$$\sigma_X \geq \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t \text{Sp } A(t_1) dt_1.$$

Таким образом, для линейной однородной дифференциальной системы с непрерывной ограниченной матрицей сумма характе-

ристических показателей решений из любой ее фундаментальной системы  $X$  не меньше верхнего предела от среднего значения следа матрицы системы. В частности, неравенство (3.7.5) справедливо для нормальной фундаментальной системы  $X$ , где сумма  $\sigma_X$  имеет наименьшее значение.

Замечание. Если матрица  $A(t)$  комплексная, то неравенство Ляпунова (3.7.5), очевидно, имеет вид

$$\sigma_X \geq \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \operatorname{Re Sp} A(t_1) dt_1. \quad (3.7.6)$$

Приведем достаточное условие нормальности фундаментальной системы решений.

Теорема. Если для фундаментальной системы решений  $X(t)$  линейной однородной дифференциальной системы с матрицей  $A(t)$  выполнено равенство Ляпунова

$$\sigma_X = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \operatorname{Re Sp} A(t_1) dt_1, \quad (3.7.7)$$

то эта система нормальная.

Доказательство. Действительно, если система  $X$  не является нормальной, то существует фундаментальная система  $Z$ , для которой

$$\sigma_Z < \sigma_X = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \operatorname{Re Sp} A(t_1) dt_1, \quad (3.7.8)$$

что противоречит неравенству Ляпунова (3.7.6).

Замечание. Существуют нормальные фундаментальные системы, для которых не выполнено равенство Ляпунова.

Пример. Пусть

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y [\sin(\ln t) + \cos(\ln t)], \\ \frac{dy}{dt} &= x [\sin(\ln t) + \cos(\ln t)] \end{aligned} \right\} \quad (3.7.9)$$

$$(1 \leq t < \infty).$$

Тогда получаем

$$\left. \begin{aligned} x + y &= 2c_1 e^{t \sin(\ln t)}, \\ x - y &= 2c_2 e^{-t \sin(\ln t)}, \end{aligned} \right\}$$

где  $c_1$  и  $c_2$  — произвольные постоянные. Отсюда

$$\left. \begin{aligned} x &= c_1 e^{t \sin(\ln t)} + c_2 e^{-t \sin(\ln t)}, \\ y &= c_1 e^{t \sin(\ln t)} - c_2 e^{-t \sin(\ln t)}. \end{aligned} \right\}$$

Так как при  $|c_1| + |c_2| \neq 0$  имеем

$$\chi [x] = \chi [y] = 1,$$

то любая фундаментальная система  $X = \{x, y\}$  является нормальной и

$$\sigma_X = 2.$$

Однако для матрицы  $A(t)$  системы (3.7.9), очевидно, имеем

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & \sin(\ln t) + \cos(\ln t) \\ \sin(\ln t) + \cos(\ln t) & 0 \end{bmatrix}.$$

Отсюда

$$\text{Sp } A(t) = 0$$

и, следовательно,

$$\sigma_X > \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \text{Sp } A(t_1) dt_1.$$

## § 8. Приводимые системы. Теорема Н. П. Еругина

Определение 1. Матрица  $L(t) \in C^1[t_0, \infty)$ , вообще говоря, комплексная, называется *матрицей Ляпунова*, если выполнены следующие условия (см. [13], [20]):

1)  $L(t)$  и  $\dot{L}(t)$  ограничены на промежутке  $[t_0, \infty)$ , т. е.

$$\sup_t \|L(t)\| < \infty, \quad \sup_t \|\dot{L}(t)\| < \infty$$

при  $t_0 \leq t < \infty$ ;

2)  $|\det L(t)| \geq m > 0$ ,

где  $m$  — некоторая положительная постоянная.

Очевидно,

$$|\det L(t)| \leq M < \infty.$$

Заметим, что матрица  $L^{-1}(t)$ , обратная матрице Ляпунова  $L(t)$ , есть также матрица Ляпунова.

Действительно, если  $L(t) = [l_{jk}(t)]$  — матрица Ляпунова и  $L_{jk}(t)$  — алгебраическое дополнение элемента  $l_{jk}(t)$ , то

$$L^{-1}(t) = \frac{[L_{kj}(t)]}{\det L(t)}.$$

Отсюда, учитывая условия 1) и 2), будем иметь

$$\sup_t \|L^{-1}(t)\| < \infty,$$

причем, очевидно,  $L^{-1}(t) \in C^1[t_0, \infty)$  и  $\frac{d}{dt} [L^{-1}(t)]$  ограничена.

Кроме того,

$$|\det L^{-1}(t)| = \frac{1}{|\det L(t)|} \geq \frac{1}{M} > 0.$$

Таким образом,  $L^{-1}(t)$  — матрица Ляпунова.

Определение 2. Линейное преобразование

$$\mathbf{y} = L(t) \mathbf{x} \quad (3.8.1)$$

с  $(n \times n)$ -матрицей Ляпунова  $L(t)$ , где  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  —  $(n \times 1)$ -векторы, называется *преобразованием Ляпунова*.

Лемма. При преобразовании Ляпунова (3.8.1), произведенном над линейной дифференциальной системой

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t) \mathbf{x}, \quad (3.8.2)$$

характеристические показатели ее решений  $\mathbf{x}$  сохраняются.

Действительно, из (3.8.1) имеем

$$\mathbf{x} = L^{-1}(t) \mathbf{y}.$$

Следовательно,

$$\|\mathbf{y}\| \leq \|L(t)\| \|\mathbf{x}\|$$

и

$$\|\mathbf{x}\| \leq \|L^{-1}(t)\| \|\mathbf{y}\|.$$

Отсюда, учитывая, что  $\|L(t)\|$  и  $\|L^{-1}(t)\|$  ограничены, получаем

$$\chi[\mathbf{y}] = \chi[\|\mathbf{y}\|] \leq \chi[\|L(t)\|] + \chi[\|\mathbf{x}\|] = \chi[\mathbf{x}]$$

и

$$\chi[\mathbf{x}] \leq \chi[\mathbf{y}].$$

Таким образом,

$$\chi[\mathbf{x}] = \chi[\mathbf{y}].$$

Определение 3. Согласно Ляпунову, однородная линейная дифференциальная система (3.8.2) называется *приводимой*, если с помощью некоторого преобразования Ляпунова она может быть преобразована в линейную систему

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = B\mathbf{y} \quad (3.8.3)$$

с постоянной матрицей  $B$ .

Н. П. Еругиным получены необходимые и достаточные условия приводимости линейной системы (см. [20]).

Теорема Еругина. *Линейная дифференциальная система (3.8.2) приводима тогда и только тогда, когда некоторая ее фундаментальная матрица  $X(t)$  может быть представлена в виде матрицы Ляпунова  $L(t)$ , умноженной на экспоненциал произведённой независимой переменной  $t$  на постоянную матрицу  $B$ , т. е.*

$$X(t) = L(t) e^{tB}. \quad (3.8.4)$$

Доказательство. 1) Докажем сначала необходимость условия теоремы. Пусть система (3.8.2) приводима. Тогда с помощью преобразования Ляпунова

$$\mathbf{x} = L(t) \mathbf{y} \quad (3.8.5)$$

ее можно преобразовать в линейную систему

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = B\mathbf{y} \quad (3.8.6)$$

с некоторой постоянной матрицей  $B$ . Фундаментальная матрица  $Y = Y(t)$  системы (3.8.6) удовлетворяет матричному уравнению (гл. II, § 2)

$$\dot{Y} = BY. \quad (3.8.7)$$

Отсюда получаем (ср. гл. II, § 8)

$$Y(t) = e^{tBC}, \quad (3.8.8)$$

где  $C$  — произвольная неособенная постоянная матрица ( $\det C \neq 0$ ). В силу формулы (3.8.5) фундаментальная матрица системы (3.8.2) будет иметь вид

$$X(t) = L(t) Y(t) = L(t) e^{tBC}.$$

Выбрав  $C = E$ , мы и получим формулу (3.8.4).

2) Докажем теперь достаточность условия теоремы. Пусть имеет место формула (3.8.4). Отсюда

$$L(t) = X(t) e^{-tB}.$$

В уравнении (3.8.2) произведем преобразование Ляпунова:

$$\mathbf{x} = X(t) e^{-tB} \mathbf{y}.$$

Тогда

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} \equiv X(t) e^{-tB} \frac{d\mathbf{y}}{dt} + \dot{X}(t) e^{-tB} \mathbf{y} - X(t) e^{-tB} B \mathbf{y} = A(t) X(t) e^{-tB} \mathbf{y}. \quad (3.8.9)$$

Так как

$$\dot{X}(t) = A(t) X(t),$$

то в формуле (3.8.9) два члена сокращаются и мы имеем

$$X(t) e^{-tB} \frac{d\mathbf{y}}{dt} = X(t) e^{-tB} B \mathbf{y},$$

т. е.

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = B \mathbf{y}.$$

Таким образом, система (3.8.2) приводима.

**Замечание.** В формуле (3.8.4) матрица  $B$  может быть взята в жордановой форме.

Нетрудно сформулировать условия устойчивости приводимой системы.

**Теорема.** 1) *Приводимая линейная однородная система устойчива тогда и только тогда, когда все характеристические показатели ее неположительны, причем нулевым характеристическим показателям отвечают простые элементарные делители, если их рассматривать как вещественные части собственных значений соответствующей постоянной матрицы.*

2) *Приводимая линейная однородная система асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда все характеристические показатели ее отрицательны.*

Доказательство непосредственно вытекает из того обстоятельства, что характеристические показатели приводимой системы (3.8.2) равны действительным частям корней соответствующего векового уравнения

$$\det (B - \lambda E) = 0,$$

где система

$$\frac{dy}{dt} = By$$

устойчива или неустойчива одновременно с данной системой.

## § 9. Приводимость к системе с нулевой матрицей

Пусть линейная система

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \quad (3.9.1)$$

(где  $A(t)$  — ограниченная непрерывная действительная матрица) с помощью преобразования Ляпунова

$$x = L(t)y \quad (3.9.2)$$

преобразуется в систему

$$\frac{dy}{dt} = 0 \quad (3.9.3)$$

с нулевой матрицей. Так как общее решение системы (3.9.3) есть

$$y = c, \quad (3.9.4)$$

то в этом случае семейство интегральных кривых линейной системы (3.9.1) в пространстве  $I_t^1 \times \mathcal{R}_x^n$  (рис. 18) может быть взаимно однозначно и непрерывно отображено на семейство парал-



тельных прямых в пространстве  $I_t^* \times \mathcal{R}_y^n$  (рис. 19), т. е. при отображении (3.9.2) различными интегральными кривыми  $x = x(t)$  соответствуют различные прямые  $y = c$  и обратно.

Заметим, что если линейная система (3.9.1) преобразуется в систему с нулевой матрицей, то в силу формул (3.9.2) и (3.9.4) все ее решения ограничены.

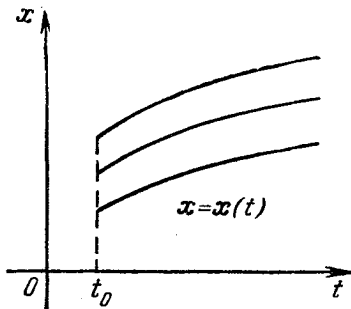


Рис. 18.

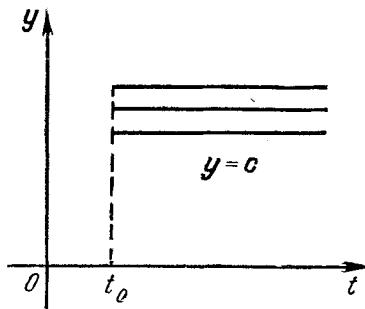


Рис. 19.

**Теорема.** Если 1) все решения  $x(t)$  линейной однородной дифференциальной системы (3.9.1) ограничены в промежутке  $[t_0, \infty)$ ; 2) интеграл от следа матрицы системы ограничен снизу, т. е.

$$\int_{t_0}^t \text{Sp } A(t_1) dt_1 \geq a > -\infty,$$

где  $a$  — постоянная, то система (3.9.1) с помощью преобразования Ляпунова может быть преобразована в систему с нулевой матрицей.

**Доказательство** (см. [12]). Пусть  $X(t)$  — фундаментальная матрица системы (3.9.1). Покажем, что  $X(t)$  есть матрица Ляпунова. Действительно, очевидно,  $X(t) \in C^1[t_0, \infty)$ . Далее, на основании условия 1) имеем

$$\|X(t)\| \leq c, \quad \|\dot{X}(t)\| \leq \|A(t)\| \|X(t)\| \leq c_1,$$

где  $c$  и  $c_1$  — некоторые положительные постоянные. Кроме того, используя формулу Остроградского — Лиувилля (гл. II, § 3)

$$\det X(t) = \det X(t_0) \exp \int_{t_0}^t \text{Sp } A(t_1) dt_1,$$

в силу условия (2) получаем

$$|\det X(t)| = |\det X(t_0)| \exp \int_{t_0}^t \text{Sp } A(t_1) dt_1 \geq |\det X(t_0)| e^a = c_2 > 0$$

при  $t \geq t_0$ , где  $c_2$  — постоянная. Таким образом,  $X(t)$  — матрица Ляпунова.

В уравнении (3.9.1) положим

$$\mathbf{x} = X(t) \mathbf{y},$$

тогда

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} \equiv X(t) \frac{d\mathbf{y}}{dt} + \dot{X}(t) \mathbf{y} = A(t) X(t) \mathbf{y},$$

или так как

$$\dot{X}(t) = A(t) X(t),$$

то

$$X(t) \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{0}. \quad (3.9.5)$$

Так как  $X(t)$  — неособенная матрица, то, умножая на  $X^{-1}(t)$  обе части уравнения (3.9.5), окончательно будем иметь

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{0}.$$

Теорема доказана.

*Следствие.* Если матрица  $A(t)$  системы (3.9.1) абсолютно интегрируема, т. е.

$$\int_{t_0}^{\infty} \|A(t_1)\| dt_1 = k < \infty, \quad (3.9.6)$$

то эта система приводима к системе с нулевой матрицей.

Действительно, из уравнения (3.9.1) при  $t \geq t_0$  имеем

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t A(t_1) \mathbf{x}(t_1) dt_1.$$

Отсюда

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \|\mathbf{x}(t_0)\| + \int_{t_0}^t \|A(t_1)\| \|\mathbf{x}(t_1)\| dt_1.$$

Используя лемму Гронуолла—Беллмана (гл. II, § 10) и условие (3.9.6), получаем

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \|\mathbf{x}(t_0)\| \exp \int_{t_0}^t \|A(t_1)\| dt_1 \leq \|\mathbf{x}(t_0)\| e^k.$$

Следовательно, все решения системы (3.9.1) ограничены в промежутке  $[t_0, \infty)$ .

Кроме того, если  $A(t) = [a_{jk}(t)]$ , то, очевидно, имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_0}^t \text{Sp } A(t_1) dt_1 \right| &\leq \int_{t_0}^t |\text{Sp } A(t_1)| dt_1 \leq \int_{t_0}^t \sum_j |a_{jj}(t_1)| dt_1 \leq \\ &\leq n \int_{t_0}^t \|A(t_1)\| dt_1 \leq nK. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\int_{t_0}^t \text{Sp } A(t_1) dt_1 \geq - \left| \int_{t_0}^t \text{Sp } A(t_1) dt_1 \right| \geq -nK.$$

Таким образом, все условия теоремы выполнены и система (3.9.1) приводима к системе с нулевой матрицей.

## § 10. Асимптотически эквивалентные системы

Определение. Будем говорить, что дифференциальные системы

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (3.10.1)$$

и

$$\frac{dy}{dt} = g(t, y) \quad (3.10.2)$$

асимптотически эквивалентны, если между решениями их  $x(t)$  и  $y(t)$  можно установить взаимно однозначное соответствие такое, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [x(t) - y(t)] = 0. \quad (3.10.3)$$

Укажем простой признак асимптотической эквивалентности линейных дифференциальных систем.

Теорема Левинсона (см. [23]). Пусть решения системы

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad (3.10.4)$$

где  $A$  — постоянная  $(n \times n)$ -матрица, ограничены на  $[0, \infty)$ . Тогда система

$$\frac{dy}{dt} = [A + B(t)]y, \quad (3.10.5)$$

где  $B(t) \in C[0, \infty)$  и

$$\int_0^{\infty} \|B(t)\| dt < \infty, \quad (3.10.6)$$

асимптотически эквивалентна системе (3.10.4).

Доказательство. Изложим доказательство, идея которого принадлежит Брауеру [24]. Прежде всего, так как решения системы (3.10.4) ограничены, то характеристические корни  $\lambda(A)$  матрицы  $A$  удовлетворяют неравенству

$$\operatorname{Re} \lambda(A) \leq 0,$$

причем характеристические корни с нулевыми вещественными частями имеют простые элементарные делители (см. гл. II, § 8).

Без нарушения общности рассуждения мы предположим, что матрица  $A$  имеет квазидиагональный вид

$$A = \operatorname{diag}(A_1, A_2), \quad (3.10.7)$$

где  $A_1$  и  $A_2$  — соответственно,  $(p \times p)$ - и  $(q \times q)$ -матрицы ( $p + q = n$ ) такие, что

$$\operatorname{Re} \lambda(A_1) < -\alpha < 0, \quad \operatorname{Re} \lambda(A_2) = 0. \quad (3.10.8)$$

Действительно, в случае надобности этого можно добиться с помощью неособенных преобразований

$$\xi = Sx, \quad \eta = Sy,$$

где  $S$  — постоянная  $(n \times n)$ -матрица, причем взаимно однозначное соответствие между новыми интегральными кривыми  $\xi(t) \iff \eta(t)$  индуцирует взаимно однозначное соответствие между старыми интегральными кривыми  $x(t) = S^{-1}\xi(t) \iff S^{-1}\eta(t) = y(t)$ . Кроме того, из предельного соотношения  $\xi(t) - \eta(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , очевидно, вытекает предельное соотношение  $x(t) - y(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

1) Пусть

$$X(t) = \operatorname{diag}(e^{tA_1}, e^{tA_2})$$

— фундаментальная матрица системы (3.10.4), нормированная в нуле:  $X(0) = E$ , и

$$I_1 = \operatorname{diag}(E_p, 0), \quad I_2 = \operatorname{diag}(0, E_q),$$

где  $E_p$  и  $E_q$  — единичные матрицы соответствующих порядков  $p$  и  $q$ , при этом, очевидно,  $I_1 + I_2 = E_n$ . Положим

$$X(t) = X_1(t) + X_2(t),$$

где

$$X_1(t) = X(t) I_1 \equiv \operatorname{diag}(e^{tA_1}, 0)$$

и

$$X_2(t) = X(t) I_2 \equiv \operatorname{diag}(0, e^{tA_2}).$$

Отсюда матрицу Коши

$$K(t, \tau) \equiv X(t) X^{-1}(\tau) = X(t - \tau)$$

можно представить в виде

$$K(t, \tau) = X_1(t - \tau) + X_2(t - \tau),$$

причем на основании условий (3.10.8) имеем

$$\|X_1(t)\| = \|e^{tA_1}\| \leq ae^{-at} \quad \text{при } 0 \leq t < \infty \quad (3.10.9)$$

и

$$\|X_2(t)\| = \|e^{tA_2}\| \leq b \quad \text{при } -\infty < t < \infty, \quad (3.10.10)$$

где  $a$  и  $b$  — некоторые положительные постоянные.

Используя метод вариации произвольных постоянных (гл. II, § 5), дифференциальное уравнение (3.10.5) можно записать в интегральной форме

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) = X(t - t_0)\mathbf{y}(t_0) + \\ + \int_{t_0}^t X_1(t - \tau)B(\tau)\mathbf{y}(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t X_2(t - \tau)B(\tau)\mathbf{y}(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

где  $t_0 \in [0, \infty)$  произвольно. Ввиду абсолютной интегрируемости матрицы  $B(t)$  на  $[0, \infty)$  все решения  $\mathbf{y}(t)$  системы (3.10.5) ограничены на  $[0, \infty)$  (гл. II, § 12), и поэтому несобственный интеграл  $\int_{t_0}^{\infty} X_2(t - \tau)B(\tau)\mathbf{y}(\tau) d\tau$  является сходящимся. Отсюда, учитывая, что

$$\begin{aligned} X_2(t - \tau) &= X(t - \tau)I_2 = \\ &= X(t - t_0)X(t_0 - \tau)I_2 = X(t - t_0)X_2(t_0 - \tau), \end{aligned}$$

наше интегральное уравнение можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) = X(t - t_0) \left[ \mathbf{y}(t_0) + \int_{t_0}^{\infty} X_2(t_0 - \tau)B(\tau)\mathbf{y}(\tau) d\tau \right] + \\ + \int_{t_0}^t X_1(t - \tau)B(\tau)\mathbf{y}(\tau) d\tau - \int_{t_0}^{\infty} X_2(t - \tau)B(\tau)\mathbf{y}(\tau) d\tau. \quad (3.10.11) \end{aligned}$$

Решению  $\mathbf{y}(t)$  системы (3.10.5) с начальным условием  $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$  сопоставим решение  $\mathbf{x}(t)$  системы (3.10.4) с начальным условием

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{y}(t_0) + \int_{t_0}^{\infty} X_2(t_0 - \tau)B(\tau)\mathbf{y}(\tau) d\tau. \quad (3.10.12)$$

Так как решения  $\mathbf{x}(t)$  и  $\mathbf{y}(t)$  полностью определяются своими начальными условиями, то формула (3.10.12) устанавливает однозначное соответствие между множеством всех решений  $\{\mathbf{y}(t)\}$  системы (3.10.5) и множеством решений  $\{\mathbf{x}(t)\}$  (или его частью)

системы (3.10.4). Заметим, что соотношение (3.10.12) непрерывно относительно начального значения  $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$ .

2) Покажем, что соответствие между решениями  $\mathbf{x}(t)$  и  $\mathbf{y}(t)$ ; определяемое формулой (3.10.12), является взаимно однозначным и распространяется на все множество решений  $\{\mathbf{x}(t)\}$ .

Пусть  $Y(t)$  — фундаментальная матрица системы (3.10.5) такая, что  $Y(t_0) = E$ . Имеем

$$\dot{Y}(t) = AY(t) + B(t)Y(t).$$

Отсюда на основании метода вариации произвольных постоянных получим

$$Y(t) = X(t - t_0) + \int_{t_0}^t X(t - \tau) B(\tau) Y(\tau) d\tau.$$

Но из неравенств (3.10.9) и (3.10.10) вытекает

$$\|X(t - t_0)\| \leq \max(a, b) = c \quad \text{при } t \geq t_0;$$

поэтому

$$\|Y(t)\| \leq c + \int_{t_0}^t c \|B(\tau)\| \|Y(\tau)\| d\tau$$

и, следовательно, в силу леммы Гронуолла — Беллмана (гл. II, § 11) находим

$$\begin{aligned} \|Y(t)\| &\leq c \exp\left(\int_{t_0}^t c \|B(\tau)\| d\tau\right) \leq \\ &\leq c \exp\left(c \int_0^\infty \|B(\tau)\| d\tau\right) = k \quad \text{при } t_0 \leq t < \infty. \end{aligned} \quad (3.10.13)$$

причем постоянная  $k$  в оценке (3.10.13) не зависит от выбора начального момента  $t_0$  ( $t_0 \geq 0$ ).

Очевидно, имеем

$$\mathbf{y}(t) = Y(t)\mathbf{y}(t_0).$$

Поэтому из формулы (3.10.12) получаем

$$\mathbf{x}(t_0) = [E + Z(t_0)]\mathbf{y}(t_0), \quad (3.10.14)$$

где

$$Z(t_0) = \int_{t_0}^\infty X_2(t_0 - \tau) B(\tau) Y(\tau) d\tau,$$

причем на основании (3.10.10) и (3.10.13) выводим

$$\|Z(t_0)\| \leq \int_{t_0}^\infty \|X_2(t_0 - \tau)\| \|B(\tau)\| \|Y(\tau)\| d\tau \leq bk \int_{t_0}^\infty \|B(\tau)\| d\tau. \quad (3.10.15)$$

Так как матрица  $B(t)$  абсолютно интегрируема на  $[0, \infty)$ , то

$$\int_{t_0}^{\infty} \|B(\tau)\| d\tau \rightarrow 0 \quad \text{при } t_0 \rightarrow \infty$$

и, следовательно, в силу (3.10.15) начальный момент  $t_0$  можно выбрать столь большим, чтобы имело место неравенство

$$\det [E + Z(t_0)] > 0. \quad (3.10.16)$$

В дальнейшем  $t_0$  будем считать фиксированным и предполагать наличие неравенства (3.10.16). Отсюда и из формулы (3.10.14) выводим

$$\mathbf{y}(t_0) = [E + Z(t_0)]^{-1} \mathbf{x}(t_0). \quad (3.10.17)$$

Так как формулы (3.10.14) и (3.10.17) равносильны, то для каждого решения  $\mathbf{x}(t)$  системы (3.10.4) с начальным условием  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  найдется одно и только одно решение  $\mathbf{y}(t)$  системы (3.10.5), отвечающее установленному выше соответствию, а именно, это решение, начальное условие  $\mathbf{y}(t_0)$  которого определяется формулой (3.10.17). Соответствие между решениями  $\mathbf{y}(t)$  и  $\mathbf{x}(t)$ , устанавливаемое формулами (3.10.14) и (3.10.17), — взаимно однозначное, т. е. каждому решению  $\mathbf{y}(t)$  соответствует одно и только одно решение  $\mathbf{x}(t)$  и наоборот. Отметим, что тривиальному решению  $\mathbf{y} \equiv \mathbf{0}$  соответствует тривиальное решение  $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$  и в силу линейности соотношений (3.10.14) и (3.10.17) различным решениям  $\mathbf{y}_1(t)$  и  $\mathbf{y}_2(t)$  системы (3.10.5) соответствуют различные решения  $\mathbf{x}_1(t)$  и  $\mathbf{x}_2(t)$  системы (3.10.4) и наоборот.

3) Для соответствующих решений  $\mathbf{x}(t)$  и  $\mathbf{y}(t)$  оценим норму их разности. Так как, очевидно,

$$\mathbf{x}(t) = X(t - t_0) \mathbf{x}(t_0),$$

где  $\mathbf{x}(t_0)$  определяется формулой (3.10.12), то из формулы (3.10.11) имеем

$$\mathbf{y}(t) - \mathbf{x}(t) = \int_{t_0}^t X_1(t - \tau) B(\tau) \mathbf{y}(\tau) d\tau - \int_t^{\infty} X_2(t - \tau) B(\tau) \mathbf{y}(\tau) d\tau.$$

Отсюда, учитывая, что

$$\begin{aligned} \|\mathbf{y}(t)\| &= \|Y(t)\mathbf{y}(t_0)\| \leq \\ &\leq \|Y(t)\| \|\mathbf{y}(t_0)\| \leq k \|\mathbf{y}(t_0)\| \quad \text{при } t \geq t_0, \end{aligned}$$

на основании оценок (3.10.9) и (3.10.10) при  $t \geq t_0$  получаем

$$\begin{aligned} \|\mathbf{y}(t) - \mathbf{x}(t)\| &\leq \int_{t_0}^t \|X_1(t-\tau)\| \|B(\tau)\| \|\mathbf{y}(\tau)\| d\tau + \\ &+ \int_{t_0}^{\infty} \|X_2(t-\tau)\| \|B(\tau)\| \|\mathbf{y}(\tau)\| d\tau \leq \\ &\leq ak \|\mathbf{y}(t_0)\| \int_{t_0}^t e^{-\alpha(t-\tau)} \|B(\tau)\| d\tau + \\ &+ bk \|\mathbf{y}(t_0)\| \int_{t_0}^{\infty} \|B(\tau)\| d\tau. \end{aligned} \quad (3.10.18)$$

Ввиду абсолютной интегрируемости матрицы  $B(t)$  при  $t \geq 2t_0$  имеем

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t e^{-\alpha(t-\tau)} \|B(\tau)\| d\tau &= \\ &= \int_{t_0}^{\frac{t}{2}} e^{-\alpha(t-\tau)} \|B(\tau)\| d\tau + \int_{\frac{t}{2}}^t e^{-\alpha(t-\tau)} \|B(\tau)\| d\tau \leq \\ &\leq e^{-\frac{\alpha t}{2}} \int_0^{\infty} \|B(\tau)\| d\tau + \int_{\frac{t}{2}}^t \|B(\tau)\| d\tau < \varepsilon, \end{aligned}$$

если  $t > T$ . Следовательно,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t e^{-\alpha(t-\tau)} \|B(\tau)\| d\tau = 0.$$

Таким образом, из неравенства (3.10.18) выводим

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\mathbf{y}(t) - \mathbf{x}(t)] = 0,$$

т. е. системы (3.10.4) и (3.10.5) асимптотически эквивалентны.

*Замечание.* Если  $A_2 = 0$ , то  $X_2(t) = 0$  и, следовательно,  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{y}(t_0)$ . В этом случае теорема тривиальна.

*Следствие.* Пусть

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = B(t)\mathbf{y}, \quad (3.10.19)$$

где  $B(t)$  абсолютно интегрируема на  $[0, \infty)$ . Тогда для каждого решения  $\mathbf{y}(t)$  существует

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{y}(t) = c, \quad (3.10.20)$$



т. е. все интегральные кривые  $y = y(t)$  имеют горизонтальные асимптоты (рис. 20), причем различные интегральные кривые  $y = y_1(t)$  и  $y = y_2(t)$  имеют различные горизонтальные асимптоты  $y = c_1$  и  $y = c_2$  и, сверх того, для каждой горизонтальной прямой  $y = c$  существует интегральная кривая  $y = y(t)$ , имеющая эту прямую своей асимптотой.

Действительно, в силу теоремы система (3.10.19) асимптотически эквивалентна системе

$$\frac{dx}{dt} = 0 \quad (3.10.21)$$

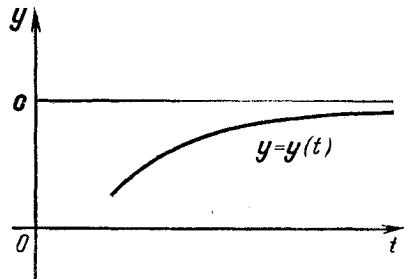


Рис. 20.

с матрицей  $A = 0$ . Так как система (3.10.21) имеет решения

$$x = c,$$

то отсюда вытекает предельное соотношение (3.10.20).

## § 11. Правильные системы

Рассмотрим линейную дифференциальную систему

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \quad (3.11.1)$$

с ограниченной действительной непрерывной матрицей  $A(t)$ :

$$A(t) \in C[t_0, \infty) \text{ и } \sup_t \|A(t)\| < \infty.$$

Пусть

$$\sigma = \sum_{k=1}^m n_k \alpha_k \quad (3.11.2)$$

— сумма характеристических показателей (с учетом их кратностей  $n_k$ ) решений системы (3.11.1), входящих в некоторую ее нормальную фундаментальную систему.

**О п р е д е л е н и е.** Действительная линейная система называется *правильной по Ляпунову* (см. [13]), если сумма характеристических показателей ее совпадает с нижним пределом среднего значения следа матрицы системы, т. е. если имеет место равенство

$$\sigma = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \text{Sp } A(t_1) dt_1. \quad (3.11.3)$$

Замечание. Если матрица  $A(t)$  комплексная, то условие правильности линейной системы записывается следующим образом:

$$\sigma = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \operatorname{Re} \operatorname{Sp} A(t_1) dt_1.$$

Лемма. *Линейная дифференциальная система (3.11.1) является правильной тогда и только тогда, когда 1) существует предел среднего значения вещественной части следа матрицы системы*

$$S = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \operatorname{Re} \operatorname{Sp} A(t_1) dt_1; \quad (3.11.4)$$

2) выполнено равенство Ляпунова

$$\sigma = S. \quad (3.11.5)$$

Достаточность леммы очевидна. Докажем необходимость ее.

Действительно, если система правильная и

$$\underline{S} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \operatorname{Re} \operatorname{Sp} A(t_1) dt_1,$$

$$\bar{S} = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \operatorname{Re} \operatorname{Sp} A(t_1) dt_1,$$

то, используя формулу (3.11.3) и неравенство Ляпунова (§ 7), имеем

$$\bar{S} \leq \sigma = \underline{S}.$$

С другой стороны, очевидно,

$$\underline{S} \leq \bar{S}.$$

Отсюда получаем

$$\underline{S} = \bar{S} = S = \sigma,$$

что и доказывает лемму.

Связь между правильными и приводимыми системами установлена Ляпуновым.

*Теорема. Всякая приводимая линейная дифференциальная система является правильной.*

*Доказательство.* Пусть система (3.11.1) приводима (§ 8) и  $X(t)$  — ее нормальная фундаментальная матрица. Согласно определению приводимости существует матрица Ляпунова  $L(t)$  такая, что

$$X(t) = L(t) Y(t), \quad (3.11.6)$$

где  $Y(t)$  — фундаментальная матрица некоторой системы

$$\frac{dy}{dt} = By$$

с постоянной матрицей  $B$ . Из соотношения (3.11.6) имеем

$$\det X(t) = \det L(t) \cdot \det Y(t).$$

Используя формулу Остроградского — Лиувилля (гл. II, § 3), получим

$$\det X(t_0) e^{t_0} \int_{t_0}^t \text{Sp } A(t_1) dt_1 = \det L(t) \cdot \det Y(t_0) e^{(t-t_0) \text{Sp } B}.$$

Отсюда

$$|e^{t_0} \int_{t_0}^t \text{Sp } A(t_1) dt_1| = c(t_0) |\det L(t)| |e^{(t-t_0) \text{Sp } B}|,$$

где

$$c(t_0) = |\det [Y(t_0) X^{-1}(t_0)]|,$$

т. е.

$$e^{t_0} \int_{t_0}^t \text{Re Sp } A(t_1) dt_1 = c(t_0) |\det L(t)| e^{(t-t_0) \text{Re Sp } B}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{t} \int_{t_0}^t \text{Re Sp } A(t_1) dt_1 = \frac{1}{t} \ln \{c(t_0) |\det L(t)|\} + \left(1 - \frac{t_0}{t}\right) \text{Re Sp } B. \quad (3.11.7)$$

Так как  $\ln |\det L(t)|$  есть величина, ограниченная на промежутке  $[t_0, \infty)$ , то из формулы (3.11.7) вытекает, что существует предел

$$S = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \text{Re Sp } A(t_1) dt_1 = \text{Re Sp } B. \quad (3.11.8)$$

Кроме того, пусть  $\sigma_X$  и  $\sigma_Y$  — суммы характеристических показателей решений фундаментальных матриц  $X$  и  $Y$  соответственно. Так как при преобразовании Ляпунова характеристические показатели сохраняются, то, очевидно, имеем

$$\sigma_X = \sigma_Y, \quad (3.11.9)$$

причем, если матрица  $X$  нормальная, то матрица  $Y$  также нормальная. Но для нормальной матрицы  $Y$  характеристическими

показателями являются вещественные части корней  $\lambda_j$  векового уравнения

$$\det(B - \lambda E) = 0,$$

где каждый корень повторяется столько раз, какова его кратность. Поэтому

$$\sigma_V = \sum_j \operatorname{Re} \lambda_j = \operatorname{Re} \sum_j \lambda_j = \operatorname{Re} \operatorname{Sp} B.$$

Таким образом, справедливо равенство Ляпунова

$$\sigma_X = \operatorname{Re} \operatorname{Sp} B = S$$

и, значит, на основании леммы система (3.10.2) правильная.

**Замечание.** Если матрица  $A(t)$  действительная, то матрицы  $L(t)$  и  $B$  можно полагать также действительными.

Покажем на примере, что правильная система может быть неприводимой.

**Пример.** Скалярное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{2\sqrt{t}} \quad (t > 0)$$

является правильным в смысле определения этого параграфа, так как общее решение его есть

$$x = ce^{\sqrt{t}} \quad (3.11.10)$$

и при  $c \neq 0$  имеем

$$\chi[x] = 0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \frac{dt_1}{2\sqrt{t_1}} \quad (t_0 > 0).$$

Однако это уравнение не будет приводимым, так как его общее решение (3.11.10) не имеет вида, предписываемого теоремой Еругина (§ 8).

## § 12. Теорема Перрона

Пусть

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \quad (3.12.1)$$

— линейная система с действительной или комплексной непрерывной матрицей  $A(t)$ .

**Определение.** Система

$$\frac{dy}{dt} = -A^*(t)y, \quad (3.12.2)$$

где  $A^*(t) = \overline{A^T(t)}$  — эрмитово-сопряженная матрица для  $A(t)$ , называется *сопряженной* для системы (3.12.1). Если матрица  $A(t)$

действительная, то  $A^*(t) = A^T(t)$ , и, следовательно, для действительной системы (3.12.1) ее сопряженная система имеет вид

$$\frac{dy}{dt} = -A^T(t)y.$$

Очевидно, систему (3.12.1) можно рассматривать как сопряженную для системы (3.12.2), т. е. системы (3.12.1) и (3.12.2) взаимно сопряженные.

Лемма. Для любых решений  $x$  и  $y$  взаимно сопряженных систем (3.12.1) и (3.12.2) справедливо тождество

$$y^*x \equiv (x, y) \equiv c, \quad (3.12.3)$$

где  $y^*$  — эрмитово-сопряженный вектор для  $y$  и  $c$  — некоторая постоянная.

Аналогично для фундаментальных матриц решений  $X = X(t)$  и  $Y = Y(t)$  этих систем имеет место соотношение

$$Y^*X \equiv C, \quad (3.12.4)$$

где  $Y^*$  — эрмитово-сопряженная матрица для  $Y$  и  $C$  — постоянная матрица.

Обратно, если выполнено соотношение (3.12.4), где  $C$  — неособенная постоянная матрица ( $\det C \neq 0$ ) и  $X$  — фундаментальная матрица системы (3.12.1), то  $Y$  есть фундаментальная матрица сопряженной системы (3.12.2).

Доказательство. 1) Пусть вектор-столбец

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

является решением системы (3.12.2). Тогда вектор-строка

$$y^* = [\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n],$$

очевидно, есть решение системы

$$\frac{dy^*}{dt} = -y^*A(t). \quad (3.12.5)$$

Из уравнений (3.12.2) и (3.12.5) получаем

$$y^* \frac{dx}{dt} = y^*A(t)x$$

и

$$\frac{dy^*}{dt}x = -y^*A(t)x.$$

Складывая последние равенства, будем иметь

$$y^* \frac{dx}{dt} + \frac{dy^*}{dt} x = 0$$

или

$$\frac{d}{dt}(y^* x) = 0.$$

Следовательно,

$$y^* x = c.$$

2) Так как фундаментальные матрицы  $X$  и  $Y$  удовлетворяют уравнениям

$$\dot{X} = A(t) X \quad (3.12.6)$$

и

$$\dot{Y} = -A^*(t) Y, \quad (3.12.7)$$

то аналогично доказанному выше имеем тождество (3.12.4).

3) Пусть справедливо тождество (3.12.4). Тогда

$$Y = (CX^{-1})^* \equiv (X^*)^{-1} C^*, \quad (3.12.8)$$

где  $X^*$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{X}^* = X^* A^*(t). \quad (3.12.9)$$

Из формулы (3.12.8), используя формулу для производной обратной матрицы (гл. I, § 7), имеем

$$\dot{Y} = -(X^*)^{-1} \dot{X}^* (X^*)^{-1} C^* = -(X^*)^{-1} X^* A^*(t) (X^*)^{-1} C^* = -A^*(t) Y,$$

причем

$$\det Y = \det (X^*)^{-1} \cdot \det C^* = (\det X)^{-1} \cdot \det C \neq 0.$$

Следовательно,  $Y$  есть фундаментальная матрица сопряженной системы (3.12.2) (гл. I, § 2).

Теорема Перрона (см. [25], [14]). Для правильности линейной однородной дифференциальной системы необходимо и достаточно, чтобы полный спектр<sup>1)</sup> данной системы

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n \quad (3.12.10)$$

и полный спектр ее сопряженной системы

$$\beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq \beta_n \quad (3.12.11)$$

<sup>1)</sup> Иными словами, спектр с учетом кратностей характеристических показателей (см. § 4).

были бы симметричны относительно нуля, т. е. должны иметь место равенства

$$\alpha_s + \beta_s = 0 \quad (s = 1, \dots, n). \quad (3.12.12)$$

Доказательство. 1) Докажем сначала необходимость условий теоремы. Пусть система (3.12.1) правильная и  $X(t) = [x_{jk}(t)]$  — ее нормальная фундаментальная матрица, состоящая из решений

$$\mathbf{x}^{(k)} = \text{colop} [x_{1k}(t), \dots, x_{nk}(t)] \quad (k = 1, \dots, n)$$

таких, что

$$\chi[\mathbf{x}^{(k)}] = \alpha_k,$$

где числа  $\alpha_k$  удовлетворяют неравенствам (3.12.10). Тогда в силу леммы

$$Y(t) = [X^{-1}(t)]^* \equiv [y_{jk}(t)] \quad (3.12.13)$$

является фундаментальной матрицей решений сопряженной системы (3.12.2). Пусть, далее,

$$\mathbf{y}^{(k)} = \text{colop} [y_{1k}(t), \dots, y_{nk}(t)] \quad (k = 1, \dots, n),$$

где

$$\chi[\mathbf{y}^{(k)}] = \beta_k. \quad (3.12.14)$$

Из формулы (3.12.13) вытекает, что

$$Y^*(t) X(t) = E.$$

Отсюда на основании правила умножения матриц будем иметь

$$\mathbf{y}^{(s)*} \cdot \mathbf{x}^{(s)} = I \quad (s = 1, \dots, n).$$

Воспользовавшись теперь теоремой о характеристическом показателе произведения двух матриц (§ 2), находим

$$\chi[I] = 0 \leq \chi[\mathbf{y}^{(s)*}] + \chi[\mathbf{x}^{(s)}],$$

т. е.

$$\alpha_s + \beta_s \geq 0. \quad (3.12.15)$$

С другой стороны, если  $X_{jk}(t)$  — алгебраическое дополнение элемента  $x_{jk}(t)$  определителя  $\det X(t)$ , то на основании известного правила обращения матрицы получаем

$$y_{js}(t) = \left[ \frac{X_{sj}(t)}{\det X(t)} \right]^* = \frac{\overline{X_{js}(t)}}{\det X(t)},$$

где

$$\det X(t) = \det X(t_0) \cdot \exp \int_{t_0}^t \text{Sp } A(t_1) dt_1 \neq 0.$$

Отсюда

$$\chi [y_{js}(t)] \leq \chi \left[ \frac{1}{\det X(t_0)} \right] + \chi \left[ \exp \left\{ - \int_{t_0}^t \operatorname{Sp} A(t_1) dt_1 \right\} \right] + \chi [ \overline{X_{js}(t)} ].$$

Очевидно,

$$\chi \left[ \frac{1}{\det X(t_0)} \right] = 0.$$

Далее, так как система (3.12.1) правильная, то выполнено равенство Ляпунова

$$\sigma = \sum_s \alpha_s = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \operatorname{Re} \operatorname{Sp} A(t_1) dt_1,$$

и поэтому

$$\chi \left[ \exp \left\{ - \int_{t_0}^t \operatorname{Sp} A(t_1) dt_1 \right\} \right] = -\sigma.$$

Наконец, учитывая, что при составлении алгебраического дополнения  $X_{js}(t)$  вычеркивается  $s$ -й столбец, содержащий координаты решения  $x^{(s)}$ , будем иметь

$$\chi [ \overline{X_{js}(t)} ] = \chi [ X_{js}(t) ] \leq \sigma - \alpha_s.$$

Таким образом,

$$\chi [y_{js}(t)] \leq 0 + (-\sigma) + (\sigma - \alpha_s) = -\alpha_s,$$

и, следовательно,

$$\beta_s = \max_j \chi [y_{js}(t)] \leq -\alpha_s,$$

т. е.

$$\alpha_s + \beta_s \leq 0. \quad (3.12.16)$$

Сопоставляя эти неравенства с неравенствами (3.12.15), получаем

$$\alpha_s + \beta_s = 0 \quad (s = 1, \dots, n). \quad (3.12.17)$$

Остается показать, что фундаментальная матрица  $Y(t)$  нормальная и, следовательно, числа  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  реализуют весь спектр сопряженной системы. Действительно, на основании равенств (3.12.17) имеем

$$\begin{aligned} \sigma_Y &= \sum_s \beta_s = - \sum_s \alpha_s = - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \operatorname{Re} \operatorname{Sp} A(t_1) dt_1 = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \operatorname{Re} \operatorname{Sp} [-A^*(t_1)] dt_1. \end{aligned}$$



Таким образом, для фундаментальной матрицы  $Y(t)$  сопряженной системы (3.12.2) выполнено равенство Ляпунова и, следовательно, эта матрица нормальная (§ 7).

2) Докажем теперь достаточность условий теоремы. Пусть (3.12.10) и (3.12.11) — спектры сопряженных систем и выполнены равенства (3.12.12).

На основании неравенства Ляпунова имеем

$$\sum_s \alpha_s \geq \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \operatorname{Re} \operatorname{Sp} A(t_1) dt_1 = \bar{S}$$

и

$$\begin{aligned} \sum_s \beta_s &\geq \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \operatorname{Re} \operatorname{Sp} [-A^*(t_1)] dt_1 = \\ &= - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \operatorname{Re} \operatorname{Sp} A(t_1) dt_1 = -S. \end{aligned}$$

Складывая последние неравенства, в силу неравенства (3.12.12) получим

$$0 = \sum_s (\alpha_s + \beta_s) \geq \bar{S} - \underline{S}.$$

Но так как, очевидно,

$$\underline{S} \leq S,$$

то

$$S = S.$$

Следовательно, существует предел

$$S = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \operatorname{Re} \operatorname{Sp} A(t_1) dt_1.$$

Кроме того, выполнено равенство

$$\sum_s \alpha_s = S.$$

Действительно, если бы

$$\sum_s \alpha_s > S,$$

то, учитывая, что

$$\sum_s \beta_s \geq -S,$$

мы бы имели

$$0 = \sum_s (\alpha_s + \beta_s) > 0,$$

что, очевидно, невозможно.



и пусть

$$S = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \text{Sp } A(t_1) dt_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \sum_{k=1}^n a_{kk}(t_1) dt_1.$$

Введем сокращенные обозначения

$$A_k(t) = \exp \int_{t_1}^t a_{kk}(t_1) dt_1 \quad (k = 1, \dots, n).$$

Последовательно интегрируя уравнения системы (3.13.1), убеждаемся, что эта система имеет нормированную фундаментальную систему  $\tilde{X}(t) = [\tilde{x}_{jk}(t)]$  вида

$$\left. \begin{aligned} \tilde{x}_{jk}(t) &= 0 \quad (j < k), \\ \tilde{x}_{kk}(t) &= A_k(t), \\ \tilde{x}_{jk}(t) &= A_j(t) \int_{t_0}^t A_j^{-1}(t_1) \sum_{s=k}^{j-1} a_{js}(t_1) \tilde{x}_{sk}(t_1) dt_1 \quad (j > k), \\ & \quad j, k = 1, \dots, n, \end{aligned} \right\} \quad (3.13.3)$$

где  $\tilde{X}(t_0) = E$ . Умножая справа матрицу  $\tilde{X}(t)$  на подходящую постоянную матрицу

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ c_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

можно получить нормальную фундаментальную матрицу (см. § 4)

$$X(t) = \tilde{X}(t) C \quad (X(t) = [x_{jk}(t)]),$$

причем, очевидно,

$$x_{kk}(t) = A_k(t) \quad (k = 1, \dots, n).$$

Транспонированная обратная матрица

$$Y(t) = [X^{-1}(t)]^T \equiv [y_{jk}(t)]$$

является нормальной фундаментальной матрицей для сопряженной системы

$$\frac{dy}{dt} = -A^T(t)y.$$

Нетрудно видеть, что

$$y_{kk}(t) = A_k^{-1}(t). \quad (3.13.4)$$

Пусть

$$\chi[\mathbf{x}^{(k)}] = \max \chi[x_{jk}(t)] = \alpha_k$$

и

$$\chi[\mathbf{y}^{(k)}] = \max \chi[y_{jk}(t)] = \beta_k$$

( $k = 1, \dots, n$ ), где в силу теоремы Перрона (§ 12)

$$\alpha_k + \beta_k = 0 \quad (k = 1, \dots, n). \quad (3.13.5)$$

Так как в состав решения  $\mathbf{x}^{(k)}$  входит координата  $x_{kk}(t) = A_k(t)$ , то

$$\alpha_k \geq \chi[A_k(t)] = \bar{\mu}_k \quad (k = 1, \dots, n). \quad (3.13.6)$$

Аналогично в силу формулы (3.13.4) имеем

$$\beta_k \geq \chi[A_k^{-1}(t)] = -\underline{\mu}_k \quad (k = 1, \dots, n). \quad (3.13.7)$$

Складывая равенства (3.12.6) и (3.12.7) и учитывая формулу (3.12.5), получим

$$0 = \alpha_k + \beta_k \geq \bar{\mu}_k - \underline{\mu}_k \quad (k = 1, \dots, n),$$

т. е.

$$\bar{\mu}_k = \underline{\mu}_k = \mu_k \quad (k = 1, \dots, n),$$

где

$$\mu_k = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t a_{kk}(t_1) dt_1,$$

что и требовалось доказать.

2) Докажем теперь достаточность условий теоремы. Предположим, что условия (3.12.2) выполнены.

Пусть  $Z(t) = [z_{jk}(t)]$  — система функций таких, что

$$\left. \begin{aligned} z_{jk}(t) &= 0 & (j < k), \\ z_{kk}(t) &= A_k(t), \\ z_{jk}(t) &= A_j(t) \int_{\tau_{jk}}^t A_j^{-1}(t_1) \sum_{s=k}^{j-1} a_{js}(t_1) z_{sk}(t_1) dt_1 & (j > k), \end{aligned} \right\} \quad (3.13.8)$$

$$j, k = 1, \dots, n,$$

где

$$\tau_{jk} = t_0, \text{ если } \mu_j \leq \mu_k,$$

и

$$\tau_{jk} = +\infty, \text{ если } \mu_j > \mu_k.$$

Очевидно,

$$\det Z(t_0) = 1.$$

Так как

$$\int_{-\infty}^t f(t_1) dt_1 = \int_{t_0}^t f(t_1) dt_1 - \int_{t_0}^{-\infty} f(t_1) dt_1,$$

то система функций  $Z(t)$  отличается от фундаментальной системы  $\tilde{X}(t)$  тем, что к входящим в нее интегралам прибавлены некоторые постоянные. Поэтому  $Z(t)$  является также фундаментальной матрицей нашей дифференциальной системы (3.12.1). Отсюда следует, что

$$Z(t) = \tilde{X}(t) B,$$

где

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

— постоянная матрица. Имеем

$$\chi[z_{kk}(t)] = \chi[A_k(t)] = \mu_k \quad (k = 1, \dots, n).$$

Далее, по индукции выводим, если

$$\chi[z_{sk}(t)] \leq \mu_k \quad (s = k, \dots, j-1; j > k),$$

то из формул (3.13.8), используя теорему о характеристическом показателе интеграла и ее следствие (§ 1), получаем

$$\begin{aligned} \chi[z_{jk}(t)] &\leq \chi[A_j(t)] + \chi[A_j^{-1}(t)] + \max_s \{ \chi[a_{js}(t)] + \chi[z_{sk}(t)] \} \leq \\ &\leq \mu_j + (-\mu_j) + \mu_k = \mu_k. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\alpha_k = \chi[z^{(k)}] = \max \chi[z_{jk}(t)] \leq \mu_k \quad (k = 1, \dots, n).$$

Отсюда, полагая

$$S = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \sum_{k=1}^n a_{kk}(t_1) dt_1 = \sum_{k=1}^n \mu_k,$$

в силу неравенства Ляпунова получим

$$S = \sum_k \mu_k \geq \sum_k \alpha_k \geq S,$$

т. е.  $\alpha_k = \mu_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) и

$$\sum_k \alpha_k = S.$$

Таким образом, построенная фундаментальная система  $Z(t)$  нормальная, а значит, система (3.13.1) правильная.

*Следствие.* Если система (3.13.1) с действительной ограниченной треугольной матрицей правильная, то средние значения ее диагональных коэффициентов  $a_{kk}(t)$  дают спектр  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  этой системы, т. е.

$$\alpha_k = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t a_{kk}(t_1) dt_1 \quad (k = 1, \dots, n).$$

#### § 14. Теорема Перрона о триангуляции линейной системы

Пусть

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \quad (3.14.1)$$

— однородная система, где  $A(t) \in C[t_0, \infty)$ . Рассмотрим фундаментальную матрицу  $X(t) = [x_{jk}(t)]$ , элементы которой, вообще говоря, комплексные.

*Лемма.* Всякую фундаментальную матрицу  $X(t)$  можно представить в виде произведения непрерывно дифференцируемых унитарной матрицы  $U(t)$  и верхней треугольной матрицы  $R(t)$  с положительными диагональными элементами, т. е.

$$X(t) = U(t)R(t), \quad (3.14.2)$$

где

$$U^*(t)U(t) = E,$$

$$R(t) = [r_{jk}(t)], \quad r_{jj}(t) > 0, \quad r_{jk}(t) = 0 \quad \text{при } k > j.$$

*Доказательство.* Для доказательства применим известный метод ортогонализации Шмидта.

Пусть

$$x^{(k)} = \text{colop} [x_{1k}(t), \dots, x_{nk}(t)] \quad (k = 1, \dots, n)$$

— решения, входящие в фундаментальную матрицу  $X(t)$ .

Положим

$$\left. \begin{aligned} \xi^{(1)} &= x^{(1)}, & e^{(1)} &= \frac{\xi^{(1)}}{\|\xi^{(1)}\|}; \\ \xi^{(2)} &= x^{(2)} - (x^{(2)}, e^{(1)}) e^{(1)}, & e^{(2)} &= \frac{\xi^{(2)}}{\|\xi^{(2)}\|}; \\ &\dots\dots\dots & & \\ \xi^{(n)} &= x^{(n)} - \sum_{s=1}^{n-1} (x^{(n)}, e^{(s)}) e^{(s)}, & e^{(n)} &= \frac{\xi^{(n)}}{\|\xi^{(n)}\|}. \end{aligned} \right\} (3.14.3)$$

Так как решения  $x^{(k)}$  ( $k=1, \dots, n$ ) линейно независимы, то приведенная конструкция всегда возможна. Нетрудно проверить, что вектор-функции  $e^{(s)}$  образуют ортонормированную систему

$$(e^{(s)}, e^{(r)}) = \delta_{sr}. \tag{3.14.4}$$

Из соотношений (3.14.3) получаем

$$\left. \begin{aligned} x^{(1)} &= \|\xi^{(1)}\| e^{(1)}, \\ x^{(2)} &= (x^{(2)}, e^{(1)}) e^{(1)} + \|\xi^{(2)}\| e^{(2)}, \\ &\dots\dots\dots \\ x^{(n)} &= \sum_{s=1}^{n-1} (x^{(n)}, e^{(s)}) e^{(s)} + \|\xi^{(n)}\| e^{(n)}. \end{aligned} \right\}$$

Следовательно,

$$X(t) = U(t) R(t),$$

где

$$U(t) = [e^{(1)}, \dots, e^{(n)}] \equiv [e_{sr}]$$

и

$$R(t) = \begin{bmatrix} \|\xi^{(1)}\| & (x^{(2)}, e_1) & \dots & (x^{(n)}, e_1) \\ 0 & \|\xi^{(2)}\| & \dots & (x^{(n)}, e_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \|\xi^{(n)}\| \end{bmatrix}.$$

Пусть

$$U^*(t) = [\bar{e}_{rs}]$$

— эрмитово-сопряженная матрица для  $U(t)$ . Учитывая соотношение (3.14.4), имеем

$$U(t) U^*(t) = [\sum_j e_{sj} \bar{e}_{rj}] = [\delta_{sr}] = E.$$

Таким образом, матрица  $U(t)$  унитарная. Кроме того, из вида треугольной матрицы  $R(t)$  непосредственно вытекает, что ее диагональные элементы положительны:  $r_{jj} = \|\xi^{(j)}\|$ . Очевидно,

$$U(t), R(t) \in C^1[t_0, \infty).$$

Лемма доказана.

*Замечание.* Если матрица  $X(t)$  вещественная, то матрица  $U(t)$  действительная и ортогональная, а треугольная матрица  $R(t)$  действительная.

*Теорема Перрона (см. [26]).* Всякую линейную однородную систему (3.14.1) с помощью унитарного преобразования  $x = U(t)y$  можно привести к системе с верхней треугольной матрицей, диагональные коэффициенты которой вещественны:

$$\frac{dy}{dt} = B(t)y, \quad (3.14.5)$$

где  $B(t) = [b_{jk}(t)]$ ,  $b_{jk}(t) = 0$  при  $j > k$  и  $\text{Im } b_{jj}(t) = 0$ .

Если матрица  $A(t)$  ограничена на  $[t_0, \infty)$ , то треугольные матрицы  $B(t)$  и  $\dot{U}(t)$  также ограничены на  $[t_0, \infty)$ .

*Доказательство.* Для доказательства используем способ Винограда (см. [27]). Положим

$$x = U(t)y, \quad (3.14.6)$$

где  $U(t)$  — унитарная матрица, определяемая формулой (3.14.2). Имеем

$$\frac{dx}{dt} = U(t) \frac{dy}{dt} + \dot{U}(t)y.$$

Следовательно, система (3.14.1) примет вид

$$\frac{dy}{dt} = B(t)y,$$

где

$$B(t) = U^{-1}(t)A(t)U(t) - U^{-1}(t)\dot{U}(t). \quad (3.14.7)$$

С другой стороны, на основании формулы (3.14.6) для фундаментальной матрицы  $X(t)$  однородной системы (3.14.1) имеем

$$X(t) = U(t)Y(t), \quad (3.14.8)$$

где  $Y(t)$  — фундаментальная матрица системы (3.14.7), т. е.

$$\dot{Y}(t) = B(t)Y(t). \quad (3.14.9)$$

Сопоставляя формулы (3.14.2) и (3.14.8), находим

$$Y(t) = R(t),$$



где  $R(t)$  — верхняя треугольная матрица. Из формулы (3.14.9), учитывая, что производная и обратная матрицы треугольной суть также треугольные матрицы того же типа, выводим:

$$B(t) = \dot{Y}(t) Y^{-1}(t) = \dot{R}(t) R^{-1}(t) = R_1(t), \quad (3.14.10)$$

где  $R_1(t)$  — верхняя треугольная матрица.

Так как

$$[R(t)]_{jj} = \|\xi^{(j)}\|$$

(см. лемму), то из формулы (3.14.10) следует вещественность диагональных коэффициентов

$$b_{jj}(t) = \frac{d}{dt} \|\xi^{(j)}\| \cdot \frac{1}{\|\xi^{(j)}\|} = \frac{d}{dt} \ln \|\xi^{(j)}\| \quad (j=1, \dots, n). \quad (3.14.11)$$

Выразим теперь матрицу  $B(t)$  через матрицу  $A(t)$ . Прежде всего, заметим, что матрица  $U^{-1}(t)\dot{U}(t)$  эрмитово-кососимметрическая. Действительно, учитывая унитарность матрицы  $U(t)$ , имеем

$$\begin{aligned} [U^{-1}(t)\dot{U}(t)]^* &= \dot{U}^*(t)[U^*(t)]^{-1} = \frac{d}{dt}[U^{-1}(t)] \cdot U(t) = \\ &= -U^{-1}(t)\dot{U}(t)U^{-1}(t)U(t) = -U^{-1}(t)\dot{U}(t). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что диагональные элементы матрицы  $U^{-1}(t)\dot{U}(t)$  чисто мнимые. Пусть

$$\tilde{A}(t) = U^{-1}(t)A(t)U(t) \equiv [\tilde{a}_{jk}(t)].$$

Так как матрица  $B(t) = [b_{jk}(t)]$  — верхняя треугольная с вещественной диагональю, то, полагая  $V(t) = U^{-1}(t)\dot{U}(t) \equiv [v_{jk}(t)]$ , из формулы (3.14.7) будем иметь

$$\left. \begin{aligned} v_{jj}(t) &= i \operatorname{Im} \tilde{a}_{jj}(t), \\ v_{jk}(t) &= \tilde{a}_{jk}(t) \quad \text{при } j > k, \\ v_{jk}(t) &= -\overline{\tilde{a}_{kj}} \quad \text{при } j < k. \end{aligned} \right\} \quad (3.14.12)$$

Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} b_{jj}(t) &= \operatorname{Re} \tilde{a}_{jj}(t), \\ b_{jk}(t) &= 0 \quad \text{при } j > k, \\ b_{jk}(t) &= \tilde{a}_{jk}(t) + \overline{\tilde{a}_{kj}}(t) \quad \text{при } j < k. \end{aligned} \right\} \quad (3.14.13)$$

Если матрица  $A(t)$  ограничена, то матрица  $\tilde{A}(t)$ , очевидно, также ограничена; отсюда на основании формул (3.14.12) и (3.14.13) вытекает ограниченность матриц  $\dot{U}(t)$  и  $B(t)$ .

Замечание. Если матрица  $A(t)$  действительная, то матрицу  $U(t)$  можно выбрать действительной и ортогональной.

Следствие 1. Если система (3.14.1) правильная, то треугольная система (3.14.5) также правильная.

Действительно, пусть  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  — спектр системы (3.14.1) и

$$\sum_j \alpha_j = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \operatorname{Re} \operatorname{Sp} A(t_1) dt_1.$$

Из формулы (3.14.7) получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \operatorname{Sp} B(t) &= \\ &= \operatorname{Re} \operatorname{Sp} [U^{-1}(t) A(t) U(t)] - \operatorname{Re} \operatorname{Sp} [U^{-1}(t) \dot{U}(t)] = \operatorname{Re} \operatorname{Sp} A(t). \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая, что при унитарном преобразовании характеристические числа решений сохраняются, будем иметь

$$\sum_j \alpha_j = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \operatorname{Re} \operatorname{Sp} B(t_1) dt_1,$$

что и доказывает правильность системы (3.14.7).

Следствие 2. Если линейная система (3.14.1) правильная, то для каждого ее нетривиального решения  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  существует строгий характеристический показатель ([26])

$$\alpha = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|\mathbf{x}(t)\|.$$

Пусть решение  $\mathbf{x}(t)$  включено в фундаментальную систему  $X(t)$  и  $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}^{(1)}(t)$ . Тогда на основании теоремы Ляпунова о правильности треугольной системы (§ 13) и формулы (3.14.11) имеем

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t b_{11}(t_1) dt_1 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \frac{d}{dt_1} \ln \|\xi^{(1)}(t_1)\| dt_1 = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|\xi^{(1)}(t)\|. \end{aligned}$$

Но по способу построения функций  $\xi^{(k)}(t)$  (см. лемму)  $\xi^{(1)}(t) = \mathbf{x}^{(1)}(t) = \mathbf{x}(t)$ . Следовательно, существует

$$\alpha = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|\mathbf{x}(t)\|,$$

что и требовалось доказать.

## § 15. Теория Флоке

Рассмотрим линейную систему

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \quad (3.15.1)$$

с непрерывной (или кусочно-непрерывной) на  $(-\infty, +\infty)$  периодической матрицей  $A(t)$ :

$$A(t + \omega) \equiv A(t) \quad (\omega > 0). \quad (3.15.2)$$

*Теорема Флоке.* Для линейной системы (3.15.1) с  $\omega$ -периодической матрицей нормированная при  $t=0$  фундаментальная матрица решений (матрицант) имеет вид

$$X(t) = \Phi(t)e^{\Lambda t}, \quad (3.15.3)$$

где  $\Phi(t)$  — класса  $C^1$  (или кусочно-гладкая)  $\omega$ -периодическая неособенная матрица, причем  $\Phi(0) = E$ , и  $\Lambda$  — постоянная матрица.

Доказательство (см. также [28]). Пусть  $X(t)$  — нормированная фундаментальная матрица решений системы (3.15.1), где

$$X(0) = E. \quad (3.15.4)$$

Матрица  $X(t + \omega)$  также является фундаментальной. Действительно, на основании тождества

$$\dot{X}(t) \equiv A(t)X(t)$$

имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [X(t + \omega)] &= \dot{X}(t + \omega) \frac{d}{dt} (t + \omega) = \\ &= A(t + \omega)X(t + \omega) = A(t)X(t + \omega). \end{aligned}$$

Следовательно,  $X(t + \omega)$  есть фундаментальная матрица решений для системы (3.15.1).

Отсюда получаем

$$X(t + \omega) \equiv X(t)C, \quad (3.15.5)$$

где  $C$  — постоянная неособенная матрица. Полагая  $t=0$  в тождестве (3.15.5) и учитывая условие (3.15.4), находим

$$C = X(\omega).$$

Таким образом,

$$X(t + \omega) = X(t)X(\omega). \quad (3.15.6)$$

Матрица  $X(\omega)$  носит название *матрицы монодромии*.

Очевидно,

$$\det X(\omega) \neq 0.$$

Положим

$$\frac{1}{\omega} \operatorname{Ln} X(\omega) = \Lambda; \quad (3.15.7)$$

отсюда

$$X(\omega) = e^{\Lambda\omega}. \quad (3.15.8)$$

Напишем тождество

$$X(t) \equiv X(t) e^{-\Lambda t} \cdot e^{\Lambda t} = \Phi(t) e^{\Lambda t}, \quad (3.15.9)$$

где

$$\Phi(t) = X(t) e^{-\Lambda t}.$$

Имеем

$$\Phi(t + \omega) = X(t + \omega) e^{-\Lambda(t + \omega)} = X(t + \omega) e^{-\Lambda\omega} \cdot e^{-\Lambda t}.$$

Отсюда, учитывая (3.15.6) и (3.15.8), получаем

$$\Phi(t + \omega) = X(t) e^{\Lambda\omega} \cdot e^{-\Lambda\omega} e^{-\Lambda t} = X(t) e^{-\Lambda t} = \Phi(t),$$

т. е. матрица  $\Phi(t)$  — периодическая с периодом  $\omega$ . Кроме того, если  $A(t) \in C(-\infty, +\infty)$ , то из (3.15.9) выводим

$$\Phi(t) = X(t) e^{-\Lambda t} \in C^1(-\infty, +\infty),$$

причем

$$\Phi(0) = E \quad \text{и} \quad \det \Phi(t) = \det X(t) \det e^{-\Lambda t} \neq 0.$$

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Матрицы

$$\Lambda = \frac{1}{\omega} \operatorname{Ln} X(\omega)$$

и

$$\Phi(t) = X(t) e^{-\Lambda t},$$

вообще говоря, комплексные. Можно ограничиться действительными преобразованиями, если воспользоваться матрицей

$$X(2\omega) = [X(\omega)]^2.$$

Однако при этом рассуждения значительно усложняются (см. [28]).

Собственные значения  $\lambda_j$  матрицы  $\Lambda$ , т. е. корни векового уравнения

$$\det(\Lambda - \lambda E) = 0,$$

называются *характеристическими показателями системы* (3.15.1). Отметим, что матрица  $\Lambda$  не является строго определенной, так как значение  $\operatorname{Ln} X(\omega)$  многозначно (гл. I, § 15).

Во избежание недоразумений следует иметь в виду, что характеристические показатели линейной периодической системы

не идентичны с характеристическими показателями Ляпунова нетривиальных решений этой системы: первые, вообще говоря, являются комплексными числами, а вторые — действительными числами, представляющими вещественные части первых.

Собственные значения  $\rho_j$  ( $j=1, \dots, n$ ) матрицы  $C = X(\omega)$ , т. е. корни векового уравнения (*характеристического уравнения*)

$$\det [X(\omega) - \rho E] = 0, \quad (3.15.10)$$

называются *мультипликаторами*. Из формулы (3.15.10) выводим

$$\sum_{j=1}^n \rho_j = \text{Sp } X(\omega)$$

и

$$\prod_{j=1}^n \rho_j = \det X(\omega) = \exp \int_0^{\omega} \text{Sp } A(t) dt.$$

Так как  $\det X(\omega) \neq 0$ , то  $\rho_j \neq 0$ . Из формулы (3.15.7) на основании известных свойств собственных значений логарифма матрицы (см. замечание 2 к теореме § 15 гл. 1) получаем

$$\lambda_j = \frac{1}{\omega} \text{Ln } \rho_j = \frac{1}{\omega} [\ln |\rho_j| + i(\arg \rho_j + 2k\pi)] \quad (3.15.11)$$

$$(j=1, 2, \dots, n; k=0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

где целое число  $k$  подбирается надлежащим образом. Поэтому характеристические показатели определяются с точностью до мнимых слагаемых  $2k\pi i/\omega$ .

**Обобщение.** Нетрудно получить более общие формулы для матричного решения линейной периодической системы (3.15.1). Пусть  $X(t)$  ( $X(0) = E$ ) — нормированная фундаментальная матрица системы (3.15.1) и  $X_1(t)$  — произвольная фундаментальная матрица той же системы.

Очевидно, имеем

$$X_1(t) = X(t) X_1(0).$$

Так как  $X_1(t + \omega)$  снова является решением периодической системы (3.15.1), то справедливо тождество

$$X_1(t + \omega) \equiv X_1(t) C_1,$$

где  $C_1$  — постоянная матрица. Отсюда, полагая  $t=0$ , получим

$$C_1 = X_1^{-1}(0) X_1(\omega) = X_1^{-1}(0) X(\omega) X_1(0).$$

Матрицу  $C_1$ , подобную матрице монодромии  $X(\omega)$ , будем называть *основной* для матрицы  $X_1(t)$  (см. [10]). Положим

$$\Lambda = \frac{1}{\omega} \text{Ln } X(\omega)$$

и

$$\Lambda_1 = \frac{1}{\omega} \text{Ln } C_1.$$

Конкретизируя выбор  $\Lambda$ , нетрудно убедиться, что можно взять

$$\Lambda_1 = X_1^{-1}(0) \Lambda X_1(0). \quad (3.15.12)$$

Действительно, используя известное свойство экспоненциала матрицы (гл. I, § 6), имеем

$$e^{\Lambda_1 \omega} = X_1^{-1}(0) e^{\Lambda \omega} X_1(0) = X_1^{-1}(0) X(\omega) X_1(0) = C_1.$$

Из формулы (3.15.12) имеем

$$\Lambda = X_1(0) \Lambda_1 X_1^{-1}(0).$$

Применяя основную формулу (3.15.3), получаем

$$\begin{aligned} X_1(t) &= X(t) X_1(0) = \Phi(t) e^{\Lambda t} X_1(0) = \\ &= \Phi(t) e^{X_1(0) \Lambda_1 X_1^{-1}(0) t} X_1(0) = \Phi(t) X_1(0) e^{\Lambda_1 t}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$X_1(t) = \Phi_1(t) e^{\Lambda_1 t}, \quad (3.15.13)$$

где  $\Phi_1(t) = \Phi(t) X_1(0)$  —  $\omega$ -периодическая матрица и

$$\Lambda_1 = \frac{1}{\omega} \text{Ln } C_1 = \frac{1}{\omega} \text{Ln } [X_1^{-1}(0) X_1(\omega)].$$

*Теорема. Для всякого мультипликатора (множителя)  $\rho$  существует нетривиальное решение  $\xi(t)$  периодической системы (3.15.1), удовлетворяющее условию*

$$\xi(t + \omega) = \rho \xi(t) \quad (3.15.14)$$

(так называемое *нормальное решение*).

*Обратно, если для некоторого нетривиального решения  $\xi(t)$  выполнено условие (3.15.14), то число  $\rho$  является мультипликатором данной системы.*

*Доказательство* (см. [29]). 1) В качестве начального вектора  $\xi(0)$  выберем собственный вектор матрицы монодромии  $X(\omega)$ , отвечающий собственному значению  $\rho$ . Имеем

$$X(\omega) \xi(0) = \rho \xi(0)$$

и

$$\xi(t) = X(t) \xi(0).$$

Отсюда

$$\xi(t + \omega) = X(t + \omega) \xi(0) = X(t) X(\omega) \xi(0) = X(t) \rho \xi(0) = \rho \xi(t),$$

следовательно, условие (3.15.14) выполнено.

2) Обратно, пусть для некоторого нетривиального решения  $\xi(t) = X(t) \xi(0)$  выполнено условие (3.15.14). Тогда, положив  $t=0$ , из (3.15.14) получим

$$\xi(\omega) = \rho \xi(0),$$

т. е.

$$X(\omega) \xi(0) = \xi(\omega) = \rho \xi(0).$$

Таким образом,  $\xi(0)$  является собственным вектором матрицы монодромии  $X(\omega)$ , а число  $\rho$  есть корень векового уравнения

$$\det [X(\omega) - \rho E] = 0$$

и, значит,  $\rho$  — мультипликатор.

Следствие. *Линейная периодическая система (3.15.1) имеет нетривиальное решение периода  $\omega$  тогда и только тогда, когда по меньшей мере один из мультипликаторов ее  $\rho$  равен единице.*

Действительно, если  $\rho = 1$ , то для некоторого решения  $\xi(t) \neq 0$  имеет место соотношение

$$\xi(t + \omega) = \xi(t) \quad (3.15.15)$$

и, следовательно,  $\xi(t)$  —  $\omega$ -периодическое решение системы (3.15.1).

Обратно, из тождества (3.15.15) вытекает, что существует мультипликатор  $\rho$ , равный единице.

З а м е ч а н и е 1. Полагая

$$\rho = e^{\lambda \omega}$$

и

$$\xi(t) = e^{\lambda t} \varphi(t), \quad (3.15.16)$$

из формулы (3.15.14) будем иметь

$$e^{\lambda(t+\omega)} \varphi(t + \omega) = e^{\lambda \omega} e^{\lambda t} \varphi(t),$$

т. е.

$$\varphi(t + \omega) = \varphi(t).$$

Следовательно, нормальное решение периодической системы имеет вид (3.15.16), где  $\varphi(t)$  —  $\omega$ -периодическая вектор-функция класса  $C^1$  и

$$\lambda = \frac{1}{\omega} \text{Ln } \rho$$

— характеристический показатель системы.

**Замечание 2.** Мультипликатору  $\rho = -1$ , если он существует, соответствует так называемое *антипериодическое решение*  $\xi(t) \neq 0$  периода  $\omega$ , т. е.

$$\xi(t + \omega) = -\xi(t).$$

Отсюда имеем

$$\xi(t + 2\omega) = -\xi(t + \omega) = \xi(t),$$

и, таким образом,  $\xi(t)$  есть периодическое решение с периодом  $2\omega$ .

Аналогично, если  $\rho = \exp \frac{p\pi i}{q}$  ( $p, q$  — целые;  $q \geq 1$ ), то периодическая система имеет периодическое решение с периодом  $T = 2q\omega$ .

## § 16. Приводимость периодической линейной системы

**Теорема Ляпунова.** *Линейная система с непрерывной периодической матрицей приводима.*

**Доказательство.** Согласно формуле (3.15.3) нормированная матрица решений периодической системы (3.15.1) имеет вид

$$X(t) = \Phi(t) e^{At},$$

где  $\Phi(t) \in C^1(-\infty, +\infty)$ , причем

$$\Phi(t + \omega) = \Phi(t).$$

В силу периодичности  $\Phi(t)$  и  $\dot{\Phi}(t)$  ограничены на  $(-\infty, +\infty)$ .

Кроме того, так как

$$\Phi(t) = X(t) e^{-At}$$

и  $X(t)$  — неособенная матрица, то  $\Phi(t)$  — также неособенная матрица. Учитывая периодичность  $\Phi(t)$ , получим

$$\inf |\det \Phi(t)| > 0$$

при  $-\infty < t < +\infty$ .

Следовательно,  $\Phi(t)$  есть матрица Ляпунова. В силу теоремы Еругина (§ 5) периодическая система (3.15.1) приводима.

**Замечание.** Производя в уравнении (3.15.1) замену переменных

$$\mathbf{x} = \Phi(t) \mathbf{y} \equiv X(t) e^{-At} \mathbf{y},$$

получим

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \Lambda \mathbf{y}. \quad (3.16.1)$$

Таким образом, характеристические показатели  $\lambda_j$  являются корнями векового уравнения матрицы системы (3.16.1).

Отсюда имеем следующие условия устойчивости периодической системы (ср. § 8).



Теорема. 1) *Линейная однородная периодическая система с непрерывной матрицей устойчива тогда и только тогда, когда все ее мультипликаторы  $\rho_j$  расположены внутри замкнутого единичного круга  $|\rho| \leq 1$ , причем мультипликаторы, лежащие на окружности  $|\rho| = 1$ , имеют простые элементарные делители, если их рассматривать как собственные значения соответствующей матрицы монодромии.*

2) *Для асимптотической устойчивости периодической системы необходимо и достаточно, чтобы все мультипликаторы ее находились внутри единичного круга  $|\rho| < 1$ .*

Действительно, так как характеристические показатели  $\lambda_j$  связаны с мультипликаторами  $\rho_j$  соотношениями (см. § 15)

$$\lambda_j = \frac{1}{\omega} (\ln |\rho_j| + i \operatorname{Arg} \rho_j),$$

то при

$$|\rho_j| \leq 1$$

имеем  $\lambda_j \leq 0$ . Отсюда непосредственно вытекает наша теорема.

Для определения области асимптотической устойчивости выведем условия (см. [14]), обеспечивающие принадлежность корней полинома

$$f(\rho) \equiv \det [\rho E - X(\omega)] \quad (3.16.2)$$

единичному кругу  $|\rho| < 1$ , предполагая, что матрица  $X(\omega)$  действительная.

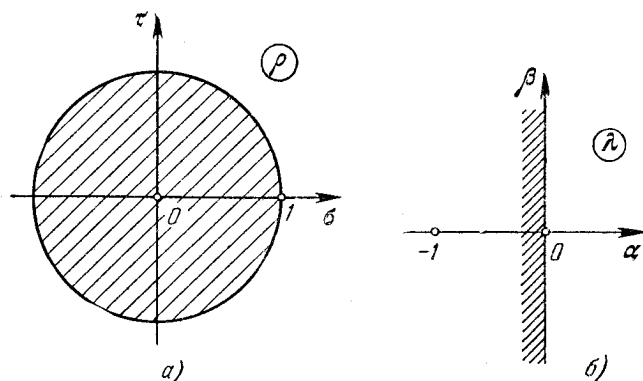


Рис. 21.

Нетрудно проверить, что дробно-линейное преобразование

$$\rho = \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1}$$

единичный круг  $|\rho| < 1$  плоскости  $\rho$  ( $\rho = \sigma + i\tau$ ) переводит в левую полуплоскость  $\operatorname{Re} \lambda < 0$  плоскости  $\lambda$  (рис. 21, а, б). Таким

образом, уравнение (3.16.2) заменяется следующим:

$$f\left(\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\right) = 0,$$

или

$$F(\lambda) = \pm (\lambda - 1)^n f\left(\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\right), \quad (3.16.3)$$

где полином  $F(\lambda)$  должен быть полиномом Гурвица (гл. II, § 9), причем знак в формуле (3.16.3) нужно выбрать так, чтобы полином  $F(\lambda)$  был стандартным, т. е. должно быть

$$F(0) = \pm (-1)^n f(-1) > 0.$$

Пример. При каком условии корни полинома

$$f(z) = z^2 + pz + q$$

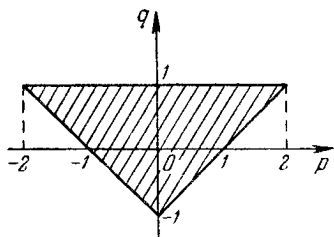


Рис. 22.

( $p$  и  $q$  действительны) лежат внутри круга  $|z| < 1$ ?

Положим

$$\begin{aligned} F(z) &= \pm (z-1)^2 \left[ \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2 + p \frac{z+1}{z-1} + q \right] = \\ &= \pm [(z+1)^2 + p(z^2-1) + q(z-1)^2] = \\ &= \pm [(1+p+q)z^2 + 2(1-q)z + (1-p+q)]. \end{aligned} \quad (3.16.4)$$

Так как  $F(z)$  должен быть полиномом Гурвица, то отсюда получаем искомые условия:

$$\left. \begin{aligned} 1+p+q &> 0, \\ 1-q &> 0, \\ 1-p+q &> 0, \end{aligned} \right\} \text{ или } \left. \begin{aligned} 1+p+q &< 0, \\ 1-q &< 0, \\ 1-p+q &< 0. \end{aligned} \right\}$$

Вторая система неравенств противоречива и, следовательно, окончательно имеем (рис. 22)  $-1 + |p| < q < 1$ .

## § 17. Нормальная форма решений линейной периодической системы

Согласно теории Флоке для  $\omega$ -периодической системы (3.15.1) существует фундаментальная матрица вида

$$X(t) = \Phi(t) e^{\Lambda t}, \quad (3.17.1)$$

где  $\Phi(t)$  —  $\omega$ -периодическая матрица и  $\Lambda$  — постоянная матрица. Пусть  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  ( $m \leq n$ ) — характеристические показатели системы, т. е. собственные значения матрицы  $\Lambda$ . Приведем матрицу  $\Lambda$  к канонической форме Жордана

$$\Lambda = S^{-1} \text{diag} [J_1(\lambda_1), \dots, J_m(\lambda_m)] S,$$

где  $S$  — неособенная постоянная матрица и  $J_p(\lambda_p)$  ( $p = 1, \dots, m$ ) — соответствующие клетки Жордана. Из формулы (3.17.1) получаем

$$X(t) = \Phi(t) S^{-1} \text{diag} [e^{tJ_1(\lambda_1)}, \dots, e^{tJ_m(\lambda_m)}] S. \quad (3.17.2)$$

Так как произведение фундаментальной матрицы на неособенную постоянную матрицу есть также фундаментальная матрица, то периодическая система (3.15.1) допускает фундаментальную матрицу вида

$$Y(t) = \Psi(t) \text{diag} [e^{tJ_1(\lambda_1)}, \dots, e^{tJ_m(\lambda_m)}], \quad (3.17.3)$$

где

$$\Psi(t) = \Phi(t) S^{-1}$$

— неособенная непрерывная матрица периода  $\omega$ .

Пусть  $Y(t) = [y_{jk}(t)]$  и  $\Psi(t) = [\psi_{jk}(t)]$ . Полагая

$$Y_1(t) = \Psi(t) \text{diag} [e^{tJ_1(\lambda_1)}, 0, \dots, 0],$$

где

$$J_1(\lambda_1) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

и

$$e^{tJ_1(\lambda_1)} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & t & \dots & \frac{t^{e_1-1}}{(e_1-1)!} e^{\lambda_1 t} \\ 0 & e^{\lambda_1 t} & \dots & \frac{t^{e_1-2}}{(e_1-2)!} e^{\lambda_1 t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_1 t} \end{bmatrix},$$

получим соответствующие корню  $\lambda_1$  частные решения:

$$y^{(1)} = \begin{bmatrix} \psi_{11}(t) \\ \psi_{n1}(t) \end{bmatrix} e^{\lambda_1 t},$$

$$y^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{t}{1!} \psi_{11}(t) + \psi_{12}(t) \\ \dots \\ \frac{t}{1!} \psi_{n1}(t) + \psi_{n2}(t) \end{bmatrix} e^{\lambda_1 t},$$

$$y^{(e_1)} = \begin{bmatrix} \frac{t^{e_1-1}}{(e_1-1)!} \psi_{11}(t) + \dots + \psi_{1e_1}(t) \\ \dots \\ \frac{t^{e_1-1}}{(e_1-1)!} \psi_{n1}(t) + \dots + \psi_{ne_1}(t) \end{bmatrix} e^{\lambda_1 t}.$$

Систему решений  $\mathbf{y}^{(1)}, \dots, \mathbf{y}^{(e_1)}$  можно записать более просто. Пусть

$$\Psi^{(j)}(t) = \begin{bmatrix} \psi_{1j}(t) \\ \dots \\ \psi_{nj}(t) \end{bmatrix}$$

и

$$\mathbf{P}^{(1)}(t) = \frac{t^{e_1-1}}{(e_1-1)!} \Psi^{(1)}(t) + \dots + \frac{t}{1!} \Psi^{(e_1-1)}(t) + \Psi^{(e_1)}(t). \quad (3.17.4)$$

Обозначим через  $D$  операцию дифференцирования по  $t$  при условии, что  $\psi_{jk}(t)$  постоянные, т. е.

$$\begin{aligned} D\mathbf{P}^{(1)}(t) &= \frac{t^{e_1-2}}{(e_1-2)!} \Psi^{(1)}(t) + \dots + \Psi^{(e_1-1)}(t), \\ &\dots \\ D^{e_1-1}\mathbf{P}^{(1)}(t) &= \Psi^{(1)}(t). \end{aligned}$$

Тогда группу частных решений, соответствующих клетке Жордана  $J_1(\lambda_1)$ , можно записать следующим образом (ср. [14]):

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^{(1)} &= e^{\lambda_1 t} D^{e_1-1} \mathbf{P}^{(1)}(t), \\ \mathbf{y}^{(2)} &= e^{\lambda_2 t} D^{e_1-2} \mathbf{P}^{(1)}(t), \\ &\dots \\ \mathbf{y}^{(e_1)} &= e^{\lambda_1 t} \mathbf{P}^{(1)}(t), \end{aligned} \quad (3.17.5)$$

где  $\mathbf{P}^{(1)}(t)$  — матричный полином типа  $n \times 1$  от  $t$  степени  $e_1 - 1$ , коэффициенты которого  $\omega$ -периодические матрицы-столбцы.

Аналогичную форму имеют группы частных решений, соответствующие остальным клеткам Жордана  $J_p(\lambda_p)$  ( $p = 2, \dots, m$ ).

Из формулы (3.17.5) вытекает, что для каждого характеристического показателя  $\lambda$  однородной периодической системы существует ее нормальное решение вида

$$\mathbf{y} = e^{\lambda t} \Psi(t),$$

где  $\Psi(t)$  — непрерывно дифференцируемая  $\omega$ -периодическая вектор-функция.

В частности, если все мультипликаторы  $\rho_1, \dots, \rho_n$  периодической системы простые, то существует ее фундаментальная система нормальных решений, имеющая вид

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{y}_1 &= e^{\lambda_1 t} \psi_1(t), \\ &\dots \\ \mathbf{y}_n &= e^{\lambda_n t} \psi_n(t), \end{aligned} \right\}$$

где  $\psi_j(t)$  ( $j = 1, \dots, n$ ) — непрерывно дифференцируемые  $\omega$ -периодические вектор-функции и  $\lambda_j = \frac{1}{\omega} \text{Ln } \rho_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ).

Пример. Рассмотрим скалярное уравнение

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0, \quad (3.17.6)$$

где  $p(t)$  и  $q(t)$  — непрерывные  $\omega$ -периодические функции. Полагая  $y = \dot{x}$ , получим линейную периодическую систему

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= -q(t)x - p(t)y. \end{aligned} \right\} \quad (3.17.7)$$

Пусть  $\rho_1$  и  $\rho_2$  — мультипликаторы системы (3.17.7) и

$$\lambda_j = \frac{1}{\omega} \text{Ln } \rho_j \quad (j = 1, 2).$$

Так как

$$\rho_1 \rho_2 = \exp \left[ - \int_0^{\omega} p(t) dt \right],$$

то можно принять

$$\lambda_2 = -\lambda_1 - \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} p(t) dt.$$

Если  $\rho_1 \neq \rho_2$  или же  $\rho_1 = \rho_2$ , но им отвечают простые элементарные делители, то уравнение (3.17.6) будет иметь фундаментальную систему решений:

$$x_1 = \psi_1(t) e^{\lambda_1 t}, \quad \dot{x}_2 = \psi_2(t) e^{\lambda_2 t},$$

где  $\psi_1(t)$  и  $\psi_2(t)$  — непрерывно дифференцируемые  $\omega$ -периодические функции.

Если  $\rho_1 = \rho_2$  и соответствующий элементарный делитель не является простым, то уравнение (3.17.6) допускает фундаментальную систему решений:

$$x_1 = \psi_1(t) e^{\lambda_1 t}, \quad x_2 = [t\psi_1(t) + \psi_2(t)] e^{\lambda_1 t},$$

где  $\psi_1(t)$  и  $\psi_2(t)$  —  $\omega$ -периодические функции класса  $C^1$  и

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2\omega} \int_0^{\omega} p(t) dt.$$

## § 18. Приближенное вычисление мультипликаторов

Пусть  $A(t)$  — непрерывная  $\omega$ -периодическая матрица. Основной промежуток  $[0, \omega]$  с помощью точек

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1} < t_m = \omega$$

разобьем на  $m$  равных частей, и пусть

$$h = \Delta t_k \equiv t_{k+1} - t_k = \frac{\omega}{m}.$$

В дифференциальном уравнении

$$\frac{dX}{dt} = A(t) X, \quad (3.18.1)$$

где  $X(0) = E$ , следуя [30], заменим матрицу  $A(t)$  кусочно-постоянной матрицей:

$$A_h(t) = \bar{A}_k \text{ при } t_k \leq t < t_{k+1} \quad (3.18.2)$$

$$(k = 0, 1, \dots, m-1),$$

где

$$\min_{t \in [t_k, t_{k+1}]} A(t) \leq \bar{A}_k \leq \max_{t \in [t_k, t_{k+1}]} A(t),$$

например,

$$\bar{A}_k = \frac{1}{h} \int_{t_k}^{t_{k+1}} A(t) dt.$$

Обозначим через  $X_h = X_h(t)$  непрерывную матрицу, удовлетворяющую в точках непрерывности коэффициента  $A_h(t)$  дифференциальному уравнению

$$\frac{dX_h}{dt} = A_h(t) X_h, \quad (3.18.3)$$

где  $0 \leq t \leq \omega$  и  $X_h(0) = E$ . Обобщенное решение  $X_h$  легко построить. На основании формул (3.18.2) имеем

$$\frac{dX_h}{dt} = A_k X_h \text{ при } t_k < t < t_{k+1}$$

и

$$\frac{dX_h}{dt} = \bar{A}_{k+1} X_h \text{ при } t_{k+1} < t < t_{k+2},$$

где  $A_k (k = 0, 1, \dots, m-1)$  — постоянные матрицы. Отсюда

$$X_h = e^{(t-t_k)\bar{A}_k} C_k \text{ при } t_k < t < t_{k+1}$$

и

$$X_h = e^{(t-t_{k+1})\bar{A}_{k+1}} C_{k+1} \text{ при } t_{k+1} < t < t_{k+2}.$$

Используя непрерывность решения  $X_h$  в точке  $t = t_{k+1}$ , будем иметь

$$C_{k+1} = e^{h\bar{A}_k} C_k \quad (k = 0, 1, \dots, m-1). \quad (3.18.4)$$

Кроме того, при  $k = 0$  и  $t = t_0 = 0$  получаем

$$X_h(0) = E = C_0.$$



Пусть

$$\|A(t)\| \leq M \quad \text{при } 0 \leq t \leq \omega;$$

тогда

$$\|A_k\| \leq M \quad (k=0, 1, \dots, m-1).$$

Из формулы (3.18.6) при  $t \in [0, \omega]$  находим

$$\|X_h(t)\| \leq e^{h\|A_k\|} \cdot e^{h\|A_{k-1}\|} \dots e^{h\|A_0\|} \leq e^{hmM} = e^{\omega M}.$$

Так как матрица  $A(t) \in C[0, \omega]$ , то для каждого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что

$$\|A(t') - A(t'')\| < \varepsilon,$$

если  $t', t'' \in [0, \omega]$  и  $|t' - t''| < \delta$ . Отсюда при  $h < \delta$  и  $t \in [0, \omega]$  будем иметь

$$\|A_h(t) - A(t)\| < \varepsilon.$$

Следовательно, из формулы (3.18.8) получаем

$$\|X_h(t) - X(t)\| \leq \varepsilon \omega e^{\omega M} + \int_0^t M \|X_h(t_1) - X(t_1)\| dt_1.$$

Применяя лемму Гронуолла — Беллмана (гл. II, § 11), получим

$$\|X_h(t) - X(t)\| \leq \varepsilon \omega e^{\omega M + Mt} \quad \text{при } 0 \leq t \leq \omega$$

и, следовательно,

$$\|X_h(\omega) - X(\omega)\| \leq \varepsilon \omega e^{2\omega M}, \quad (3.18.9)$$

если  $0 < h < \delta(\varepsilon)$ .

Так как число  $\varepsilon > 0$  может быть взято произвольно малым, то из неравенства (3.18.9) будем иметь

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|X_h(\omega) - X(\omega)\| = 0,$$

т. е.

$$\lim_{h \rightarrow 0} X_h(\omega) = X(\omega). \quad (3.18.10)$$

Рассмотрим характеристические уравнения

$$\det [X(\omega) - \rho E] = 0$$

и

$$\det [X_h(\omega) - \hat{\rho} E] = 0, \quad (3.18.11)$$



и пусть  $\rho_j, \hat{\rho}_j(h)$  ( $j=1, \dots, n$ ) — соответственно, корни этих уравнений. Так как корни  $\hat{\rho}_j(h)$  являются непрерывными функциями параметра  $h$ , то в силу соотношения (3.18.10) имеем

$$\lim_{h \rightarrow 0} \hat{\rho}_j(h) = \rho_j \quad (j=1, \dots, n). \quad (3.18.12)$$

Таким образом, выбрав  $h$  достаточно малым, из уравнения (3.18.11) можно определить мультипликаторы  $\rho_j$  с любой степенью точности.

### § 19. Линейное дифференциальное уравнение второго порядка с периодическими коэффициентами

Рассмотрим скалярное дифференциальное уравнение

$$\ddot{z} + a(t)\dot{z} + b(t)z = 0,$$

где  $a(t) \in C^1(-\infty, +\infty)$ ,  $b(t) \in C(-\infty, +\infty)$  и

$$a(t + \omega) \equiv a(t), \quad b(t + \omega) \equiv b(t) \quad (\omega > 0).$$

Полагая

$$z = e^{-\frac{1}{2} \int_0^t a(s) ds} x,$$

будем иметь

$$\ddot{x} + p(t)x = 0, \quad (3.19.1)$$

где

$$p(t) = b(t) - \frac{a^2(t)}{4} - \frac{\dot{a}(t)}{2} \in C(-\infty, +\infty)$$

и

$$p(t + \omega) \equiv p(t).$$

Для исследования устойчивости приведенного уравнения (3.19.1) заменим его эквивалентной системой

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= -p(t)x, \end{aligned} \right\} \quad (3.19.2)$$

матрица которой есть

$$P(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -p(t) & 0 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что

$$\text{Sp } P(t) = 0.$$

Будем говорить, что уравнение (3.19.1) *устойчиво* или *неустойчиво*, если устойчива или, соответственно, неустойчива система (3.19.2). Таким образом, все решения  $x(t)$  устойчивого уравнения (3.19.1) ограничены на  $[t_0, \infty)$  вместе с их производными  $\dot{x}(t)$ .

Из теории Флоке следует (см. § 17, пример), что если решение  $x(t)$  уравнения (3.19.1) ограничено на  $[t_0, \infty)$ , то его производная  $\dot{x}(t)$  также ограничена на  $[t_0, \infty)$ . Таким образом, уравнение (3.19.1) неустойчиво только в том случае, если оно имеет неограниченные на  $[t_0, \infty)$  решения.

Построим фундаментальную матрицу решений

$$X(t) = \begin{bmatrix} \varphi(t) & \psi(t) \\ \dot{\varphi}(t) & \dot{\psi}(t) \end{bmatrix},$$

где  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$  — линейно независимые решения уравнения (3.19.1), удовлетворяющие начальным условиям:

$$\varphi(0) = 1, \quad \dot{\varphi}(0) = 0 \quad (3.19.3)$$

и

$$\psi(0) = 0, \quad \dot{\psi}(0) = 1. \quad (3.19.4)$$

Следуя Ляпунову, решения  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$  можно получить в виде сходящихся рядов. Действительно, вводя в уравнение (3.19.1) числовой параметр  $\mu$  (см. [13]), будем иметь

$$\ddot{x} = \mu p(t) x, \quad (3.19.5)$$

где в окончательном результате следует положить  $\mu = -1$ . Пусть решение уравнения (3.19.5) имеет вид

$$\varphi(t, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(t) \mu^k. \quad (3.19.6)$$

Подставляя это выражение в дифференциальное уравнение (3.19.3) и предполагая возможность двукратного почленного дифференцирования, получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} \ddot{\varphi}_k(t) \mu^k \equiv \sum_{k=0}^{\infty} p(t) \varphi_k(t) \mu^{k+1}.$$

Отсюда

$$\ddot{\varphi}_0(t) = 0 \quad (3.19.7)$$

и

$$\ddot{\varphi}_k(t) = p(t) \varphi_{k-1}(t) \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (3.19.8)$$

Введем начальные условия:

$$\varphi_0(0) = 1, \quad \dot{\varphi}_0(0) = 0$$

и

$$\varphi_k(0) = \dot{\varphi}_k(0) = 0 \quad \text{при} \quad k \geq 1;$$

тогда начальные условия (3.19.3) для функции  $\varphi(t) = \varphi(t, -1)$  на основании (3.19.6), очевидно, будут выполнены. Из уравнений (3.19.7) и (3.19.8) находим

$$\varphi_0(t) = 1$$

и

$$\varphi_k(t) = \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} p(t_2) \varphi_{k-1}(t_2) dt_2 \quad (k \geq 1).$$

Последний интеграл можно заменить однократным. Действительно, меняя порядок интегрирования в этом интеграле, будем иметь

$$\begin{aligned} \varphi_k(t) &= \int_0^t dt_2 \int_{t_2}^t p(t_2) \varphi_{k-1}(t_2) dt_1 = \int_0^t (t - t_2) p(t_2) \varphi_{k-1}(t_2) dt_2 = \\ &= \int_0^t (t - t_1) p(t_1) \varphi_{k-1}(t_1) dt_1. \end{aligned} \quad (3.19.9)$$

Итак,

$$\begin{aligned} \varphi(t, \mu) &= 1 + \mu \int_0^t (t - t_1) p(t_1) dt_1 + \\ &+ \mu^2 \int_0^t (t - t_1) p(t_1) dt_1 \int_0^{t_1} (t_1 - t_2) p(t_2) dt_2 + \dots \end{aligned} \quad (3.19.10)$$

Исследуем сходимость ряда (3.19.10). Пусть

$$|p(t)| \leq M \quad \text{при} \quad -\infty < t < +\infty.$$

На основании формулы (3.19.9), учитывая, что  $\varphi_0(t) = 1$  при любом  $t \in (-\infty, +\infty)$ , последовательно имеем

$$\begin{aligned} |\varphi_1(t)| &\leq \int_0^t |t - t_1| M |dt_1| = \frac{Mt^2}{2!}, \\ |\varphi_2(t)| &\leq \int_0^t |t - t_1| M \cdot \frac{Mt_1^2}{2!} |dt_1| = \frac{M^2}{2!} \left( \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} \right) = \frac{M^2 t^3}{4!} \end{aligned}$$

и т. д.

Таким образом, функциональный ряд (3.19.10) мажорируется рядом

$$1 + |\mu| \cdot \frac{Mt^2}{2!} + |\mu|^2 \cdot \frac{M^2 t^4}{4!} + \dots = \text{ch}(t\sqrt{M|\mu|}),$$

который сходится для любой системы значений  $(\mu, t)$ . В силу признака Вейерштрасса ряд (3.19.10) сходится абсолютно и равномерно в любой конечной области  $G\{|\mu| < \mu_0, |t| < T\}$ . Легко также убедиться, что ряды, полученные в результате почленного дифференцирования ряда (3.19.10) по переменной  $t$ , также абсолютно и равномерно сходятся в любой конечной области  $G$ . Следовательно, сумма  $\varphi(t, \mu)$  ряда (3.19.10) представляет собой решение дифференциального уравнения (3.19.5).

Полагая  $\mu = -1$ , получим окончательно

$$\varphi(t) = 1 - \int_0^t (t-t_1) p(t_1) dt_1 + \int_0^t (t-t_1) p(t_1) dt_1 \int_0^{t_1} (t_1-t_2) p(t_2) dt_2 + \dots$$

$$(-\infty < t < +\infty). \quad (3.19.11)$$

Аналогично для дифференциального уравнения (3.19.5) строится второе решение

$$\psi(t, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k(t) \mu^k,$$

где

$$\psi_0(t) = t$$

и

$$\psi_k(t) = \int_0^t (t-t_1) p(t_1) \psi_{k-1}(t_1) dt_1 \quad (k \geq 1).$$

Отсюда

$$\psi(t, \mu) = t + \mu \int_0^t (t-t_1) t_1 p(t_1) dt_1 +$$

$$+ \mu^2 \int_0^t (t-t_1) p(t_1) dt_1 \int_0^{t_1} (t_1-t_2) t_2 p(t_2) dt_2 + \dots$$

и, следовательно,

$$\psi(t) = t - \int_0^t (t-t_1) t_1 p(t_1) dt_1 +$$

$$+ \int_0^t (t-t_1) p(t_1) dt_1 \int_0^{t_1} (t_1-t_2) t_2 p(t_2) dt_2 + \dots \quad (-\infty < t < +\infty).$$

$$(3.19.12)$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\det [X(\omega) - \rho E] \equiv \begin{vmatrix} \varphi(\omega) - \rho & \psi(\omega) \\ \dot{\varphi}(\omega) & \dot{\psi}(\omega) - \rho \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда, учитывая, что

$$\det X(\omega) = \det X(0) e^{\int_0^{\omega} \text{Sp } P(t) dt} = 1,$$

получим

$$\rho^2 - a\rho + 1 = 0, \quad (3.19.13)$$

где

$$a = \varphi(\omega) + \dot{\psi}(\omega) = \text{Sp } X(\omega) \quad (3.19.14)$$

— так называемая *константа Ляпунова*. Из формулы (3.19.12) имеем

$$\dot{\psi}(t) = 1 - \int_0^t t_1 p(t_1) dt_1 + \int_0^t p(t_1) dt_1 \int_0^{t_1} (t_1 - t_2) t_2 p(t_2) dt_2 + \dots$$

Поэтому для константы Ляпунова  $a$  получаем выражение

$$\begin{aligned} a = & 2 - \omega \int_0^{\omega} p(t_1) dt_1 + \int_0^{\omega} dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 (\omega - t_1 + t_2)(t_1 - t_2) p(t_1) p(t_2) - \\ & - \int_0^{\omega} dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 (\omega - t_1 + t_3)(t_1 - t_2)(t_2 - t_3) p(t_1) p(t_2) p(t_3) + \dots \end{aligned} \quad (3.19.15)$$

Будем предполагать, что коэффициент  $p(t)$  веществен; тогда константа  $a$  также вещественная. Из уравнения (3.19.13) имеем

$$\rho_{1,2} = \frac{1}{2} (a \pm \sqrt{a^2 - 4}).$$

Возможны три случая: 1)  $|a| > 2$ ; 2)  $|a| < 2$  и 3)  $|a| = 2$ .

Если  $|a| > 2$ , то характеристическое уравнение (3.19.13) имеет два действительных корня  $\rho_1$  и  $\rho_2$ , из которых один по модулю меньше единицы, а другой — больше. Таким образом, мультипликатор  $\rho_1$  лежит внутри единичного круга  $|\rho| < 1$  ( $|\rho_1| < 1$ ), а мультипликатор  $\rho_2$  — вне этого круга ( $|\rho_2| > 1$ ) (рис. 23). Следовательно, уравнение (3.19.1) неустойчиво.

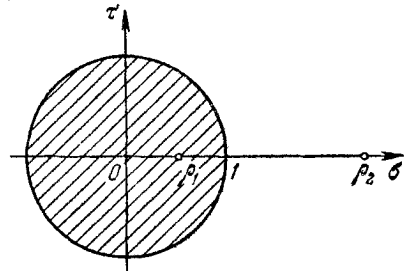


Рис. 23.

Если  $|a| < 2$ , то корни  $\rho_1$  и  $\rho_2$  характеристического уравнения комплексно-сопряжены и их модули равны 1, причем  $\rho_1 \neq \rho_2$ . Следовательно, мультипликаторы  $\rho_1$  и  $\rho_2$  расположены на окружности  $|\rho| = 1$  и не совпадают между собой (рис. 24). В силу теоремы из § 16 уравнение (3.19.1) устойчиво, т. е. все решения его ограничены.

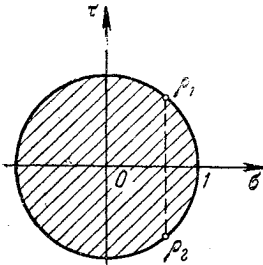


Рис. 24.

Случай  $|a| = 2$ , когда  $\rho_1 = \rho_2$ , требует более детального рассмотрения.

Отсюда на основании формулы (3.19.15) имеем следующий признак неустойчивости уравнения (3.19.1).

**Теорема 1.** *Если непрерывный периодический коэффициент  $p(t)$  может принимать лишь отрицательные или нулевые значения, не будучи тождественно равным нулю, то линейное уравнение (3.19.1)*

*неустойчиво, причем мультипликаторы положительны и один из них больше единицы, а другой — меньше.*

Действительно, так как

$$\int_0^{\omega} p(t_1) dt_1 < 0$$

и

$$\begin{aligned} (-1)^n \int_0^{\omega} dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n (\omega - t_1 + t_n)(t_1 - t_2) \dots \\ \dots (t_{n-1} - t_n) p(t_1) \dots p(t_n) \geq 0 \quad (n = 1, 2, \dots), \end{aligned}$$

то из формулы (3.19.15) имеем

$$a > 2.$$

Рассмотрим теперь случай неотрицательного коэффициента  $p(t) \geq 0$  в уравнении (3.19.1).

**Теорема 2** (Интегральный признак устойчивости Ляпунова). *Если непрерывная  $\omega$ -периодическая функция  $p(t)$  может принимать лишь положительные или нулевые значения, не будучи тождественно равной нулю, и выполнено неравенство*

$$0 < \omega \int_0^{\omega} p(t) dt \leq 4, \quad (3.19.16)$$

*то все решения  $x(t)$  уравнения (3.19.1) ограничены вместе с их производными первого порядка на  $(-\infty, +\infty)$ , т. е. уравнение (3.19.1) устойчиво.*

Доказательство. На основании формулы (3.19.15) для константы Ляпунова имеем следующее выражение:

$$a = 2 - I_2 + I_3 + \dots + (-1)^{k-1} I_k + \dots, \quad (3.19.17)$$

где

$$I_1 = \omega \int_0^{\omega} p(t) dt$$

и

$$I_k = \int_0^{\omega} dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{k-1}} dt_k \cdot (\omega - t_1 + t_k)(t_1 - t_2) \dots \\ \dots (t_{k-1} - t_k) p(t_1) \dots p(t_k) > 0 \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (3.19.18)$$

Имеем

$$I_{k+1} = \int_0^{\omega} dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{k-1}} dt_k (t_1 - t_2) \dots (t_{k-1} - t_k) p(t_1) \dots \\ \dots p(t_k) \int_0^{t_k} (\omega - t_1 + t_{k+1})(t_k - t_{k+1}) p(t_{k+1}) dt_{k+1}.$$

Используя очевидное неравенство

$$xy \leq \left( \frac{x+y}{2} \right)^2,$$

получим

$$(\omega - t_1 + t_{k+1})(t_k - t_{k+1}) \leq \frac{1}{4} (\omega - t_1 + t_k)^2 < \frac{\omega}{4} (\omega - t_1 + t_k) \\ \text{при } 0 \leq t_k < t_1.$$

Таким образом,

$$I_{k+1} < \frac{\omega}{4} \int_0^{\omega} dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{k-1}} dt_k \cdot (\omega - t_1 + t_k)(t_1 - t_2) \dots (t_{k-1} - t_k) \cdot p(t_1) \dots \\ \dots p(t_k) \int_0^{t_k} p(t_{k+1}) dt_{k+1} < \frac{\omega}{4} \int_0^{\omega} p(t) dt \cdot I_k \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Отсюда в силу условия (3.19.16) находим

$$I_1 > I_2 > I_3 > \dots$$

Из сходимости ряда (3.19.17) вытекает

$$\lim_{k \rightarrow \infty} I_k = 0.$$

Следовательно, ряд (3.19.17) представляет собой ряд Лейбница и, значит, справедливы оценки  $2 - \omega \int_0^{\omega} p(t) dt < a < 2$ , или в силу неравенства (3.19.16)

$$-2 < a < 2.$$

Отсюда в силу уравнения (3.19.13) мультипликаторы  $\rho_1$  и  $\rho_2$  комплексно-сопряженные, причем  $|\rho_1| = |\rho_2| = 1$ ,  $\rho_1 \neq \rho_2$ . Значит, уравнение (3.19.1) устойчиво и каждое решение его  $x(t)$  ограничено вместе с производной  $\dot{x}(t)$ .

*Следствие.* Если линейное дифференциальное уравнение (3.19.1) с непрерывным положительным  $\omega$ -периодическим коэффициентом  $p(t)$  имеет неограниченное решение, то выполнено неравенство

$$\omega \int_0^{\omega} p(t) dt > 4.$$

*Замечание.* Изложенная выше теория Ляпунова об устойчивости приведенного дифференциального уравнения (3.19.1) остается в силе, если его  $\omega$ -периодический коэффициент  $p(t)$  ограничен при  $0 \leq t \leq \omega$  и является кусочно-непрерывным на  $[0, \omega]$ .

Действительно, в этом случае решения  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$ , определяемые начальными условиями (3.19.3) и (3.19.4), также изображаются функциональными рядами (3.19.11) и (3.19.12), сходящимися на  $(-\infty, +\infty)$  и допускающими почленное дифференцирование. Сходимость всех этих рядов, как следует из несложных оценок их членов, равномерна на любом конечном интервале  $(a, b) \subset (-\infty, +\infty)$ . Следовательно,  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$  суть функции класса  $C^1(-\infty, +\infty)$ , удовлетворяющие дифференциальному уравнению (3.19.1) всюду, за исключением, быть может, точек разрыва коэффициента  $p(t)$ , число которых конечно на каждом промежутке  $[k\omega, (k+1)\omega]$  ( $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), т. е.  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$  являются обобщенными решениями (см. § 18) уравнения (3.19.1). Иначе говоря,  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$  суть решения дифференциального уравнения (3.19.1), записанного в интегральной форме:

$$\dot{x}(t) = \dot{x}(0) - \int_0^t p(\tau) x(\tau) d\tau.$$

Так как

$$\det X(t) = \begin{vmatrix} \varphi(t) & \psi(t) \\ \dot{\varphi}(t) & \dot{\psi}(t) \end{vmatrix} = 1$$

при  $t \in (-\infty, +\infty)$ , то  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$  представляют собой фундаментальную систему решений дифференциального уравнения (3.19.1) на каждом интервале непрерывности его коэффициента  $p(t)$ . Отсюда, используя непрерывность функций  $\varphi(t)$ ,  $\psi(t)$ ,  $\dot{\varphi}(t)$ ,  $\dot{\psi}(t)$  и перехода



к пределам, получаем, что  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$  образуют фундаментальную систему решений уравнения (3.19.1) на всем промежутке  $(-\infty, +\infty)$ . Тем самым константа Ляпунова  $\alpha$  имеет выражение (3.19.15) и приведенные выше признаки неустойчивости и устойчивости уравнения вида (3.19.1) полностью переносятся на наш случай.

Пример 1. Рассмотрим уравнение Матье

$$\ddot{x} + (\alpha + \beta \cos t)x = 0 \\ (\alpha > 0, |\beta| \leq \alpha).$$

Здесь

$$p(t) = \alpha + \beta \cos t \quad \text{и} \quad \omega = 2\pi.$$

Следовательно,

$$\omega \int_0^{\omega} p(t) dt = 2\pi \int_0^{2\pi} (\alpha + \beta \cos t) dt = 4\pi^2 \alpha.$$

Отсюда в силу признака Ляпунова область устойчивости (рис. 25) характеризуется неравенствами

$$|\beta| \leq \alpha \quad \text{и} \quad 0 < \alpha \leq \frac{1}{\pi^2}.$$

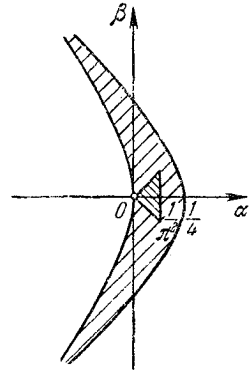


Рис. 25.

Более подробно этот вопрос разобран у Стокера (см. [31]), где построена область устойчивости, полученная численным методом.

Отметим, что наличие неравенства  $0 < \alpha^2 \leq p(t) \leq \beta^2 < \infty$ , где  $\alpha$  и  $\beta$  — положительные постоянные, не гарантирует ограниченности решений уравнения (3.19.1).

Пример 2. Пусть

$$\ddot{x} + p(t)x = 0, \tag{3.19.19}$$

где

$$p(t) = \begin{cases} \alpha^2 & \text{при } 0 < t < c, \\ \beta^2 & \text{при } c < t < \omega \end{cases} \tag{3.19.20} \\ (\alpha > 0, \beta > 0)$$

и  $p(t + \omega) = p(t)$  (рис. 26). Под решениями  $x = x(t)$  дифференциального уравнения (3.19.19) будем понимать функции класса  $C^1(-\infty, +\infty)$ , удов-

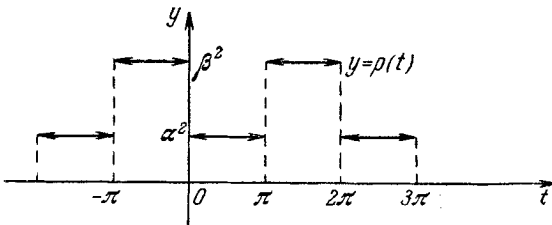


Рис. 26.

летворяющие этому уравнению всюду, за исключением, быть может, точек разрыва  $k\omega$ ,  $k\omega + c$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) коэффициента  $p(t)$ .

Заменим уравнение (3.19.19) системой

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= -p(t)x, \end{aligned} \right\}$$

и пусть  $X(t)$  — нормированная фундаментальная матрица такая, что  $X(0) = E$ . На основании (3.19.20), используя прием, примененный в § 18, имеем

$$X(t) = \begin{bmatrix} \cos \alpha t & \frac{1}{\alpha} \sin \alpha t \\ -\alpha \sin \alpha t & \cos \alpha t \end{bmatrix} \quad \text{при } 0 \leq t \leq c$$

и

$$X(t) = \begin{bmatrix} A \cos \beta(t-c) + B \sin \beta(t-c) & C \cos \beta(t-c) + D \sin \beta(t-c) \\ -A\beta \sin \beta(t-c) + B\beta \cos \beta(t-c) & -C\beta \sin \beta(t-c) + D\beta \cos \beta(t-c) \end{bmatrix} \\ \text{при } c \leq t \leq \omega.$$

Отсюда из требования непрерывности при  $t = c$  матрицы  $X(t)$  находим

$$A = \cos \alpha c, \quad B = -\frac{\alpha}{\beta} \sin \alpha c, \\ C = \frac{1}{\alpha} \sin \alpha c, \quad D = \frac{1}{\beta} \cos \alpha c.$$

Таким образом, матрица монодромии имеет вид

$$X(\omega) = \begin{bmatrix} \cos \alpha c \cos \beta(\omega - c) - \frac{\alpha}{\beta} \sin \alpha c \sin \beta(\omega - c) \\ -\beta \cos \alpha c \sin \beta(\omega - c) - \alpha \sin \alpha c \cos \beta(\omega - c) \\ \frac{1}{\alpha} \sin \alpha c \cos \beta(\omega - c) + \frac{1}{\beta} \cos \alpha c \sin \beta(\omega - c) \\ -\frac{\beta}{\alpha} \sin \alpha c \sin \beta(\omega - c) + \cos \alpha c \cos \beta(\omega - c) \end{bmatrix}$$

Следовательно, константа Ляпунова для уравнения (3.19.19) есть

$$a = \text{Sp } X(\omega) = 2 \cos \alpha c \cos \beta(\omega - c) - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} \sin \alpha c \sin \beta(\omega - c). \quad (3.19.21)$$

Очевидно,

$$\left| \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} \right| \geq 2.$$

Отсюда следует, что уравнение (3.19.19), коэффициент которого  $p(t)$  положителен, может быть как устойчивым, так и неустойчивым. Полагая, например,  $\alpha = \frac{\pi}{2c}$  и  $\beta = \frac{\pi}{\omega - c}$ , будем иметь  $a = 0$  и, следовательно,

уравнение (3.19.19) устойчиво. Если же  $\alpha = \frac{\pi}{2c}$  и  $\beta = \frac{3\pi}{2(\omega - c)}$ , то при  $c \neq \frac{\omega}{4}$ , т. е. при  $\alpha \neq \beta$ , получим

$$a = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = 2 + \frac{(\alpha - \beta)^2}{\alpha\beta} > 2,$$

и, таким образом, уравнение (3.19.19) неустойчиво.

**Замечание.** Н. Е. Жуковский доказал, что постоянную 4 в признаке Ляпунова (3.19.16) нельзя заменить большей, т. е. в этом смысле она является наилучшей. Приведем простой пример системы вида (3.19.1) с кусочно-постоянным коэффициентом, иллюстрирующий это обстоятельство, идея которого принадлежит Н. П. Купцову.

**Пример 3.** Пусть  $\delta$  — произвольно малое положительное число ( $0 < \delta < 1$ ). В  $\omega$ -периодическом уравнении

$$\ddot{x} + p(t)x = 0 \quad (3.19.22)$$

положим

$$p(t) = \alpha^2 = \frac{4}{\omega c} \quad \text{при } 0 < t < c$$

и

$$p(t) = \beta^2 = \frac{\delta}{\omega(\omega - c)} \quad \text{при } c < t < \omega.$$

Очевидно, имеем

$$\omega \int_0^{\omega} p(t) dt = \omega \left[ \int_0^c \frac{4}{\omega c} dt + \int_c^{\omega} \frac{\delta}{\omega(\omega - c)} dt \right] = 4 + \delta.$$

Покажем, что при достаточно малом  $\delta$  и надлежащем выборе параметра  $c$  уравнение (3.19.22) неустойчиво. Для этого достаточно убедиться, что соответствующая константа Ляпунова  $a$  [см. (3.19.21)] удовлетворяет неравенству  $|a| > 2$ .

Действительно, положим

$$c = \frac{\omega}{16} \delta.$$

Тогда

$$\alpha = \frac{2}{\sqrt{\omega c}} = \frac{8}{\omega \sqrt{\delta}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{\delta}{\omega(\omega - c)}} = \frac{\sqrt{\delta}}{\omega \sqrt{1 - \frac{\delta}{16}}}$$

и, следовательно,

$$\alpha c = \frac{1}{2} \sqrt{\delta}, \quad \beta(\omega - c) = \sqrt{\delta} \sqrt{1 - \frac{\delta}{16}}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} &= \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{8}{\delta} \left(1 - \frac{\delta}{16}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\delta}{8} \left(1 - \frac{\delta}{16}\right)^{-\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{8}{\delta} \left[1 - \frac{\delta}{32} + o(\delta)\right] \quad \text{при } \delta \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Используя известные асимптотические разложения тригонометрических функций:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad \sin x = x \left(1 - \frac{x^2}{6}\right) + o(x^3) \text{ при } x \rightarrow 0,$$

на основании формулы (3.19.21) для константы Ляпунова  $a$  получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} a &= 2 \cos \alpha c \cos \beta (\omega - c) - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} \sin \alpha c \sin \beta (\omega - c) = \\ &= 2 \left(1 - \frac{\delta}{8}\right) \left(1 - \frac{\delta}{2}\right) - \frac{8}{\delta} \left(1 - \frac{\delta}{32}\right) \cdot \frac{\sqrt{\delta}}{2} \left(1 - \frac{\delta}{24}\right) \cdot \sqrt{\delta} \left(1 - \frac{\delta}{32}\right) \left(1 - \frac{\delta}{6}\right) + \\ &\quad + o(\delta) = -2 - \frac{\delta}{6} + o(\delta) \text{ при } \delta \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Следовательно, при достаточно малом положительном  $\delta$  выполнено неравенство  $a < -2$ , и таким образом, уравнение (3.19.22) является неустойчивым.

## § 20. Гамильтонова система дифференциальных уравнений

Пусть

$$H = H(t, q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) \equiv H(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) \in C_{tqp}^{(0, 1, 1)}$$

действительна и

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} = \text{colon} \left( \frac{\partial H}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial q_n} \right), \quad \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = \text{colon} \left( \frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_n} \right).$$

Система

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{q}}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \\ \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \end{aligned} \right\} \quad (3.20.1)$$

называется *гамильтоновой* или *канонической* с функцией Гамильтона  $H$ . Такие системы играют важную роль в теоретической механике (см. [32], [33]). Заметим, что если  $H$  не зависит от  $t$ :

$$H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}),$$

то каноническая система (3.20.1) допускает первый интеграл

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = h = \text{const.}$$

Положим

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix},$$

и пусть

$$J \equiv J_{2n} = \begin{bmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{bmatrix}$$

— так называемая *симплектическая единица*. Тогда каноническую систему (3.20.1) можно записать в виде

$$\frac{dx}{dt} = J \frac{\partial H}{\partial x}, \quad (3.20.2)$$

где

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{bmatrix}.$$

Для единообразия введем обозначения:  $q = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $p = (x_{n+1}, \dots, x_{2n})$ . Тогда

$$H = H(t, \mathbf{x}).$$

Пусть функция Гамильтона  $H$  есть квадратичная форма переменных  $x_1, \dots, x_{2n}$ , т. е.

$$H(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{j,k} a_{jk}(t) x_j x_k, \quad (3.20.3)$$

где

$$a_{jk}(t) = a_{kj}(t).$$

Из формулы (3.20.3) имеем

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \text{colon} \left( \frac{\partial H}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial x_{2n}} \right) = \begin{bmatrix} \sum_k a_{1k}(t) x_k \\ \dots \\ \sum_k a_{2n,k}(t) x_k \end{bmatrix} \equiv A(t) \mathbf{x},$$

где  $a(t) = [a_{jk}(t)]$  — симметрическая матрица. Отсюда получаем линейную гамильтонову систему

$$\frac{dx}{dt} = JA(t) \mathbf{x} \quad (3.20.4)$$

с функцией Гамильтона

$$H(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{2} [A(t) \mathbf{x}, \mathbf{x}].$$

Заметим, что

$$\text{Sp} [JA(t)] = 0.$$

Действительно, если

$$A(t) = \begin{bmatrix} P(t) & Q(t) \\ Q(t) & R(t) \end{bmatrix},$$

то

$$JA(t) = \begin{bmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(t) & Q(t) \\ Q(t) & R(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q(t) & R(t) \\ -P(t) & -Q(t) \end{bmatrix}$$

и, следовательно,

$$\text{Sp} [JA(t)] = 0.$$

Пусть

$$\mathbf{x} = \text{colop}(x_1, \dots, x_{2n}), \quad \mathbf{y} = \text{colop}(y_1, \dots, y_{2n})$$

— любые решения гамильтоновой системы (3.20.4) (векторы-столбцы). Через  $\mathbf{x}^T$  обозначим транспонированное решение (вектор-строку)

$$\mathbf{x}^T = (x_1, \dots, x_{2n}).$$

*Лемма.* Для любых двух решений  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  линейной гамильтоновой системы (3.20.4) остается постоянным их симплектическое произведение

$$u = \mathbf{x}^T J \mathbf{y}. \quad (3.20.5)$$

*Доказательство.* Дифференцируя функцию  $u$ , получим

$$\frac{du}{dt} = \frac{d\mathbf{x}^T}{dt} J \mathbf{y} + \mathbf{x}^T J \frac{d\mathbf{y}}{dt}. \quad (3.20.6)$$

Так как  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  — решения системы (3.20.4), то

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = JA(t) \mathbf{x} \quad \text{и} \quad \frac{d\mathbf{y}}{dt} = JA(t) \mathbf{y}.$$

Отсюда, учитывая симметричность матрицы  $A(t)$  и то, что

$$J^T = -J,$$

получаем

$$\frac{d\mathbf{x}^T}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^T = \mathbf{x}^T A^T(t) J^T = -\mathbf{x}^T A(t) J.$$

Следовательно, принимая во внимание, что

$$JJ = J^2 = -E_{2n},$$

из формулы (3.20.5) имеем

$$\frac{du}{dt} = -\mathbf{x}^T A(t) J J \mathbf{y} + \mathbf{x}^T J J A(t) \mathbf{y} = \mathbf{x}^T A(t) \mathbf{y} - \mathbf{x}^T A(t) \mathbf{y} \equiv 0.$$

Поэтому

$$u = \mathbf{x}^T J \mathbf{y} \equiv \text{const}.$$

*Замечание.* Лемма остается верной для  $(2n \times 2n)$ -матричных решений  $X(t)$  и  $Y(t)$  гамильтоновой системы (3.20.4), т. е.

$$X^T(t) J Y(t) = C,$$

где  $C$  — постоянная  $(2n \times 2n)$ -матрица.

## § 21. Возвратные уравнения

Определение. Алгебраический полином

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n \quad (3.21.1)$$

$$(a_0 \neq 0, \quad z = x + iy)$$

называется *возвратным*, если коэффициенты его, симметричные относительно крайних членов полинома, равны между собой, т. е.

$$a_k = a_{n-k} \quad \left(k = 0, 1, \dots, E\left(\frac{n}{2}\right)\right). \quad (3.21.2)$$

Отсюда вытекает, что для возвратного полинома  $f(z)$  степени  $n$  справедливо тождество

$$f\left(\frac{1}{z}\right) \equiv \frac{1}{z^n} f(z) \quad (z \neq 0). \quad (3.21.3)$$

Обратно, если для полинома  $f(z)$  выполнено тождество (3.21.3), то этот полином возвратный.

Приравняв нулю возвратный полином, получим *возвратное уравнение*

$$f(z) \equiv a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0. \quad (3.21.4)$$

Если степень  $n$  возвратного уравнения четная, то с помощью подстановки

$$t = z + \frac{1}{z}$$

его можно свести к уравнению степени  $\frac{n}{2}$  относительно неизвестного  $t$ .

Возвратное уравнение нечетной степени  $n$  имеет корень  $z_1 = -1$ , выделив который получим возвратное уравнение четной степени  $n-1$ . Таким образом, указанная выше подстановка позволяет привести возвратное уравнение нечетной степени  $n$  к алгебраическому уравнению степени  $\frac{n-1}{2}$ .

Лемма. Если уравнение (3.21.4) возвратное, то каждому корню его  $z_s \neq \pm 1$  соответствует взаимно обратный корень

$$z_t = \frac{1}{z_s} \quad (3.21.5)$$

той же кратности. Если, сверх того, данное уравнение имеет корень  $z = 1$ , то кратность этого корня четная; если же оно

имеет корень  $z = -1$ , то кратность последнего сравнима со степенью уравнения  $n$  по модулю два<sup>1)</sup>.

Доказательство. Действительно, корни возвратного уравнения удовлетворяют условию (3.21.5), так как, если

$$f(z_s) = 0 \quad (z_s \neq 0),$$

то на основании тождества (3.21.3) имеем

$$f\left(\frac{1}{z_s}\right) = \frac{1}{z_s^n} f(z_s) = 0.$$

Таким образом,  $\frac{1}{z_s} = z_t$  есть также корень уравнения (рис. 27).

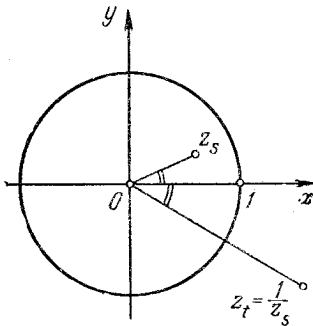


Рис. 27.

Заметим, что в случае  $z_s = \pm 1$  получаем очевидный результат  $z_t = \pm 1$ .

Покажем теперь, что кратности взаимно обратных корней возвратного уравнения одинаковы.

Обозначим через  $\alpha_s$  кратности корней  $z_s$  ( $s=1, \dots, m$ ), расположенных внутри единичного круга  $|z| < 1$  и на верхней полуокружности  $|z|=1$ ,  $\text{Im } z > 0$ , а через  $\beta_s$  кратности соответствующих взаимно обратных корней  $\frac{1}{z_s}$ , расположенных, очевидно, вне единичного круга  $|z| > 1$  и на нижней полуокружности  $|z|=1$ ,  $\text{Im } z < 0$ . Кроме

того, кратности возможных корней  $z=1$  и  $z=-1$ , лежащих на окружности  $|z|=1$  ( $\text{Im } z=0$ ), обозначим, соответственно, через  $\gamma$  и  $\delta$ . Если какие-нибудь из указанных корней отсутствуют, то мы условно считаем, что кратность их равна нулю. Отсюда разложение многочлена  $f(z)$  на множители будет иметь вид

$$f(z) = a_0 (z - z_1)^{\alpha_1} \dots (z - z_m)^{\alpha_m} \left(z - \frac{1}{z_1}\right)^{\beta_1} \dots \\ \dots \left(z - \frac{1}{z_m}\right)^{\beta_m} (z - 1)^\gamma (z + 1)^\delta, \quad (3.21.6)$$

где

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_m + \beta_1 + \dots + \beta_m + \gamma + \delta = n. \quad (3.21.7)$$

<sup>1)</sup> То есть кратность корня  $z = -1$  четная, если  $n$  четно, и нечетная, если  $n$  нечетно.



Так как полином  $f(z)$  возвратный, то в силу тождества (3.21.3) имеем

$$\begin{aligned} f(z) = z^n f\left(\frac{1}{z}\right) &= a_0 z^n \left(\frac{1}{z} - z_1\right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{1}{z} - z_m\right)^{\alpha_m} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z_1}\right)^{\beta_1} \dots \\ &\dots \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z_m}\right)^{\beta_m} \left(\frac{1}{z} - 1\right)^{\gamma} \left(\frac{1}{z} + 1\right)^{\delta} = a_0 (-z_1)^{\alpha_1 - \beta_1} \dots \\ &\dots (-z_m)^{\alpha_m - \beta_m} (-1)^{\gamma} (z - z_1)^{\beta_1} \dots (z - z_m)^{\beta_m} \left(z - \frac{1}{z_1}\right)^{\alpha_1} \dots \\ &\dots \left(z - \frac{1}{z_m}\right)^{\alpha_m} (z - 1)^{\gamma} (z + 1)^{\delta}. \end{aligned} \quad (3.21.8)$$

В силу свойства единственности разложения (3.21.6) и (3.21.8) должны совпадать между собой; поэтому

$$\beta_1 = \alpha_1, \dots, \beta_m = \alpha_m$$

и  $\gamma$  четно.

Кроме того, из соотношения (3.21.7) получаем

$$\delta \equiv n \pmod{2}^1).$$

Лемма доказана.

*Следствие.* Если возвратное уравнение четной степени имеет корень  $z=1$  или корень  $z=-1$ , то эти корни четной кратности.

## § 22. Теорема Ляпунова—Пуанкаре

*Теорема Ляпунова—Пуанкаре.* Если матрица  $A(t)$  линейной гамильтоновой системы

$$\frac{dx}{dt} = JA(t)x \quad (3.22.1)$$

$\omega$ -периодическая, то характеристическое уравнение

$$f(\rho) \equiv \det [\rho E - X(\omega)] = 0, \quad (3.22.2)$$

где  $X(\omega)$  — матрица монодромии, является возвратным.

*Доказательство.* Приведем простое доказательство теоремы, принадлежащее Гельфанду и Лидскому (см. [34]).

На основании леммы и замечания к ней (§ 20) для фундаментальной матрицы  $X(t)$  ( $X(0) = E$ ) справедливо соотношение

$$X^T(t) J X(t) = C.$$

Полагая  $t=0$  и учитывая, что  $X^T(0) = X(0) = E$ , получим

$$C = J.$$

<sup>1)</sup> То есть разность  $n - \delta$  делится без остатка на 2.

Таким образом,

$$X^T(t) J X(t) = J$$

и, следовательно,

$$X^T(t) = J X^{-1}(t) J^{-1}.$$

В частности,

$$X^T(\omega) = J X^{-1}(\omega) J^{-1}.$$

Отсюда, учитывая, что

$$\det J = \det J^{-1} = 1,$$

при  $\rho \neq 0$  имеем

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{\rho}\right) &= \det \left[ \frac{1}{\rho} E - X(\omega) \right] = \frac{1}{\rho^{2n}} \det [E - \rho X(\omega)] = \\ &= \frac{1}{\rho^{2n}} \det [E - \rho X^T(\omega)] = \frac{1}{\rho^{2n}} \det [J E J^{-1} - \rho J X^{-1}(\omega) J^{-1}] = \\ &= \frac{1}{\rho^{2n}} \det J \cdot \det [E - \rho X^{-1}(\omega)] \cdot \det J^{-1} = \\ &= \frac{1}{\rho^{2n}} \det X^{-1}(\omega) \cdot \det [\rho E - X(\omega)]. \end{aligned}$$

Но

$$\det X(\omega) = \det X(0) \cdot \exp \int_0^{\omega} \text{Sp } JA(t) dt = 1,$$

поэтому

$$\det X^{-1}(\omega) = 1.$$

Таким образом,

$$\rho^{2n} f\left(\frac{1}{\rho}\right) \equiv f(\rho) \quad (3.22.3)$$

и, значит (§ 21), характеристическое уравнение (3.22.2) является возвратным.

Следствие 1. Для гамильтоновой системы (3.22.1) мультипликаторы  $\rho_s$  и  $\frac{1}{\rho_s}$  ( $|\rho_s| \neq 1$ ) имеют одинаковую кратность.

Следствие 2. Если характеристическое уравнение (3.22.2) имеет корень  $\rho = 1$  или  $\rho = -1$ , то эти корни четной кратности.

Из теоремы Ляпунова—Пуанкаре вытекает, что гамильтонова линейная система не может быть асимптотически устойчивой (§ 15).

Теорема. Линейная гамильтонова система с периодическими коэффициентами устойчива тогда и только тогда, когда все ее мультипликаторы  $\rho_j$  расположены на единичной окружности  $|\rho_j| = 1$  и имеют простые элементарные делители.

Рассмотрим систему (см. [29]):

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} + B(t) \mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad (3.22.4)$$

где  $B(t)$  —  $(n \times n)$ -матрица периодическая и симметрическая:

$$B(t + \omega) \equiv B(t), \quad B^T(t) \equiv B(t) \quad (\omega > 0).$$

Запишем матричное уравнение (3.22.4) в виде системы:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{y}, \\ \frac{d\mathbf{y}}{dt} &= -B(t) \mathbf{x}, \end{aligned} \right\} \quad (3.22.5)$$

или

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = JA(t) \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix},$$

где

$$A(t) = \begin{bmatrix} B(t) & 0 \\ 0 & E_n \end{bmatrix}.$$

Так как матрица  $A(t)$  симметрическая, т. е.  $A^T(t) = A(t)$ , имеем теорему: *характеристическое уравнение для периодической системы (3.22.5) возвратное.*

### § 23. Неоднородная периодическая система

Пусть

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A(t) \mathbf{y} + \mathbf{f}(t), \quad (3.23.1)$$

где  $A(t)$  и  $\mathbf{f}(t)$  — непрерывные  $(n \times n)$ - и  $(n \times 1)$ -матрицы с общим периодом  $\omega$  ( $\omega > 0$ ).

**Теорема 1.** *Если однородная периодическая система*

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t) \mathbf{x} \quad (3.23.2)$$

*не имеет нетривиальных  $\omega$ -периодических решений, т. е. все мультипликаторы ее отличны от единицы ( $p_j \neq 1$ ), то соответствующая неоднородная периодическая система имеет единственное периодическое решение периода  $\omega$ .*

**Доказательство** (см. [29]). Используя метод Лагранжа, из уравнения (3.23.1) имеем

$$\mathbf{y}(t) = X(t) \mathbf{y}(0) + \int_0^t X(t) X^{-1}(\tau) \mathbf{f}(\tau) d\tau, \quad (3.23.3)$$

где  $X(t)$  — нормированная при  $t=0$  фундаментальная матрица однородной системы (3.23.2). В силу теоремы единственности решение  $y(t)$  будет  $\omega$ -периодическим тогда и только тогда, когда

$$y(\omega) = y(0).$$

Отсюда на основании формулы (3.23.3) для  $\omega$ -периодического решения  $y(t)$  будем иметь

$$y(0) = X(\omega)y(0) + X(\omega) \int_0^{\omega} X^{-1}(t)f(t) dt,$$

или

$$[E - X(\omega)]y(0) = X(\omega) \int_0^{\omega} X^{-1}(t)f(t) dt. \quad (3.23.4)$$

Так как в силу условия теоремы вековое уравнение

$$\det[\rho E - X(\omega)] = 0$$

не имеет корня  $\rho = 1$ , то

$$\det[E - X(\omega)] \neq 0$$

и, следовательно, существует

$$[E - X(\omega)]^{-1}.$$

Таким образом, получаем

$$y(0) = [E - X(\omega)]^{-1} X(\omega) \int_0^{\omega} X^{-1}(t)f(t) dt.$$

На основании формулы (3.23.3) находим периодическое решение

$$y(t) = X(t) [E - X(\omega)]^{-1} \left\{ \int_0^t X^{-1}(\tau)f(\tau) d\tau + X(\omega) \int_t^{\omega} X^{-1}(\tau)f(\tau) d\tau \right\}. \quad (3.23.5)$$

То, что  $\omega$ -периодическое решение  $\omega$  единственно, вытекает из того обстоятельства, что разность двух различных  $\omega$ -периодических решений неоднородного уравнения (3.23.1) является нетривиальным  $\omega$ -периодическим решением однородного уравнения (3.23.2), а последнее в нашем случае исключается.

**Замечание.** Периодическое решение  $y(t)$  неоднородной системы (3.23.1) может быть записано в виде (см. [29])

$$y(t) = \int_0^{\omega} G(t, \tau)f(\tau) d\tau, \quad (3.23.6)$$

где

$$G(t, \tau) = X(t) [E - X(\omega)]^{-1} X^{-1}(\tau) \quad (3.23.7)$$

при  $0 \leq \tau \leq t \leq \omega$  и

$$G(t, \tau) = X(t + \omega) [E - X(\omega)]^{-1} X^{-1}(\tau) \quad (3.23.7')$$

при  $0 \leq t < \tau \leq \omega$ .

Действительно, из формулы (3.23.5) получаем

$$y(t) = \int_0^t X(t) [E - X(\omega)]^{-1} X^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau + \\ + \int_t^\omega X(t) [E - X(\omega)]^{-1} X(\omega) f(\tau) d\tau.$$

Отсюда, учитывая, что

$$[E - X(\omega)]^{-1} X(\omega) = X(\omega) [E - X(\omega)]^{-1}$$

и

$$X(t) X(\omega) = X(t + \omega),$$

будем иметь формулу (3.23.6).

Нетрудно проверить, что функция  $G(t, \tau)$ , определяемая формулами (3.23.7) и (3.23.7'), обладает следующими свойствами:

$$1) G(\tau + 0, \tau) - G(\tau - 0, \tau) = E;$$

$$2) G(0, \tau) = G(\omega, \tau);$$

$$3) \dot{G}_t(t, \tau) = A(t) G(t, \tau) \quad (t \neq \tau)$$

при  $0 \leq \tau \leq t \leq \omega$ . Эти свойства однозначно определяют функцию  $G(t, \tau)$ .

Если однородная система (3.23.2) имеет нетривиальные  $\omega$ -периодические решения (резонансный случай), то соответствующая неоднородная система (3.23.1) допускает  $\omega$ -периодическое решение не всегда.

**Теорема 2.** Пусть линейная однородная  $\omega$ -периодическая система (3.23.1) допускает  $k$  линейно независимых  $\omega$ -периодических решений  $\Phi_1(t), \dots, \Phi_k(t)$  ( $1 \leq k \leq n$ ). Тогда

1) сопряженная система

$$\frac{d\xi}{dt} = -A^*(t) \xi \quad (3.23.8)$$

имеет также  $k$  линейно независимых  $\omega$ -периодических решений  $\Psi_1(t), \dots, \Psi_k(t)$ ;

2) соответствующая неоднородная система (3.23.1) имеет  $\omega$ -периодические решения тогда и только тогда, когда выполнены условия ортогональности

$$\int_0^\omega (\Psi_s(t), f(t)) dt = 0 \quad (s = 1, \dots, k), \quad (3.23.9)$$

независимых  $\omega$ -периодических решений  $\psi_1(t), \dots, \psi_k(t)$  сопряженной системы (3.23.8).

2) Докажем сначала необходимость условий (3.23.9). Пусть  $y(t)$  — некоторое  $\omega$ -периодическое решение неоднородной системы (3.23.1). Из условий  $\omega$ -периодичности (см. формулу (3.23.4)) следует, что начальное значение  $y_0 = y(0)$  удовлетворяет условию

$$[E - X(\omega)] y_0 = X(\omega) \int_0^{\omega} X^{-1}(t) f(t) dt. \quad (3.23.12)$$

Пусть  $\psi_s(t)$  ( $s = 1, \dots, n$ ) — некоторое  $\omega$ -периодическое нетривиальное решение сопряженной системы (3.23.8). Тогда

$$[E - X(\omega)]^* \psi_s(0) = 0$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} 0 &= ([E - X(\omega)]^* \psi_s(0), y_0) = \\ &= (\psi_s(0), [E - X(\omega)] y_0) = (\psi_s(0), X(\omega) \int_0^{\omega} X^{-1}(t) f(t) dt) = \\ &= ([X(\omega)]^* \psi_s(0), \int_0^{\omega} X^{-1}(t) f(t) dt) = (\psi_s(0), \int_0^{\omega} X^{-1}(t) f(t) dt) = \\ &= \int_0^{\omega} (\psi_s(0), X^{-1}(t) f(t)) dt = \int_0^{\omega} ([X^{-1}(t)]^* \psi_s(0), f(t)) dt. \end{aligned}$$

Но

$$[X^{-1}(t)]^* \psi_s(0) = \Xi(t) \psi_s(0) = \psi_s(t);$$

поэтому

$$\int_0^{\omega} (\psi_s(t), f(t)) dt = 0 \quad (s = 1, \dots, k).$$

3) Докажем теперь достаточность условий (3.23.9). Пусть условия (3.23.9) выполнены. Тогда, если  $\xi_0$  — собственный вектор матрицы  $[X(\omega)]^*$ , отвечающий единичному мультипликатору  $\rho = 1$ , т. е.

$$[X(\omega)]^* \xi_0 = \xi_0,$$

то

$$\Xi(t) \xi_0 = \sum_{s=1}^k c_s \psi_s(t)$$

независимых  $\omega$ -периодических решений  $\psi_1(t), \dots, \psi_k(t)$  сопряженной системы (3.23.8).

2) Докажем сначала необходимость условий (3.23.9). Пусть  $y(t)$  — некоторое  $\omega$ -периодическое решение неоднородной системы (3.23.1). Из условий  $\omega$ -периодичности (см. формулу (3.23.4)) следует, что начальное значение  $y_0 = y(0)$  удовлетворяет условию

$$[E - X(\omega)] y_0 = X(\omega) \int_0^{\omega} X^{-1}(t) f(t) dt. \quad (3.23.12)$$

Пусть  $\psi_s(t)$  ( $s = 1, \dots, n$ ) — некоторое  $\omega$ -периодическое нетривиальное решение сопряженной системы (3.23.8). Тогда

$$[E - X(\omega)]^* \psi_s(0) = 0$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} 0 &= ([E - X(\omega)]^* \psi_s(0), y_0) = \\ &= (\psi_s(0), [E - X(\omega)] y_0) = (\psi_s(0), X(\omega) \int_0^{\omega} X^{-1}(t) f(t) dt) = \\ &= ([X(\omega)]^* \psi_s(0), \int_0^{\omega} X^{-1}(t) f(t) dt) = (\psi_s(0), \int_0^{\omega} X^{-1}(t) f(t) dt) = \\ &= \int_0^{\omega} (\psi_s(0), X^{-1}(t) f(t)) dt = \int_0^{\omega} ([X^{-1}(t)]^* \psi_s(0), f(t)) dt. \end{aligned}$$

Но

$$[X^{-1}(t)]^* \psi_s(0) = \Xi(t) \psi_s(0) = \psi_s(t);$$

поэтому

$$\int_0^{\omega} (\psi_s(t), f(t)) dt = 0 \quad (s = 1, \dots, k).$$

3) Докажем теперь достаточность условий (3.23.9). Пусть условия (3.23.9) выполнены. Тогда, если  $\xi_0$  — собственный вектор матрицы  $[X(\omega)]^*$ , отвечающий единичному мультипликатору  $\rho = 1$ , т. е.

$$[X(\omega)]^* \xi_0 = \xi_0,$$

то

$$\Xi(t) \xi_0 = \sum_{s=1}^k c_s \psi_s(t)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{\omega} (\Xi(t) \xi_0, f(t)) dt = \int_0^{\omega} (\xi_0, \Xi^*(t) f(t)) dt = \\ &= \int_0^{\omega} (\xi_0, X^{-1}(t) f(t)) dt = \int_0^{\omega} ([X(\omega)]^* \xi_0, X^{-1}(t) f(t)) dt = \\ &= \int_0^{\omega} (\xi_0, X(\omega) X^{-1}(t) f(t)) dt = \left( \xi_0, \int_0^{\omega} X(\omega) X^{-1}(t) f(t) dt \right). \end{aligned}$$

Таким образом, система

$$[X(\omega) - E]^* \xi_0 = 0 \quad (3.23.13)$$

эквивалентна системе

$$\left. \begin{aligned} [X(\omega) - E]^* \xi_0 &= 0, \\ \left( \xi_0, \int_0^{\omega} X(\omega) X^{-1}(t) f(t) dt \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.23.14)$$

и, значит, ранги матриц этих систем одинаковы. Отсюда, учитывая, что матрица системы (3.23.14) отличается от матрицы системы (3.23.13) лишь на вектор-строку  $\left[ \int_0^{\omega} X(\omega) X^{-1}(t) f(t) dt \right]^*$ , для ранга системы (3.23.12) будем иметь следующее выражение:

$$\begin{aligned} \text{ранг} \left( \left[ X(\omega) - E \mid \int_0^{\omega} X(\omega) X^{-1}(t) f(t) dt \right] \right) &= \\ &= \text{ранг} \left( \left[ \begin{array}{c} [X(\omega) - E]^* \\ \left[ \int_0^{\omega} X(\omega) X^{-1}(t) f(t) dt \right]^* \end{array} \right] \right) = \\ &= \text{ранг} ([X(\omega) - E]^*) = \\ &= \text{ранг} (X(\omega) - E) = n - k. \end{aligned}$$

Следовательно, в силу теоремы Кронекера — Капелли (гл. I, § 5) система (3.23.12), определяющая начальные условия  $\omega$ -периодических решений неоднородной системы (3.23.1), совместна и имеет  $k$  линейно независимых решений.



Теорема доказана.

Существование  $\omega$ -периодических решений линейной периодической системы связано с наличием ограниченных решений ее.

**Теорема Массера.** *Если линейная неоднородная  $\omega$ -периодическая система (3.23.1) имеет ограниченное решение  $\hat{y}(t)$  ( $t \geq 0$ ), то у этой системы существует  $\omega$ -периодическое решение.*

**Доказательство.** Используя метод вариации произвольной постоянной, ограниченное решение  $\hat{y}(t)$  неоднородной системы (3.23.1) можно представить в следующем виде:

$$\hat{y}(t) = X(t) \hat{y}_0 + \int_0^t X(t) X^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau,$$

где  $\hat{y}_0 = \hat{y}(0)$  и  $X(t)$  ( $X(t) = E$ ) — нормированная фундаментальная матрица однородной системы (3.23.2). Отсюда

$$\hat{y}(\omega) = X(\omega) \hat{y}_0 + \mathbf{b}, \quad (3.23.15)$$

где

$$\mathbf{b} = \int_0^{\omega} X(\omega) X^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau.$$

Так как ввиду периодичности системы (3.23.1)  $\hat{y}(t + \omega)$  есть также решение этой системы, то, используя начальное условие

$$\hat{y}(t + \omega)|_{t=0} = \hat{y}(\omega),$$

будем иметь

$$\hat{y}(2\omega) = X(\omega) \hat{y}(\omega) + \mathbf{b} = X^2(\omega) \hat{y}_0 + [X(\omega) + E] \mathbf{b}$$

или, в более общем виде,

$$\hat{y}(m\omega) = X^m(\omega) \hat{y}_0 + \sum_{k=0}^{m-1} X^k(\omega) \mathbf{b} \\ (m = 1, 2, \dots). \quad (3.23.16)$$

Пусть система (3.23.1) не имеет  $\omega$ -периодического решения. Тогда линейная алгебраическая система

$$[E - X(\omega)] y_0 = \mathbf{b}, \quad (3.23.17)$$

реализующая условие периодичности, несовместна и, в частности,

$$\det [E - X(\omega)] = 0.$$

Отсюда в силу известной теоремы алгебры выводим, что существует ненулевой вектор  $\mathbf{c}$ , являющийся решением сопряженной алгебраической системы

$$[E - X(\omega)]^* \mathbf{c} = 0, \quad (3.23.18)$$

причем этот вектор не ортогонален к правой части системы (3.23.17), т. е.

$$(\mathbf{b}, \mathbf{c}) \neq 0. \quad (3.23.19)$$

Из уравнения (3.23.18) получаем

$$\mathbf{c} = [X(\omega)]^* \mathbf{c}$$

и, значит,

$$\mathbf{c} = [X^k(\omega)]^* \mathbf{c} \quad (k=0, 1, 2, \dots). \quad (3.23.20)$$

Умножая равенство (3.23.16) справа на  $\mathbf{c}$ , будем иметь

$$(\hat{\mathbf{y}}(m\omega), \mathbf{c}) = (X^m(\omega) \hat{\mathbf{y}}_0, \mathbf{c}) + \sum_{k=0}^{m-1} (X^k(\omega) \mathbf{b}, \mathbf{c}).$$

Отсюда, учитывая соотношение (3.23.20), находим

$$\begin{aligned} (\hat{\mathbf{y}}(m\omega), \mathbf{c}) &= (\hat{\mathbf{y}}_0, [X^m(\omega)]^* \mathbf{c}) + \sum_{k=0}^{m-1} (\mathbf{b}, [X^k(\omega)]^* \mathbf{c}) = \\ &= (\hat{\mathbf{y}}_0, \mathbf{c}) + m(\mathbf{b}, \mathbf{c}) \rightarrow \infty \text{ при } m \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

что противоречит ограниченности решения  $\hat{\mathbf{y}}(t)$ .

Следовательно, в наших условиях система (3.23.17) совместна и, таким образом, существует по меньшей мере одно  $\omega$ -периодическое решение неоднородной системы (3.23.1).

*Следствие.* Если неоднородная линейная  $\omega$ -периодическая система не имеет  $\omega$ -периодических решений, то все решения этой системы не ограничены как на полуоси  $t \geq 0$ , так и на полуоси  $t \leq 0$ .

## § 24. Метод малого параметра

Рассмотрим слабо нелинейную (квазилинейную) периодическую систему

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{f}(t) + \mu\Phi(t, \mathbf{y}), \quad (3.24.1)$$

где  $A(t)$  и  $\mathbf{f}(t)$  —  $\omega$ -периодичны,

$$\Phi(t, \mathbf{y}) \in C_{\mathbf{y}}^{(0,1)}, \quad \Phi(t + \omega, \mathbf{y}) = \Phi(t, \mathbf{y})$$

и  $\mu$  — малый параметр, причем при  $\mu = 0$  система (3.24.1) совпадает с линейной системой (порождающей системой):

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t), \quad (3.24.2)$$

Для доказательства существования  $\omega$ -периодических решений нелинейной системы (3.24.1) изложим принадлежащий Пуанкаре «метод малого параметра» (см. [35], [14], [36]).

**Теорема.** *Если все мультипликаторы однородной системы (3.24.2) отличны от единицы, то при достаточно малых  $|\mu|$  нелинейная система (3.24.1) имеет единственное  $\omega$ -периодическое решение  $\mathbf{y}(t, \mu)$  такое, что*

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \mathbf{y}(t, \mu) = \mathbf{y}_0(t), \quad (3.24.3)$$

где  $\mathbf{y}_0(t)$  —  $\omega$ -периодическое решение порождающей системы (3.24.2).

**Доказательство.** Обозначим через  $\mathbf{y}(t; \boldsymbol{\eta}, \mu) \in C^1_{\boldsymbol{\eta}, \mu} \text{ или } C^0$  решение системы (3.24.1), определяемое начальным условием:

$$\mathbf{y}(0; \boldsymbol{\eta}, \mu) = \boldsymbol{\eta}. \quad (3.24.4)$$

Так как правая часть системы (3.24.1)  $\omega$ -периодична по  $t$  и удовлетворяет условиям единственности решений, то для существования  $\omega$ -периодического решения этой системы необходимо и достаточно, чтобы для некоторого  $\boldsymbol{\eta}$  было бы обеспечено условие:

$$\Phi(\boldsymbol{\eta}, \mu) \equiv \mathbf{y}(\omega; \boldsymbol{\eta}, \mu) - \mathbf{y}(0; \boldsymbol{\eta}, \mu) = \mathbf{y}(\omega; \boldsymbol{\eta}, \mu) - \boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}. \quad (3.24.5)$$

Пусть периодическое решение  $\mathbf{y}_0(t)$  порождающей системы (3.24.2), которое существует в силу теоремы § 23, определяется начальным условием:  $\mathbf{y}_0(t) = \boldsymbol{\eta}_0$ . Тогда имеем

$$\Phi(\boldsymbol{\eta}_0, 0) = \mathbf{0}.$$

Из теории неявных функций известно, что (см. [7]) для того, чтобы уравнение (3.24.5) имело единственное непрерывное решение в окрестности точки  $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_0, \mu = 0$ , достаточно, чтобы определитель Якоби

$$\Delta = \left[ \det \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\eta}} \right) \right]_{\substack{\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_0 \\ \mu = 0}} = \left[ \frac{D(\Phi_1, \dots, \Phi_n)}{D(\eta_1, \dots, \eta_n)} \right]_{\substack{\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_0 \\ \mu = 0}} \neq 0, \quad (3.24.6)$$

где  $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_n)$  и

$$\Phi(\boldsymbol{\eta}, \mu) = [\Phi_1(\boldsymbol{\eta}, \mu), \dots, \Phi_n(\boldsymbol{\eta}, \mu)].$$

Отсюда, полагая, что

$$\mathbf{y}(t; \boldsymbol{\eta}, \mu) = \begin{bmatrix} y_1(t; \boldsymbol{\eta}, \mu) \\ \dots \\ y_n(t; \boldsymbol{\eta}, \mu) \end{bmatrix},$$

получаем

$$\begin{aligned} \Delta &= \left[ \det \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\eta}} \right) \right]_{\substack{\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_0 \\ \mu = 0}} = \det \left[ \frac{\partial y_j}{\partial \eta_k}(\omega; \boldsymbol{\eta}_0, 0) - \delta_{jk} \right] = \\ &= \det [\mathbf{y}'_{\boldsymbol{\eta}}(\omega; \boldsymbol{\eta}_0, 0) - E]. \end{aligned} \quad (3.24.7)$$

Из теории дифференциальных уравнений следует (см. [9], [10], [11]), что решение  $\mathbf{y}(t; \boldsymbol{\eta}, \mu)$  имеет непрерывные частные производные по начальным данным  $\boldsymbol{\eta}$ . Введя обозначения

$$Z = \mathbf{y}'_{\boldsymbol{\eta}}(t; \boldsymbol{\eta}, \mu) \equiv \left( \frac{\partial y_j}{\partial \eta_k} \right)$$

и дифференцируя по  $\boldsymbol{\eta}$  систему (3.24.1), будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}} \left( \frac{d\mathbf{y}}{dt} \right) = A(t) \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \boldsymbol{\eta}} + \mu \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{y}} \cdot \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \boldsymbol{\eta}},$$

или

$$\frac{dZ}{dt} = A(t) Z + \mu \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{y}} \cdot Z.$$

Отсюда при  $\mu = 0$  получаем

$$\frac{dZ}{dt} = A(t) Z.$$

Кроме того, при  $t = 0$  имеем

$$\mathbf{y}(0; \boldsymbol{\eta}, \mu) \equiv \boldsymbol{\eta},$$

поэтому

$$Z(0) = E.$$

Таким образом,  $Z = Z(t; \boldsymbol{\eta}, 0)$  является нормированной фундаментальной матрицей однородной системы (3.24.2) и интересующий нас якобиан имеет вид

$$\Delta = \det [Z(\omega; \boldsymbol{\eta}_0, 0) - E].$$

Так как для однородной системы (3.24.2) ее мультипликаторы  $\rho_j \neq 1$ , то для векового уравнения

$$\det [Z(\omega; \boldsymbol{\eta}, 0) - \rho E] = 0$$

число  $\rho = 1$  не является корнем. Поэтому

$$\Delta \neq 0$$

и, следовательно, нелинейная система (3.24.1) при  $|\mu| < \mu_0$  имеет единственное  $\omega$ -периодическое решение  $\mathbf{y}(t, \mu)$ , непрерывное по параметру  $\mu$  и такое, что  $\mathbf{y}(t, \mu) \rightarrow \mathbf{y}_0(t)$  при  $\mu \rightarrow 0$ .

Теорема доказана.

**З а м е ч а н и е.** В этой формулировке период  $\omega$  не обязательно наименьший, он может быть кратен некоторому наименьшему периоду  $\omega_0$ , т. е. теорема остается верной, если

$$\omega = m\omega_0,$$

где  $\omega_0$  — период системы (3.24.1) и  $m$  — целое число, отличное от нуля.

## Упражнения к главе III

1. Доказать, что

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) - \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \psi(t) \leq \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} [\varphi(t) - \psi(t)] \leq \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) - \underline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \psi(t),$$

предполагая, что  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$  определены и ограничены в интервале  $(t_0, \infty)$ .

2. Пусть

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x,$$

где  $A(t) \in C[t_0, \infty)$ . Доказать, что

$$\|x(t)\| \leq \|x(t_0)\| \exp \int_{t_0}^t \|A(\tau)\| d\tau$$

и

$$\int_{t_0}^t \|\dot{x}(\tau)\| d\tau \leq \|x(t_0)\| \cdot [\exp \int_{t_0}^t \|A(\tau)\| d\tau - 1]$$

при  $t \geq t_0$ .

Вывести отсюда, что если

$$\int_{t_0}^{\infty} \|A(\tau)\| d\tau < \infty,$$

то для каждого решения  $x(t)$  существует  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ .

3. Пусть нелинейная система

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

такова, что  $f(t, x) \in C_t(Z)$ , где  $Z = \{t_0 \leq t < \infty, \|x\| < H\}$  и в  $Z$  выполнено условие Липшица:

$$\|f(t, x') - f(t, x)\| \leq L \|x' - x\|,$$

где  $L$  — положительная постоянная.

Доказать, что каждое решение системы  $x(t)$  ( $t_0 \leq t < \infty$ ) имеет конечный характеристический показатель  $\chi[x]$ .

4. Пользуясь неравенством Важевского, исследовать на устойчивость скалярную систему

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -x \sin^2 t + \left(a + \frac{2b}{t}\right)y, \\ \frac{dy}{dt} &= -ax - y \cos^2 t, \end{aligned} \right\}$$

где  $a$  и  $b$  — действительные постоянные.

5. Пусть

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x,$$

где  $A(t) = [a_{jk}(t)]$  — действительная  $(n \times n)$ -матрица и

$$r(t) = \min_j \left[ a_{jj}(t) + \sum_{k \neq j} \frac{|a_{jk}(t)| + |a_{kj}(t)|}{2} \right],$$

$$R(t) = \max_j \left[ a_{jj}(t) + \sum_{k \neq j} \frac{|a_{jk}(t)| + |a_{kj}(t)|}{2} \right].$$

Доказать, что

$$\|x(t_0)\| \exp \int_{t_0}^t r(t_1) dt_1 \leq \|x(t)\| \leq \|x(t_0)\| \exp \int_{t_0}^t R(t_1) dt_1$$

при  $t \geq t_0$ , где  $\|x(t)\|$  — евклидова норма решения  $x(t)$ .

6. Пусть

$$\frac{dx_j}{dt} = \sum_{k=1}^n p_{jk}(t) x_k \quad (j=1, \dots, n),$$

где  $p_{jk}(t) \in C[t_0, \infty)$ , причем  $\lim_{t \rightarrow \infty} p_{jk}(t) = 0$  при  $j \neq k$  и

$$\operatorname{Re} [p_{k-1, k-1}(t) - p_{kk}(t)] \geq c > 0 \quad (k=2, \dots, n),$$

$c$  — постоянная.

Доказать, что

$$\alpha_k = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \operatorname{Re} |p_{kk}(\tau)| d\tau \quad (k=1, \dots, n)$$

являются характеристическими показателями Ляпунова данной системы (см. [25], [12]).

7. Доказать, что для линейной системы

$$\frac{dx}{dt} = Jx$$

с постоянной матрицей Жордана  $J$  ее фундаментальная система

$$X(t) = e^{(t-t_0)J}$$

является нормальной.

8. Доказать, что фундаментальная матрица  $X(t)$  действительной приводимой системы

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x$$

является нормальной тогда и только тогда, когда для суммы характеристических показателей  $\sigma_X$  ее решений выполнено равенство Ляпунова

$$\sigma_X = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \operatorname{Sp} A(\tau) d\tau.$$

В частности, для системы

$$\frac{dx}{dt} = Ax,$$

где  $A$  — действительная постоянная матрица, ее фундаментальная система  $X(t)$  нормальна лишь тогда, когда

$$\sigma_X = \text{Sp } A.$$

9. Пусть для линейной системы

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x,$$

$X(t) = \{x^k(t)\}$  — нормальная фундаментальная система и  $Z(t) = \{z^{(k)}(t)\}$  — какая-нибудь фундаментальная система, причем

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n$$

и

$$\alpha'_1 \leq \alpha'_2 \leq \dots \leq \alpha'_n,$$

где  $\alpha_k = \chi[x^{(k)}(t)]$ ,  $\alpha'_k = \chi[z^{(k)}(t)]$  ( $k = 1, \dots, n$ ).

Доказать, что

$$\alpha_k \leq \alpha'_k \quad (k = 1, \dots, n).$$

10. Пусть линейная система

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x,$$

где  $A(t) \in C[t_0, \infty)$ ,  $\sup_t \|A(t)\| < \infty$ , приводима к системе

$$\frac{dz}{dt} = Cz,$$

матрица которой  $C$  постоянна и имеет собственные значения с простыми элементарными делителями. Тогда система

$$\frac{dy}{dt} = [A(t) + B(t)]y,$$

где  $B(t) \in C[t_0, \infty)$  и  $\int_{t_0}^{\infty} \|B(t)\| dt < \infty$ , также приводима.

11. Показать, что линейная система

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \quad (t \geq 1)$$

с матрицей

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2}{t^2} & 0 \end{bmatrix}$$

неприводима (ср. 10).

12. Пусть действительная линейная система

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \quad (*)$$

( $A(t) \in C[0, \infty)$  и  $\sup_t \|A(t)\| < \infty$ ), имеющая спектр  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , обладает нормальной фундаментальной матрицей  $X(t)$  такой, что

$$\sup_t \|X(t) e^{-\Delta t}\| < \infty$$

и

$$\sup_t \left| \exp \left[ t \sum_k \lambda_k - \int_0^t \text{Sp } A(\tau) d\tau \right] \right| < \infty,$$

где  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ .

Доказать, что система (\*) приводима (см. [13]).

У к а з а н и е. Использовать подстановку

$$x = X(t) e^{-t\Lambda} y.$$

13. Доказать, что если линейная система

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x,$$

где  $A(t) \in C[t_0, \infty)$ , устойчива и приводима, то она равномерно устойчива (см. [37]).

14. Действительная линейная система

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \quad (**)$$

( $A(t) \in C[t_0, \infty)$ ) называется *ограниченно устойчивой* (см. [37]), если она устойчива одновременно с сопряженной системой

$$\frac{dy}{dt} = -A^T(t)y.$$

Доказать, что система (\*\*) ограничено устойчива тогда и только тогда, когда она приводима к системе с нулевой матрицей.

15. Доказать, что если система (\*\*) ограничено устойчива и

$$\int_{t_0}^{\infty} \|B(t)\| dt < \infty,$$

то система

$$\frac{dz}{dt} = [A(t) + B(t)]z$$

также ограничено устойчива (Контти).

16. Две матрицы  $A(t)$  и  $B(t)$ , непрерывные и ограниченные на  $[t_0, \infty)$ , называются *кинематически подобными* [13], если существует матрица Ляпунова  $L(t)$  такая, что

$$L^{-1}(t)A(t)L(t) - L^{-1}(t)\dot{L}(t) = B(t).$$

Доказать, что если матрицы систем

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \quad \text{и} \quad \frac{dy}{dt} = B(t)y$$

ограничены на  $[t_0, \infty)$  и кинематически подобны, то эти системы обладают одинаковыми спектрами, причем одновременно являются правильными или неправильными (Ляпунов).



17. Доказать, что если система

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x$$

с непрерывной и ограниченной матрицей  $A(t)$  правильная, то ее с помощью сохраняющего характеристические числа линейного непрерывного преобразования

$$x = S(t)y$$

можно привести к системе с постоянной матрицей

$$\frac{dy}{dt} = By$$

( $B = \text{const}$ ).

18. Пусть  $A(t) = [a_{jk}(t)] \in C(I_1^+)$  — ограниченная треугольная матрица и система

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x$$

правильная.

Доказать, что существует ее нормальная фундаментальная матрица

$$X(t) = \Phi(t) e^{\int_{t_0}^t D(t_1) dt_1},$$

где  $D(t) = \text{diag} [a_{11}(t), \dots, a_{nn}(t)]$  и

$$\chi[\Phi(t)] = \chi[\Phi^{-1}(t)] = 0.$$

19. Доказать, что если  $p(t)$  — непрерывная  $\omega$ -периодическая функция такая, что

$$p(t) \not\equiv 0, \quad \overline{p(t)} = \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} p(t) dt \geq 0,$$

и выполнено условие

$$\omega \int_0^{\omega} |p(t)| dt \leq 4,$$

то все решения скалярного уравнения

$$\ddot{x} + p(t)x = 0$$

ограничены (см. [39]).

20. Пусть для  $\omega$ -периодической системы

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x,$$

где  $A(t + \omega) = A(t)$ , все мультипликаторы по модулю отличны от единицы. Доказать, что неоднородная система

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + \exp(iat) f(t),$$

где  $a = \text{const}$  и  $f(t)$  —  $\omega$ -периодическая вектор-функция, имеет единственное ограниченное решение  $y(t)$ , обладающее свойством

$$y(t + \omega) = \exp(i a \omega) y(t)$$

(см. [40]).

21. Характеристические показатели Ляпунова  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  линейной системы

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \quad (***)$$

называются *устойчивыми*, если для всякого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  такое, что при

$$\|B(t)\| < \delta$$

соответствующие характеристические показатели  $\beta_1, \dots, \beta_n$  возмущенной системы

$$\frac{dy}{dt} = [A(t) + B(t)]y$$

удовлетворяют неравенствам

$$|\beta_k - \alpha_k| < \varepsilon \quad (k = 1, \dots, n).$$

Доказать, что если  $A(t) = \text{const}$  и собственные значения ее имеют простые элементарные делители, то характеристические показатели системы (\*\*\*) устойчивы.

З а м е ч а н и е. Теорема для постоянной матрицы  $A$  верна в общем случае (Персидский), однако доказательство ее значительно сложнее.

22. Показать, что характеристические показатели скалярной системы

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -x, \\ \frac{dy}{dt} &= [\sin(\ln t) + \cos(\ln t) - 2]y \end{aligned} \right\}$$

не являются устойчивыми (см. [21]).

23. Пусть нелинейная система

$$\frac{dy}{dt} = Ay + f(t, y),$$

где  $A$  — постоянная матрица и  $f(t, y)$  — непрерывный нелинейный член, такова, что: а)  $\text{Re } \lambda_j(A) \leq 0$  ( $j = 1, \dots, n$ ), причем корни  $\lambda_j(A)$  с нулевой вещественной частью имеют простые элементарные делители; б)  $\|f(t, y)\| \leq k(t)\|y\|$ , где

$$\int_{t_0}^{\infty} k(t) dt < \infty.$$

Доказать, что эта система асимптотически эквивалентна соответствующей линейной системе

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

(см. [24]).

24. Пусть постоянная матрица  $A$  имеет характеристические корни  $\lambda_j = \lambda_j(A)$  ( $j = 1, \dots, n$ ) с простыми элементарными делителями и

$$\frac{dy}{dt} = [A + B(t)] y,$$

где

$$\int_0^{\infty} \|B(t)\| dt < \infty.$$

Доказать, что существует фундаментальная система решений  $y_j(t)$  ( $j = 1, \dots, n$ ) таких, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_j(t) e^{-\lambda_j t} = c_j,$$

где  $c_j$  — соответствующие собственные векторы матрицы  $A$  (см. [28]).

25. Доказать теорему: Пусть  $X(t)$  ( $X(0) = E$ ) — нормированная фундаментальная матрица системы

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x,$$

где  $A(t) \in C[0, \infty)$ , и пусть  $B(t) \in C[0, \infty)$  —  $(n \times n)$ -матрица такая, что

$$\int_0^{\infty} \|X^{-1}(t)B(t)X(t)\| dt < \infty.$$

Тогда решения системы

$$\frac{dy}{dt} = [A(t) + B(t)]y$$

представимы в виде

$$y = X(t)c(t),$$

где существует  $\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = c_{\infty}$ , причем  $\{c_{\infty}\} \equiv (-\infty, +\infty)$  (Б е б е р н е с).

26. Доказать теорему Беллмана: Если

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad \frac{dy}{dt} = B(t)y$$

и

$$\int_0^{\infty} \|B(t) - A(t)\| \|X(t)\| \|X^{-1}(t)\| dt < \infty,$$

где  $\dot{X}(t) = A(t)X(t)$ ,  $X(0) = E$ , то

$$y = X(t)c + o(\|X(t)\|)$$

( $c$  — постоянный вектор).

27. Пусть

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x$$

— действительная  $\omega$ -периодическая система и  $\rho_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) — ее мультипликаторы.

Показать, что мультипликаторами сопряженной системы

$$\frac{d^T \xi}{dt} = -A^T \xi$$

являются числа  $\frac{1}{\rho_j}$  ( $j = 1, \dots, n$ ).

28. Доказать, что если действительное скалярное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad (***)$$

где  $f(t, x) \in C(I_t^+ \times \mathcal{R}_x^1)$ ,  $f(t + \omega, x) \equiv f(t, x)$ , имеет положительно ограниченное решение  $\xi = \xi(t)$  ( $t_0 \leq t < \infty$ ), то существует  $\omega$ -периодическое решение уравнения (\*\*\*) (М а с с е р а).

29. Пусть

$$\dot{x} = F(t, x),$$

где  $F \in C(I_t^+ \times \|x\| < H)$ , причем

$$\|F(t, x)\| \leq \psi(t) \|x\|$$

и

$$\int_{t_0}^{\infty} \psi(t) dt < \infty.$$

Доказать, что если  $x(t_0)$  достаточно мало по норме, то: 1) решение  $x(t)$  определено при  $t \in [t_0, \infty)$  и 2) существует

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_{\infty},$$

отличный от нуля, если  $x(t) \neq 0$ .

30. Показать, что уравнение

$$\frac{dy}{dt} = f(t),$$

где  $f(t) \in C(-\infty, +\infty)$  и  $f(t + \omega) \equiv f(t)$ , имеет  $\omega$ -периодическое общее решение тогда и только тогда, когда

$$\int_0^{\omega} f(t) dt = 0.$$

31. Пусть  $J(\lambda)$  —  $(n \times n)$ -клетка Жордана, имеющая собственное значение  $\lambda$ , и

$$f(t) = \text{colon} [f_1(t), \dots, f_n(t)]$$

— непрерывная  $\omega$ -периодическая вектор-функция.

Доказать, что уравнение

$$\frac{dy}{dt} = J(\lambda)y + e^{\lambda t} f(t)$$

имеет решение вида

$$y = e^{\lambda t} \varphi(t),$$

где  $\varphi(t)$  —  $\omega$ -периодическая вектор-функция, тогда и только тогда, когда

$$\int_0^{\omega} f_n(t) dt = 0.$$

32. Пусть линейная однородная система

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad (I)$$

с постоянной матрицей  $A$  асимптотически устойчива, а неоднородная возмущенная система

$$\frac{dy}{dt} = [A + B(t)]y + f(t) \quad (II)$$

такова, что: 1)  $B(t), f(t) \in C[t_0, \infty)$  и 2)  $\int_{t_0}^{\infty} \|B(t)\| dt < \infty, f(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , или же 2')  $B(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$  и  $\int_{t_0}^{\infty} \|f(t)\| dt < \infty$ . Тогда все решения  $y(t)$  системы (II) имеют предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0.$$

### § 1. Приведенная система

Пусть дана действительная нелинейная дифференциальная система

$$\frac{dy}{dt} = Y(t, y), \quad (4.1.1)$$

где  $Y \in C_{ty}^{0,1}(\Omega)$  и  $\Omega = \{a < t < \infty, y \in G\}$  ( $a$ -число или символ  $-\infty$ ,  $G$  — открытое множество действительного евклидова  $n$ -мерного пространства  $\mathcal{R}_y^n$ ). Тогда для каждой точки  $(t_0, y_0) \in \Omega$  справедлива локальная теорема существования и единственности решения  $y = y(t; t_0, y_0)$  системы (4.1.1) с начальными условиями:  $y(t_0; t_0, y_0) = y_0$ . В этой главе мы ограничимся рассмотрением лишь действительных решений.

Пусть  $\eta = \eta(t)$  ( $t_0 \leq t < \infty$ ;  $t_0 > a$ ) — решение системы (4.1.1) (невозмущенное движение), устойчивость которого требуется исследовать, причем  $H$ -окрестность этого решения такова, что  $U_H(\eta(t)) \subset G$  при  $t \in [t_0, \infty)$ , где

$$U_H(\eta(t)) = \{t_0 \leq t < \infty, \|y - \eta(t)\| < H \leq \infty\}.$$

Положим

$$x = y - \eta(t), \quad (4.1.2)$$

т. е.  $x$  есть отклонение решения  $y$  от решения  $\eta(t)$ . Так как

$$\dot{\eta}(t) \equiv Y(t, \eta(t)),$$

то для  $x$  получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x), \quad (4.1.3)$$

где

$$X(t, x) = [Y(t, x + \eta(t)) - Y(t, \eta(t))] \in C_{tx}^{0,1}(Z), \\ Z = \{a < t < \infty, \|x\| < H\},$$

причем, очевидно,

$$X(t, 0) \equiv 0.$$

Следовательно, система (4.1.3) имеет тривиальное решение  $\mathbf{x} = 0$ , которое в пространстве  $\mathcal{R}_y^n$  соответствует данному решению  $\eta = \eta(t)$  (рис. 28, а и б). Систему (4.1.3) будем называть *приведенной* (по Ляпунову она называется системой уравнений возмущенного движения).

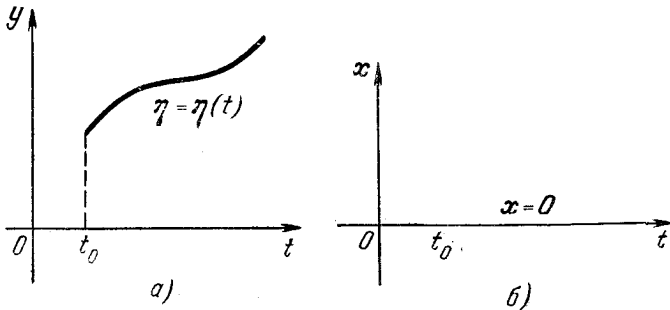


Рис. 28.

Таким образом, исследование устойчивости решения  $\eta = \eta(t)$  в пространстве  $\mathcal{R}_y^n$  сводится к исследованию устойчивости тривиального решения (*положения равновесия*)  $\mathbf{x} = 0$  в пространстве  $\mathcal{R}_x^n$ .

## § 2. Знакоопределенные функции

Рассмотрим функцию

$$V = V(t, \mathbf{x}) \in C_{tx}(Z_0),$$

где  $Z_0 = \{a < t < \infty, \|\mathbf{x}\| < h\}$ .

Введем основные определения о знакопостоянных и знакоопределенных функциях (см. [13], [14]).

**Определение 1.** Действительная непрерывная скалярная функция  $V(t, \mathbf{x})$  называется *знакопостоянной* (*знакоположительной* или *знакоотрицательной*) в  $Z_0$ , если

$$V(t, \mathbf{x}) \geq 0 \quad (\text{или } V(t, \mathbf{x}) \leq 0)$$

при  $(t, \mathbf{x}) \in Z_0$ .

**Определение 2.** Функция  $V(t, \mathbf{x})$  называется *положительно определенной* (*определенно положительной*) в  $Z_0$ , если существует скалярная функция  $W(\mathbf{x}) \in C(\|\mathbf{x}\| < h)$  такая, что

$$\begin{aligned} V(t, \mathbf{x}) \geq W(\mathbf{x}) > 0 \quad \text{при } \|\mathbf{x}\| \neq 0, \\ V(t, \mathbf{0}) = W(\mathbf{0}) = 0. \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

Аналогично функция  $V(t, \mathbf{x})$  называется *отрицательно определенной* (определенно отрицательной) в  $Z_0$ ; если найдется  $W(\mathbf{x}) \in C(\|\mathbf{x}\| < h)$  такая, что

$$V(t, \mathbf{x}) \leq -W(\mathbf{x}) < 0 \text{ при } \|\mathbf{x}\| \neq 0$$

и

$$V(t, \mathbf{0}) = W(\mathbf{0}) = 0.$$

Положительно или отрицательно определенная функция называется *знакоопределенной*.

В качестве  $W(\mathbf{x})$  иногда можно брать

$$W(\mathbf{x}) = \inf_t |V(t, \mathbf{x})|.$$

В частности,  $V = V(\mathbf{x})$  есть знакоопределенная функция, если  $(-1)^\sigma V(\mathbf{x}) > 0$  при  $\|\mathbf{x}\| \neq 0$  и  $V(\mathbf{0}) = 0$ , где для положительно определенной функции  $\sigma = 0$ , а для отрицательно определенной функции  $\sigma = 1$ .

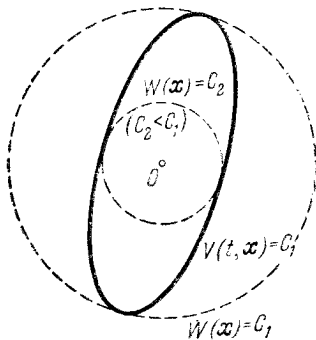


Рис. 29.

Пример 1. В действительном пространстве  $\mathcal{R}^2 = Oxy$  функция

$$V = x^2 + y^2 - 2\alpha xy \cos t \quad (4.2.2)$$

при  $|\alpha| < 1$  является положительно определенной, так как

$$\begin{aligned} V(t, x, y) &\geq x^2 + y^2 - 2|\alpha| |x| |y| \geq \\ &\geq (1 - |\alpha|)(x^2 + y^2) \equiv W(x, y) > 0 \end{aligned}$$

при  $x^2 + y^2 > 0$ ;  $V = 0$  при  $x = y = 0$ .

При  $|\alpha| = 1$  функция  $V$  лишь знакоположительна.

Нетрудно дать геометрическую иллюстрацию знакоопределенной функции  $V(t, \mathbf{x})$ . Пусть  $V(t, \mathbf{x})$  — положительно определенная функция такая, что

$$V(t, \mathbf{x}) \geq W(\mathbf{x}),$$

где  $W(\mathbf{x}) > 0$  при  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  и  $W(\mathbf{0}) = 0$ . Предположим, что поверхности уровня

$$W(\mathbf{x}) = C \quad (C \geq 0)$$

в пространстве  $Ox_1, \dots, x_n$  представляют собой семейство непрерывных замкнутых поверхностей, окружающих начало координат  $O$  и монотонно расширяющихся при росте параметра  $C$  (рис. 29). Тогда очевидно, каждая поверхность уровня

$$V(t, \mathbf{x}) = C_1$$

для любого значения параметра  $t$  будет целиком расположена внутри соответствующей поверхности  $W(\mathbf{x}) = C_1$ .



Определение 3. Говорят, что функция  $V(t, \mathbf{x})$  имеет бесконечно малый высший предел при  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$  (см. [13], [14]), если при некотором  $t_0 > a$  имеем

$$V(t, \mathbf{x}) \xrightarrow[t]{\rightarrow} 0$$

на  $[t_0, \infty)$  при  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$ , т. е. для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  такое, что

$$|V(t, \mathbf{x})| < \varepsilon \quad (4.2.3)$$

при  $\|\mathbf{x}\| < \delta$  и  $t \in [t_0, \infty)$ .

В силу неравенства (4.2.3) заключаем, что функция  $V(t, \mathbf{x})$ , допускающая бесконечно малый высший предел при  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$ , ограничена в некотором полуцилиндре

$$t_0 \leq t < \infty, \quad \|\mathbf{x}\| < h.$$

Отметим, что если  $V(\mathbf{x})$  — непрерывная функция, не зависящая от времени  $t$  и такая, что  $V(\mathbf{0}) = 0$ , то, очевидно,  $V(\mathbf{x})$  допускает бесконечно малый высший предел при  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$ .

Пример 2. Функция (4.2.2) при  $|\alpha| < 1$  допускает бесконечно малый высший предел, когда

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0.$$

Функция

$$V = \sin^2 [t(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)]$$

не допускает бесконечно малого высшего предела при  $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \rightarrow 0$ , несмотря на то, что эта функция ограничена и  $V \rightarrow 0$  при  $\|\mathbf{x}\| \rightarrow 0$ .

### § 3. Первая теорема Ляпунова (теорема об устойчивости)

Пусть  $X(t, \mathbf{x}) \in C_{tx}^{0,1}(Z)$ ,  $Z = \{a < t < \infty, \|\mathbf{x}\| < H\}$  и

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = X(t, \mathbf{x}), \quad (4.3.1)$$

есть приведенная система, т. е.

$$X(t, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0},$$

очевидно, допускающая тривиальное решение:  $\xi = \mathbf{0}$ .

Положим

$$V \equiv V(t, \mathbf{x}) \in C_{tx}^{1,1}(Z_0)$$

$$(Z_0 = \{a < t < \infty; \|\mathbf{x}\| \leq h < H\} \subset Z)$$

и

$$X \equiv X(t, \mathbf{x}) = \text{colon} [X_1(t, \mathbf{x}), \dots, X_n(t, \mathbf{x})].$$

Функцию

$$\dot{V}(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j} X_j(t, \mathbf{x}) \equiv \frac{\partial V}{\partial t} + (\text{grad } V, \mathbf{X}) \quad (4.3.2)$$

называют *производной* (полной) *по времени*  $t$  *функции*  $V(t, \mathbf{x})$  *в силу системы* (4.3.1).

Если  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  есть решение системы (4.3.1), то  $\dot{V}(t, \mathbf{x})$  представляет собой полную производную по времени  $t$  сложной функции  $V(t, \mathbf{x}(t))$ , т. е.

$$\dot{V}(t, \mathbf{x}) = \frac{d}{dt} V(t, \mathbf{x}(t)).$$

Более точно, пусть  $(t, \mathbf{x}) \in Z_0$  и  $\mathbf{x}(\tau; t, \mathbf{x})$  есть решение системы (4.3.1), определяемое начальными условиями:  $\mathbf{x}(t; t, \mathbf{x}) = \mathbf{x}$ . Тогда

$$\dot{V}(t, \mathbf{x}) = \left[ \frac{d}{d\tau} V(\tau, \mathbf{x}(\tau; t, \mathbf{x})) \right]_{\tau=t}. \quad (4.3.3)$$

Заметим, что если  $V(t, \mathbf{x}) \in C^1$ , то из формулы (4.3.3) может не следовать формула (4.3.2). В дальнейшем, если явно не указано противное, мы будем предполагать, что

$$V(t, \mathbf{x}) \in C_{tx}^{1,1}(Z_0).$$

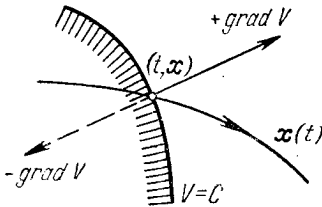


Рис. 30.

Если  $\dot{V}(t, \mathbf{x}) > 0$  при  $V(t, \mathbf{x}) = C$ , то интегральные кривые  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  в точках  $(t, \mathbf{x})$  поверхности  $V(t, \mathbf{x}) = C$  переходят с отрицательной стороны поверхности, характеризующей нормалью  $-\text{grad } V$ , на положительную ее сторону, определяемую нормалью

$+\text{grad } V$  (рис. 30). При  $\dot{V}(t, \mathbf{x}) < 0$  имеет место обратная картина. Такого рода поверхности  $V(t, \mathbf{x}) = C$  называются *поверхностями без контакта* для поля интегральных кривых системы (4.3.1).

*Замечание.* Понятие производной  $\dot{V}(t, \mathbf{x})$  в силу системы (4.3.1) можно обобщить (см. [41]). А именно, иногда полагают

$$\dot{V}(t, \mathbf{x}) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{1}{h} \{V(t+h, \mathbf{x} + h\mathbf{X}(t, \mathbf{x})) - V(t, \mathbf{x})\}.$$

Если  $V(t, \mathbf{x}) \in C_{tx}^{1,1}(Z_0)$ , то, очевидно, имеем формулу (4.3.2).

*Теорема* (первая теорема Ляпунова). *Если для приведенной системы (4.3.1) существует положительно определенная скалярная функция*

$$V(t, \mathbf{x}) \in C_{tx}^{1,1}(Z_0 \subset Z),$$

допускающая знакоотрицательную производную по времени  $\dot{V}(t, \mathbf{x})$  в силу системы, то тривиальное решение  $\xi = 0$  ( $a < t < \infty$ ) данной системы устойчиво по Ляпунову при  $t \rightarrow +\infty$ .

Доказательство. На основании условия теоремы имеется непрерывная положительно определенная функция  $W(\mathbf{x})$  такая, что

$$V(t, \mathbf{x}) \geq W(\mathbf{x}) > 0 \quad \text{при } \mathbf{x} \neq 0 \quad (4.3.4)$$

и

$$V(t, \mathbf{0}) = W(\mathbf{0}) = 0.$$

В пространстве  $\mathcal{E}_x^n$  рассмотрим сферу  $S_\varepsilon$ :

$$\|\mathbf{x}\| = \varepsilon, \quad (4.3.5)$$

целиком лежащую в  $Z_0$ , где  $0 < \varepsilon \leq h < H$ .

Так как сфера  $S_\varepsilon$  — компактное множество и функция  $W(\mathbf{x})$  непрерывна и положительна на  $S_\varepsilon$ , то в силу теоремы Вейерштрасса нижняя грань этой функции достигается в некоторой точке  $\mathbf{x}^* \in S_\varepsilon$  и, следовательно,

$$\inf_{\mathbf{x} \in S_\varepsilon} W(\mathbf{x}) = W(\mathbf{x}^*) = \alpha > 0. \quad (4.3.6)$$

Пусть  $t_0 \in (a, \infty)$  произвольно. Функция  $V(t_0, \mathbf{x})$  непрерывна по  $\mathbf{x}$ , причем  $V(t_0, \mathbf{0}) = 0$ . Следовательно, существует окрестность  $\|\mathbf{x}\| < \delta < \varepsilon$  такая, что

$$0 \leq V(t_0, \mathbf{x}) < \alpha \quad \text{при } \|\mathbf{x}\| < \delta. \quad (4.3.7)$$

Рассмотрим любое нетривиальное решение

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) \quad (4.3.8)$$

с начальным условием:  $\|\mathbf{x}_0(t_0)\| < \delta$  (рис. 31). Докажем, что траектория этого решения целиком остается внутри сферы  $S_\varepsilon$ , т. е.

$$\|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon \quad \text{при } t_0 \leq t < \infty. \quad (4.3.9)$$

Действительно, при  $t = t_0$  имеем

$$\|\mathbf{x}(t_0)\| < \delta < \varepsilon.$$

Пусть неравенство (4.3.9) выполнено не для всех  $t \in [t_0, \infty)$  и  $t_1 > t_0$  — первая точка выхода решения  $\mathbf{x}(t)$  на границу  $S_\varepsilon$ , т. е.  $\|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon$  при  $t_0 \leq t < t_1$  и  $\|\mathbf{x}(t_1)\| = \varepsilon$ . Изучим поведение функции

$$v(t) = V(t, \mathbf{x}(t))$$

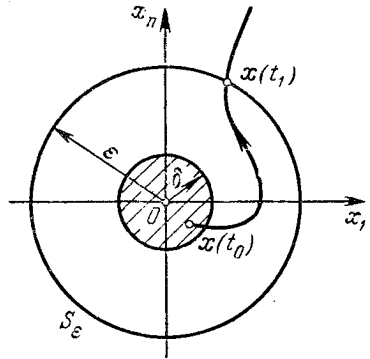


Рис. 31.

вдоль решения  $\mathbf{x}(t)$ . Так как в силу условия теоремы

$$v(t) = \frac{dV}{dt} \leq 0,$$

то функция  $v(t)$  невозрастающая. Следовательно, учитывая формулы (4.3.7) и (4.3.6), имеем

$$\alpha > V(t_0, \mathbf{x}(t_0)) \geq V(t_1, \mathbf{x}(t_1)) \geq W(\mathbf{x}(t_1)) \geq \alpha,$$

что невозможно.

Таким образом, решение  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  при любом конечном  $t \in [t_0, \infty)$  остается внутри сферы  $S_\varepsilon$  и, так как  $\varepsilon < H$ , это решение определено при  $t_0 \leq t < \infty$  (бесконечно продолжаемо вправо), причем

$$\|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon \quad \text{при } t_0 \leq t < \infty,$$

если только  $\|\mathbf{x}(t_0)\| < \delta$ . А это и значит (гл. II, § 1, определение 1), что тривиальное решение  $\xi = 0$  устойчиво по Ляпунову при  $t \rightarrow +\infty$ .

*Следствие 1. При наличии условий первой теоремы Ляпунова все решения  $\mathbf{x}(t)$  системы (4.3.1) с достаточно малыми по норме начальными значениями  $\mathbf{x}(t_0)$  ( $t_0 \in (a, \infty)$ ) бесконечно продолжаемы вправо и ограничены на полуоси  $[t_0, \infty)$ .*

*Следствие 2. Если для линейной однородной системы*

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t)\mathbf{x} \quad (A(t) \in C[t_0, \infty)) \quad (4.3.10)$$

*существует положительно определенная функция  $V(t, \mathbf{x})$ , для которой производная в силу системы  $\dot{V}(t, \mathbf{x}) \leq 0$ , то все решения  $\mathbf{x}(t)$  системы (4.3.10) определены и ограничены на полуоси  $[t_0, \infty)$ .*

#### § 4. Вторая теорема Ляпунова (теорема об асимптотической устойчивости)

*Теорема (вторая теорема Ляпунова). Пусть для приведенной системы (4.3.1) существует положительно определенная функция  $V(t, \mathbf{x}) \in C_{tx}^{(1,1)}(Z_0)$ , допускающая бесконечно малый высший предел при  $\mathbf{x} \rightarrow 0$  и имеющая отрицательно определенную производную по времени  $V(t, \mathbf{x})$  в силу этой системы. Тогда тривиальное решение  $\xi = 0$  системы асимптотически устойчиво по Ляпунову при  $t \rightarrow +\infty$ .*

*Доказательство.* Так как условия теоремы являются усилением условий теоремы из § 3, то тривиальное решение  $\xi = 0$  приведенной системы (4.3.1) устойчиво.

Согласно определению асимптотической устойчивости (гл. II, § 1, определение 4) остается доказать, что для каждого нетривиального решения

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) \neq \mathbf{0} \quad (t_0 \leq t < \infty),$$

где  $\|\mathbf{x}(t_0)\| \leq h < H$  и  $h$  достаточно мало, справедливо равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}. \quad (4.4.1)$$

Рассмотрим функцию

$$v(t) = V(t, \mathbf{x}(t)).$$

Так как в силу условия теоремы

$$\dot{v}(t) = \frac{dV}{dt} < 0,$$

то функция  $v(t)$  монотонно убывающая и, будучи ограниченной снизу, имеет конечный предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \inf_t v(t) = \alpha \geq 0. \quad (4.4.2)$$

Покажем, что число  $\alpha$  не может быть положительным. Действительно, предположим, что  $\alpha > 0$ . Тогда наше нетривиальное решение  $\mathbf{x}(t)$  удовлетворяет неравенству

$$\|\mathbf{x}(t)\| \geq \beta > 0 \quad \text{при } t_0 \leq t < \infty, \quad (4.4.3)$$

где  $\beta$  — положительная постоянная, т. е. траектория этого решения остается вне сферы радиуса  $\beta$  (рис. 32).

В самом деле, если это так, то найдется последовательность  $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots \rightarrow +\infty$ <sup>1)</sup> такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t_k) = \mathbf{0}.$$

Отсюда в силу существования бесконечно малого высшего предела функции  $V(t, \mathbf{x})$  при  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$  имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} v(t_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} V(t_k, \mathbf{x}(t_k)) = 0.$$

<sup>1)</sup> Если бы  $t_k \rightarrow T < \infty$ , то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t_k) = \mathbf{x}(T) = \mathbf{0}.$$

Отсюда в силу теоремы единственности получим  $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ , что противоречит нашему предположению.

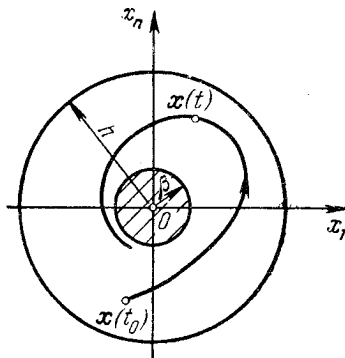


Рис. 32.

А это противоречит при  $\alpha > 0$  формуле (4.4.2), так как если  $\alpha$  есть предел функции  $v(t)$  при  $t \rightarrow +\infty$ , то для любой последовательности  $t_k \rightarrow +\infty$  должно быть выполнено условие  $v(t_k) \rightarrow \alpha$ .

Итак, в случае  $\alpha > 0$  имеет место неравенство (4.4.3) и, кроме того, можно предполагать, что  $\|\mathbf{x}(t)\| \leq h < H$  (в силу устойчивости тривиального решения  $\xi = 0$ ).

Пусть  $W_1(\mathbf{x})$  — непрерывная положительно определенная функция, удовлетворяющая неравенству

$$\dot{\Phi}(t) = \dot{V}(t, \mathbf{x}) \leq -W_1(\mathbf{x}). \quad (4.4.4)$$

Такая функция существует, так как согласно условию теоремы  $\dot{V}(t, \mathbf{x})$  — отрицательно определенная функция.

Введем обозначение:

$$\gamma = \inf_{\beta \leq \|\mathbf{x}\| \leq h} W_1(\mathbf{x}) > 0. \quad (4.4.5)$$

Тогда, интегрируя неравенство (4.4.4) в пределах от  $t_0$  до  $t$  и учитывая, что  $\beta \leq \|\mathbf{x}(\tau)\| \leq h$  при  $t_0 \leq \tau \leq t$ , будем иметь

$$v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^t \dot{V}(\tau, \mathbf{x}(\tau)) d\tau \leq v(t_0) - \int_{t_0}^t W_1(\tau) d\tau,$$

или, так как

$$-W_1(\mathbf{x}) \leq -\gamma \text{ при } \beta \leq \|\mathbf{x}\| \leq h,$$

то

$$v(t) \leq v(t_0) - \int_{t_0}^t \gamma d\tau = v(t_0) - \gamma(t - t_0). \quad (4.4.6)$$

Из неравенства (4.4.6) получаем, что при  $t$  достаточно большом

$$v(t) = V(t, \mathbf{x}(t)) < 0,$$

что противоречит положительности функции  $V(t, \mathbf{x})$ .

Итак,

$$\alpha = \lim_{t \rightarrow \infty} V(t, \mathbf{x}(t)) = 0. \quad (4.4.7)$$

Покажем теперь, что  $\mathbf{x}(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ . Действительно, пусть  $\varepsilon > 0$  произвольно мало и

$$l = \inf W(\mathbf{x}) > 0 \text{ при } \varepsilon \leq \|\mathbf{x}\| \leq h. \quad (4.4.8)$$

Из формулы (4.4.7) следует, что существует момент  $T > t_0$  такой, что

$$V(T, \mathbf{x}(T)) < l.$$

Отсюда в силу монотонного убывания функции  $V(x, \mathbf{x}(t))$  получаем

$$V(t, \mathbf{x}(t)) < l \text{ при } t \geq T \quad (4.4.9)$$

и, следовательно,

$$\|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon \text{ при } t > T. \quad (4.4.10)$$

Действительно, если для некоторого момента  $t_1 > T$  выполняется противоположное неравенство

$$\|\mathbf{x}(t_1)\| \geq \varepsilon,$$

то, учитывая формулы (4.4.9) и (4.4.8), мы имели бы

$$l > V(t_1, \mathbf{x}(t_1)) \geq W(\mathbf{x}(t_1)) \geq l,$$

что, очевидно, невозможно.

Итак, на основании неравенства (4.4.10) имеем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0},$$

что и требовалось доказать.

*Следствие 1. В условиях второй теоремы Ляпунова множество  $\|\mathbf{x}\| \leq h < H \leq \infty$  принадлежит области притяжения тривиального решения  $\xi = \mathbf{0}$ .*

*Следствие 2. Если для линейной однородной системы*

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t)\mathbf{x}$$

*существует положительно определенная функция  $V(t, \mathbf{x})$ , удовлетворяющая условиям второй теоремы Ляпунова, то каждое решение этой системы асимптотически устойчиво в целом.*

*Пример.* Пусть

$$V = V(x_1, \dots, x_n)$$

— положительно определенная функция класса  $C^2$  такая, что  $V(0) = \frac{\partial V(0)}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial V(0)}{\partial x_n} = 0$  и  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ .

Рассмотрим систему уравнений (см. [13])

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -\frac{\partial V}{\partial x_1}, \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{dx_n}{dt} &= -\frac{\partial V}{\partial x_n}, \end{aligned} \right\} \quad (4.4.11)$$

имеющую, очевидно, тривиальное решение:  $x_1 = 0, \dots, x_n = 0$ .

Принимая  $V$  за функцию Ляпунова для производной  $\dot{V}$  по  $t$ , в силу системы (4.4.11) получим такое выражение:

$$\dot{V} = -\left[ \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial V}{\partial x_n}\right)^2 \right].$$

Следовательно в силу теоремы из § 3 тривиальное решение  $\mathbf{x} = 0$  системы (4.4.11) устойчиво по Ляпунову при  $t \rightarrow +\infty$ .

Устойчивость будет асимптотической, если  $\dot{V}$  представляет собой отрицательно определенную функцию. Для этого необходимо и достаточно, чтобы система

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = 0, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} = 0$$

имела единственное нулевое решение  $x_1 = 0, \dots, x_n = 0$  в некоторой окрестности  $\|\mathbf{x}\| < h$ . На основании теории неявных функций для этого достаточно, чтобы *гессиан*

$$\det \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x_j \partial x_k} \right)$$

был отличен от нуля в точке  $O$ .

### § 5. Третья теорема Ляпунова (теорема о неустойчивости)

**Теорема 3 (третья теорема Ляпунова).** Пусть для приведенной системы (4.3.1) существует функция  $V(t, \mathbf{x}) \in C_{tx}^{(1,1)}(Z_0)$ , допускающая бесконечно малый высший предел при  $\mathbf{x} \rightarrow 0$  и обладающая знакоопределенной производной  $\dot{V}(t, \mathbf{x})$  по  $t$  в силу системы. Если при некотором  $t_0 > a$  в любой окрестности  $\|\mathbf{x}\| < \Delta$  ( $\Delta \leq h < H$ ) найдется точка  $(t_0, \mathbf{x}_0)$ , для которой знак функции  $V$  одинаков со знаком производной  $\dot{V}$ , т. е. такая, что

$$V(t_0, \mathbf{x}_0) \dot{V}(t_0, \mathbf{x}_0) > 0, \quad (4.5.1)$$

то тривиальное решение  $\xi = 0$  системы (4.3.1) неустойчиво в смысле Ляпунова при  $t \rightarrow \infty$ .

**Доказательство.** Пусть для определенности  $\dot{V}(t, \mathbf{x})$  — положительно определенная функция, т. е.

$$\dot{V}(t, \mathbf{x}) \geq W_1(\mathbf{x}) > 0 \quad (4.5.2)$$

при  $t_0 \leq t < \infty$  и  $0 < \|\mathbf{x}\| < h$ , где  $W_1(\mathbf{x})$  — непрерывная знакоположительная функция. Так как в силу условия теоремы функция  $V(t, \mathbf{x})$  допускает бесконечно малый высший предел при  $\mathbf{x} \rightarrow 0$ , то  $V(t, \mathbf{x})$  ограничена в достаточно узком цилиндре, т. е.

$$|V(t, \mathbf{x})| \leq M, \quad (4.5.3)$$

при  $t_0 \leq t < \infty$ ,  $\|\mathbf{x}\| \leq \Delta_0 < h$ , где  $M$  и  $\Delta_0$  — некоторые положительные числа.

Пусть  $\delta > 0$  ( $\delta < \Delta_0$ ) произвольно мало. В силу условия теоремы существует точка  $(t_0, \mathbf{x}_0)$ , где  $0 < \|\mathbf{x}_0\| < \delta$ , такая, что

$$V(t_0, \mathbf{x}_0) = \varepsilon > 0.$$



Положим

$$v(t) = V(t, \mathbf{x}(t)),$$

где  $\mathbf{x}(t) \neq \mathbf{0}$  — решение, определяемое начальным условием:  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ , причем

$$0 < \|\mathbf{x}_0(t_0)\| < \delta. \quad (4.5.4)$$

В силу неравенства (4.5.2) функция  $v(t)$  монотонно возрастает вместе с  $t$ , и, следовательно, при  $t \geq t_0$  имеем

$$V(t, \mathbf{x}(t)) \geq V(t, \mathbf{x}(t_0)) = \alpha > 0. \quad (4.5.5)$$

Покажем, что при некотором значении  $t = t_1$  ( $t_1 > t_0$ ) будет выполнено неравенство

$$\|\mathbf{x}(t_1)\| > \Delta_0. \quad (4.5.6)$$

Действительно, пусть  $\|\mathbf{x}(t)\| \leq \Delta_0$  при  $t \geq t_0$ ; тогда решение  $\mathbf{x}(t)$  бесконечно продолжаемо вправо. Так как функция  $V(t, \mathbf{x})$  имеет бесконечно малый высший предел при  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$ , то из неравенства (4.5.5) на основании рассуждений, приведенных при доказательстве второй теоремы Ляпунова, следует, что

$$0 < \beta \leq \|\mathbf{x}(t)\| \leq \Delta_0 \text{ при } t_0 \leq t < \infty,$$

где  $\beta$  — некоторое положительное число. Пусть

$$\gamma = \inf_{\beta \leq \|\mathbf{x}\| \leq \Delta_0} W_1(\mathbf{x}) > 0;$$

тогда, учитывая неравенство  $\|\mathbf{x}(t)\| \leq \Delta_0$ , получаем

$$\dot{V}(t, \mathbf{x}(t)) \geq \gamma \text{ при } t_0 \leq t < \infty.$$

Следовательно, при  $t_0 \leq t < \infty$  имеем

$$V(t, \mathbf{x}(t)) = V(t_0, \mathbf{x}(t_0)) + \int_{t_0}^t \dot{V}(\tau, \mathbf{x}(\tau)) d\tau \geq V(t_0, \mathbf{x}_0) + \gamma(t - t_0), \quad (4.5.7)$$

что противоречит ограниченности функции  $V(t, \mathbf{x})$  в области  $t_0 \leq t < \infty$ ,  $\|\mathbf{x}\| \leq \Delta_0$ .

Так как  $\delta > 0$  любое и  $\Delta_0 > 0$  фиксировано, то на основании неравенств (4.5.4) и (4.5.6) заключаем, что тривиальное решение  $\xi = \mathbf{0}$  неустойчиво по Ляпунову при  $t \rightarrow \infty$  (см. гл. II, § 1, определение 3).

Теорема доказана.

Замечание 1. В третьей теореме функция  $V(t, \mathbf{x})$  не обязательно является знакоопределенной.

Замечание 2. Функции  $V(t, \mathbf{x})$ , удовлетворяющие условиям первой, второй и третьей теорем Ляпунова, будем называть соответственно *функциями Ляпунова* 1-го, 2-го и 3-го рода.

Следствие. Если для приведенной системы дифференциальных уравнений существует функция Ляпунова 1-го или 2-го, или 3-го рода, то тривиальное решение этой системы, соответственно, устойчиво, асимптотически устойчиво, неустойчиво по Ляпунову при  $t \rightarrow +\infty$ .

## § 6. Теорема Четаева

При формулировке третьей теоремы Ляпунова о неустойчивости (§ 5) предполагается, что производная  $\dot{V}(t, \mathbf{x})$  в силу системы знакоположительна в некоторой полной окрестности начала координат  $O$ . Однако для доказательства неустойчивости тривиального решения системы достаточно обнаружить существование хотя бы одной траектории, исходящей из каждой, сколь угодно малой, окрестности точки  $O$  и выходящей за пределы фиксированной окрестности. А для этого нет необходимости рассматривать полную окрестность начала координат и, следовательно, условия третьей теоремы Ляпунова можно значительно ослабить. Соответствующее обобщение было произведено Н. Г. Четаевым (см. [15]).

**Теорема Четаева.** Пусть для приведенной системы (4.3.1) в области  $Z = \{t_0 \leq t < +\infty, \|\mathbf{x}\| \leq h < H\}$  существует непрерывно дифференцируемая функция  $V(t, \mathbf{x})$ , область положительности которой  $\Pi = \{V(t, \mathbf{x}) > 0, (t, \mathbf{x}) \in Z\}$  имеет ненулевое открытое сечение  $D_t$ , примыкающее к началу координат  $O$ , для каждого  $t \in [t_0, \infty)$ , причем на части границы области  $\Pi$ , лежащей внутри цилиндра  $Z$ , включая ось  $Ot$ , выполнено равенство

$$V(t, \mathbf{x}) = 0^1).$$

Тогда, если: 1) функция  $V(t, \mathbf{x})$  ограничена в области  $\Pi$ , 2) имеет в этой области положительную производную  $\dot{V}(t, \mathbf{x})$  в силу системы (4.3.1), 3) в каждой подобласти  $\{V(t, \mathbf{x}) \geq \alpha > 0\}$  справедливо неравенство  $\dot{V}(t, \mathbf{x}) \geq \beta > 0$ , где  $\beta = \beta(\alpha)$  — некоторое положительное число, зависящее от положительного числа  $\alpha$ , то тривиальное решение системы (4.3.1) неустойчиво в смысле Ляпунова при  $t \rightarrow \infty$ .

**Доказательство.** Пусть  $\delta > 0$  произвольно мало. Так как точка  $O$  является граничной для открытого сечения  $D_{t_0} = D$ , то в гиперплоскости  $t = t_0$  существует внутренняя точка  $\mathbf{x}_0 \in D$  такая, что  $0 < \|\mathbf{x}_0\| < \delta < h$ , причем  $V(t_0, \mathbf{x}_0) = \alpha > 0$  (рис. 33).

<sup>1)</sup> В случае положительно определенной функции  $V(t, \mathbf{x})$  эта часть границы для каждого  $t \in [t_0, \infty)$  сводится к единственной точке  $O$ .

Докажем, что решение  $\mathbf{x}(t)$ , определяемое начальным условием:  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ , при возрастающем  $t$  выйдет за пределы шара  $\|\mathbf{x}\| < h$ . Действительно, пусть  $\|\mathbf{x}(t)\| < h$  при  $t \geq t_0$ . В силу условия 2) теоремы

$$\dot{V}(t, \mathbf{x}(t)) > 0 \text{ при } V(t, \mathbf{x}(t)) > 0;$$

отсюда при  $t \geq t_0$  получаем

$$V(t, \mathbf{x}(t)) \geq V(t_0, \mathbf{x}(t_0)) = \alpha, \quad (4.6.1)$$

если только  $V(t, \mathbf{x}(t)) > 0$ . Так как решение  $\mathbf{x}(t)$  может покинуть область  $\Pi = \{V(t, \mathbf{x}) > 0\}$ , лишь проходя при некотором  $t_1 > t_0$  внутреннюю часть границы, где  $V(t_1, \mathbf{x}(t_1)) = 0$ , причем

$$V(t, \mathbf{x}(t)) \geq \alpha > 0 \text{ при } t_0 \leq t < t_1,$$

то, переходя в этом неравенстве к пределу при  $t \rightarrow t_1 - 0$ , будем иметь

$$V(t_1, \mathbf{x}(t_1)) \geq \alpha > 0,$$

что невозможно. Следовательно, решение  $\mathbf{x}(t)$  при  $t \geq t_0$  целиком лежит в подобласти  $\{V(t, \mathbf{x}) \geq \alpha > 0\}$  области  $\Pi$ . Отсюда, на основании условия 3) теоремы, получим

$$\dot{V}(t, \mathbf{x}(t)) \geq \beta > 0. \quad (4.6.2)$$

Интегрируя почленно неравенство (4.6.2), при  $t \geq t_0$  будем иметь

$$V(t, \mathbf{x}(t)) \geq V(t_0, \mathbf{x}(t_0)) + \beta(t - t_0). \quad (4.6.3)$$

Последнее неравенство невозможно, так как в силу условия 1) теоремы функция  $V(t, \mathbf{x})$  ограничена в области  $\Pi$ .

Итак, в любой  $\delta$ -окрестности точки  $O$  при  $t = t_0$  найдется некоторое решение  $\mathbf{x}(t)$ , покидающее при  $t \rightarrow +\infty$  внутренность шара  $\|\mathbf{x}\| < h$ . Таким образом, тривиальное решение  $\xi = 0$  неустойчиво по Ляпунову (гл. II, § 1).

Теорема доказана.

**З а м е ч а н и е.** Легко проверить, что для случая Ляпунова (§ 5) при  $V(t, \mathbf{x}) > 0$  ввиду наличия бесконечно малого высшего предела функции  $V(t, \mathbf{x})$  множество  $\Pi = \{t, \mathbf{x} : V(t, \mathbf{x}) > 0\}$  обладает всеми указанными выше свойствами.

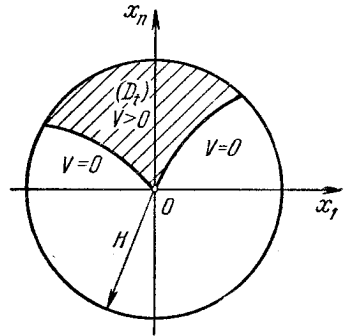


Рис. 33.

## § 7. Асимптотическая устойчивость в целом

Рассмотрим приведенную систему

$$\frac{dx}{dt} = X(t, \mathbf{x}) \quad (X(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0}), \quad (4.7.1)$$

где  $X(t, \mathbf{x}) \in C_{tx}^{(0,1)}(I_t^+ \times \mathcal{R}_x^n)$  и  $I_t^+ = \{a < t < +\infty\}$ .

Определение 1. Говорят, что тривиальное решение  $\xi = \mathbf{0}$  системы (4.7.1) *асимптотически устойчиво в целом* (см. [16]), если: 1) оно асимптотически устойчиво по Ляпунову и 2) для каждого решения  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$  ( $t_0 \in I_t^+$ ) выполнено условие:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{0} \quad (4.7.2)$$

(т. е. область притяжения представляет собой все пространство  $\mathcal{R}_x^n$  (см. гл. II, § 1)). Аналогично определяется асимптотическая устойчивость в целом нетривиального решения  $\xi$ .

Определение 2. Будем говорить, что  $V(t, \mathbf{x}) \in C_{tx}^{(0,1)}(I_t^+ \times \mathcal{R}_x^n)$  допускает *бесконечно большой низший предел* при  $\mathbf{x} \rightarrow \infty$ , если

$$V(t, \mathbf{x}) \rightrightarrows \infty \quad \text{при} \quad \|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty, \quad (4.7.3)$$

т. е. для любого  $M > 0$  существует  $R = R(M)$  такое, что

$$|V(t, \mathbf{x})| > M \quad \text{при} \quad t \in [t_0, \infty) \quad \text{и} \quad \|\mathbf{x}\| \geq R.$$

Определение 3. Будем говорить, что  $V(t, \mathbf{x}) \in C_{tx}(I_t^+ \times \mathcal{R}_x^n)$  допускает в  $\mathcal{R}_x^n$  *сильный бесконечно малый высший предел* при  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$ , если существует функция  $U(\mathbf{x}) \in C(\mathcal{R}_x^n)$  такая, что

$$|V(t, \mathbf{x})| \leq U(\mathbf{x}) \quad (4.7.4)$$

при  $(t, \mathbf{x}) \in (I_t^+ \times \mathcal{R}_x^n)$  и  $U(\mathbf{0}) = 0$  (ср. § 3, определение 3).

Теорема Барбашина — Красовского (см. [42]). Если для системы (4.7.1) существует положительно определенная скалярная функция  $V(t, \mathbf{x}) \in C_{tx}^{(1,1)}(I_t^+ \times \mathcal{R}_x^n)$ , допускающая в  $\mathcal{R}_x^n$  *сильный бесконечно малый высший предел* при  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$  и *бесконечно большой низший предел* при  $\mathbf{x} \rightarrow \infty$ , причем производная  $\dot{V}(t, \mathbf{x})$  в силу системы отрицательно определена в  $\mathcal{R}_x^n$ , то тривиальное решение  $\xi = \mathbf{0}$  *асимптотически устойчиво в целом*.

Доказательство. Так как условия этой теоремы, очевидно, включают условия первой теоремы Ляпунова (§ 3), то тривиальное решение  $\xi = \mathbf{0}$  устойчиво по Ляпунову при  $t \rightarrow +\infty$ .

Пусть  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$  — нетривиальное решение системы (4.7.1), определяемое начальными условиями:  $\mathbf{x}(t_0; t_0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$ , где  $t_0 \in I_t^+$  и  $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{R}_x^n$  — произвольно.

Обозначим через  $K_x$  некоторый компакт (т. е. ограниченное замкнутое множество пространства  $\mathcal{R}_x^n$ ), содержащий точку  $\mathbf{x}$ :

$$\mathbf{x}_0 \in K_x \subset \mathcal{R}_x^n,$$

и пусть

$$M = \sup V(t, \mathbf{x}) \quad \text{на} \quad I_t^+ \times K_x.$$

В силу неравенства (4.7.4) имеем

$$M < +\infty.$$

Так как функция  $V(t, \mathbf{x})$  обладает в  $\mathcal{R}_x^n$  бесконечно большим пределом при  $\mathbf{x} \rightarrow \infty$ , то существует шар  $S\{\|\mathbf{x}\| < R\} \supset K_x$  такой, что

$$V(t, \mathbf{x}) > M \quad \text{при} \quad \|\mathbf{x}\| \geq R. \quad (4.7.5)$$

По условию теоремы вдоль траектории  $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$  выполнено неравенство

$$\dot{V}(t, \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)) < 0;$$

поэтому при  $t \geq t_0$  имеем

$$V(t, \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)) \leq V(t_0, \mathbf{x}_0) \leq M$$

и, следовательно,

$$\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| < R,$$

т. е. все решения системы (4.7.1) ограничены.

Покажем теперь, что

$$V(t, \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty.$$

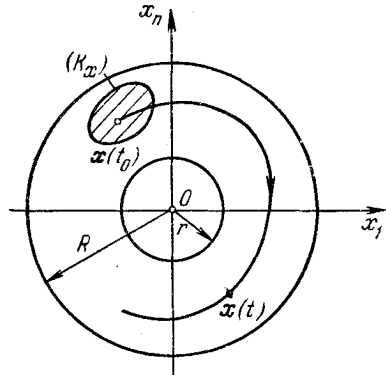


Рис. 34.

Пусть  $\varepsilon > 0$  произвольно и  $r > 0$  таково, что функция  $U(\mathbf{x})$ , определяемая формулой (4.7.4), удовлетворяет неравенству

$$0 \leq U(\mathbf{x}) < \varepsilon \quad \text{при} \quad \|\mathbf{x}\| \leq r. \quad (4.7.6)$$

Покажем, что решение  $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$  при  $t \rightarrow +\infty$  обязательно войдет внутрь замкнутого шара  $\|\mathbf{x}\| \leq r$ .

Действительно, допустим, что

$$0 < r < \|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| < R \quad \text{при} \quad t \geq t_0$$

(рис. 34). Тогда  $\dot{V}(t, \mathbf{x})$ , будучи отрицательно определенной, имеет в области  $I_t^+ \times \{r \leq \|\mathbf{x}\| \leq R\}$  отрицательную верхнюю

грань  $-\gamma (\gamma > 0)$  и, значит, при  $t \geq t_0$  справедливо неравенство

$$\dot{V}(t, \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)) \leq -\gamma.$$

Интегрируя это неравенство в пределах от  $t_0$  до  $t (t > t_0)$ , получим

$$V(t, \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)) \leq V(t_0, \mathbf{x}_0) - \gamma(t - t_0) < 0,$$

если только

$$t > t_0 + \frac{V(t_0, \mathbf{x}_0)}{\gamma},$$

что противоречит положительности функции  $V(t, \mathbf{x})$ . Следовательно, существует момент  $T > t_0$  такой, что

$$\|\mathbf{x}(T; t_0, \mathbf{x}_0)\| \leq r,$$

т. е.

$$U(\mathbf{x}(T; t_0, \mathbf{x}_0)) < \varepsilon.$$

Отсюда ввиду монотонного убывания функции  $V(t, \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0))$  при  $t > T$  будем иметь

$$V(t, \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)) < V(T, \mathbf{x}(T; t_0, \mathbf{x}_0)) \leq U(\mathbf{x}(T; t_0, \mathbf{x}_0)) < \varepsilon$$

и, таким образом,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(t, \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)) = 0. \quad (4.7.7)$$

Из последнего равенства выводим, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0) = 0,$$

так как в противном случае существовала бы последовательность  $\mathbf{x}(t_k; t_0, \mathbf{x}_0)$  ( $k = 1, 2, \dots, t_k \rightarrow \infty$ ) такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} V(t_k, \mathbf{x}(t_k; t_0, \mathbf{x}_0)) \neq 0,$$

вопреки равенству (4.7.7).

Теорема доказана.

**Замечание.** Из доказательства следует, что при условии теоремы Барбашина — Красовского асимптотическая устойчивость в целом равномерна по  $\mathbf{x}_0$  на любом компакте  $K_x$ , т. е. можно гарантировать, что (см. [16])

$$\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| < \varepsilon$$

при  $t > T(\varepsilon, K_x)$ , где  $\mathbf{x}_0 \in K_x$ .

## § 8. Экспоненциальная устойчивость

Определение. Тривиальное решение  $\xi = 0$  системы (4.7.1) называется *экспоненциально устойчивым* при  $t \rightarrow +\infty$  (см. [16]), если для каждого решения  $x(t) \equiv x(t; t_0, x_0)$  этой системы в некоторой области  $t_0 \leq t < \infty$ ,  $\|x\| \leq h < H$  справедливо неравенство

$$\|x(t)\| \leq N \|x(t_0)\| e^{-\alpha(t-t_0)} \quad (t \geq t_0), \quad (4.8.1)$$

где  $N$  и  $\alpha$  — положительные постоянные, не зависящие от выбора решения  $x(t)$ .

Легко видеть, что из экспоненциальной устойчивости решения  $\xi = 0$  следует его асимптотическая устойчивость. Действительно, полагая

$$\|x(t_0)\| < \frac{\varepsilon}{N} = \delta,$$

где  $\varepsilon > 0$  произвольно, из неравенства (4.8.1) имеем

$$\|x(t)\| < \varepsilon \quad \text{при} \quad t \geq t_0,$$

т. е. решение  $\xi = 0$  устойчиво по Ляпунову. Кроме того, очевидно,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0,$$

если только  $\|x(t_0)\| < h$ .

Если неравенство (4.8.1) справедливо для всех точек  $x(t_0) \in \mathcal{R}_x^n$ , то имеет место асимптотическая устойчивость в целом.

Из неравенства (4.8.1) следует, что если тривиальное решение  $\xi = 0$  системы (4.7.1) экспоненциально устойчиво, то близкие к нему решения  $x(t)$  этой системы имеют характеристические показатели  $\chi[x(t)]$ , удовлетворяющие неравенству

$$\chi[x(t)] \leq -\alpha < 0.$$

Аналогично определяется экспоненциальная устойчивость не тривиального решения. А именно, решение  $\xi(t)$  *экспоненциально устойчиво*, если близкие к нему при  $t = t_0$  решения  $x(t)$  удовлетворяют неравенству

$$\|x(t) - \xi(t)\| \leq N \|x(t_0) - \xi(t_0)\| e^{-\alpha(t-t_0)} \quad (t \geq t_0),$$

где  $N$  и  $\alpha$  — некоторые положительные постоянные.

*Лемма. Если тривиальное решение однородной линейной системы*

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad (4.8.2)$$

*с постоянной матрицей  $A$  асимптотически устойчиво при  $t \rightarrow +\infty$ , то эта система экспоненциально устойчива, т. е. каждое ее решение экспоненциально устойчиво при  $t \rightarrow +\infty$ .*

Доказательство. Как известно (гл. II, § 8), тривиальное решение  $\xi = 0$  системы (4.8.2) асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда все характеристические корни  $\lambda_p(A)$  матрицы  $A$  имеют отрицательные вещественные части:

$$\operatorname{Re} \lambda_p(A) < 0 \quad (p = 1, \dots, n).$$

Положим

$$\min_p \operatorname{Re} \lambda_p(A) < -\alpha < 0.$$

Тогда при  $t \geq 0$  получим (гл. I, § 13)

$$\|e^{tA}\| \leq N e^{-\alpha t}, \quad (4.8.3)$$

где  $N$  — некоторая положительная постоянная. Из уравнения (4.8.2) для любого решения  $x(t)$  находим

$$x(t) = e^{(t-t_0)A} x(t_0),$$

где начальный момент  $t_0$  произволен.

Следовательно, на основании (4.8.3) при  $t \geq t_0$  получаем

$$\|x(t)\| \leq N \|x(t_0)\| e^{-\alpha(t-t_0)}.$$

Отсюда для любого решения  $\xi(t)$  однородной системы (4.8.2), учитывая, что разность  $x(t) - \xi(t)$  есть решение этой системы, при  $t \geq t_0$  будем иметь

$$\|x(t) - \xi(t)\| \leq N \|x(t_0) - \xi(t_0)\| e^{-\alpha(t-t_0)},$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Для линейной системы с переменными коэффициентами из асимптотической устойчивости ее тривиального решения, вообще говоря, не следует экспоненциальная устойчивость.

Пример. Для скалярного уравнения

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{t} \quad (1 \leq t < \infty)$$

его общее решение имеет вид

$$x(t) = \frac{x(1)}{t}.$$

Таким образом, решение  $\xi = 0$  этого уравнения асимптотически устойчиво при  $t \rightarrow \infty$ , однако не является экспоненциально устойчивым.

Теорема. Если существует положительно определенная квадратичная форма

$$V(x) = (Ax, x), \quad (4.8.4)$$



производная которой  $\dot{V}(\mathbf{x})$  в силу приведенной системы (4.7.1)

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{X}(t, \mathbf{x}) \quad (\mathbf{X}(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0})$$

удовлетворяет неравенству

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq W(\mathbf{x}) \quad (4.8.5)$$

$$(t \leq t_0; \quad \|\mathbf{x}\| \leq h < H),$$

где

$$W(\mathbf{x}) = -(\mathbf{B}\mathbf{x}, \mathbf{x}) \quad (4.8.6)$$

— отрицательно определенная квадратичная форма ( $A$  и  $B$  — постоянные симметрические матрицы), то тривиальное решение  $\xi = \mathbf{0}$  этой системы экспоненциально устойчиво при  $t \rightarrow +\infty$ .

Доказательство (см. [16]). На основании формул (4.8.4) и (4.8.6) получаем

$$a(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \leq V(\mathbf{x}) \leq a_1(\mathbf{x}, \mathbf{x})$$

и

$$b(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \leq -W(\mathbf{x}) \leq b_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}),$$

где

$$a = \min_p \lambda_p(A), \quad a_1 = \max_p \lambda_p(A)$$

и, соответственно,

$$b = \min_p \lambda_p(B), \quad b_1 = \max_p \lambda_p(B),$$

причем  $0 < a \leq a_1$  и  $0 < b \leq b_1$ .

Отсюда на основании неравенства (4.8.5) выводим

$$\frac{dV}{dt} \leq -b(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \leq -\frac{b}{a_1} V(\mathbf{x}).$$

Интегрируя это неравенство, будем иметь при  $t \geq t_0$

$$V(\mathbf{x}(t)) \leq V(\mathbf{x}(t_0)) e^{-2\alpha(t-t_0)},$$

где  $\alpha = \frac{b}{2a_1}$ . Далее, используя евклидову норму

$$\|\mathbf{x}\|^2 = (\mathbf{x}, \mathbf{x}),$$

при  $t \geq t_0$  находим

$$\|\mathbf{x}(t)\|^2 \leq \frac{1}{a} V(\mathbf{x}(t)) \leq \frac{a_1}{a} \|\mathbf{x}(t_0)\|^2 e^{-2\alpha(t-t_0)},$$

т. е. при  $t \geq t_0$ ,

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq N \|\mathbf{x}(t_0)\| e^{-\alpha(t-t_0)},$$

где

$$N = \sqrt{\frac{a_1}{a}}$$

и  $\|\mathbf{x}(t_0)\|$  достаточно мала.

### § 9. Теорема Персидского

Имеются многочисленные работы (см. [16]), посвященные обращению теорем Ляпунова, т. е. выяснению необходимости условий этих теорем. Мы изложим здесь один старый результат в этой области, принадлежащий К. П. Персидскому (см. [43]).

Теорема Персидского. Пусть приведенная система

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x) \quad (X(t, 0) \equiv 0), \quad (a)$$

где

$$X \in C_{tx}^{(1,1)} \quad (t_0 \leq t < +\infty, \quad \|x\| < H < \infty),$$

допускает тривиальное решение  $\xi = 0$ , устойчивое по Ляпунову при  $t \rightarrow +\infty$ . Тогда для системы (a) в области

$$t_0 \leq t < +\infty, \quad \|x\| < h \leq H$$

существует функция Ляпунова  $V(t, x) \in C_{tx}^{(1,1)}$  1-го рода, т. е. удовлетворяющая условиям первой теоремы Ляпунова об устойчивости.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную систему

$$\frac{dy}{dt} = Y(t, y), \quad (b)$$

где  $Y(t, y) = X(t, y)\varphi(y)$ , причем  $\varphi(y) \in C^1(\mathcal{R}_y^n)$  — скалярная функция, удовлетворяющая условиям:

$$\varphi(y) = \begin{cases} 1 & \text{при } \|y\| \leq h, \\ 0 & \text{при } \|y\| \geq H. \end{cases} \quad (4.9.1)$$

Пусть  $x(t; t_0, x_0)$  и  $y(t; t_0, y_0)$  — решения, соответственно, систем (a) и (b), определяемые начальными условиями:  $x(t_0; t_0, x_0) = x_0$  и  $y(t_0; t_0, y_0) = y_0$ .

Из условий (4.9.1) вытекает, что решения  $y(t; t_0, y_0)$  можно считать определенными на полуоси  $t_0 \leq t \leq \infty$  и обладающими свойством единственности.

Фиксируя  $t_0$ , рассмотрим функцию

$$V(t, x) = (1 + e^{-t}) \|y(t_0; t, x)\|^2 \quad (4.9.2) \\ (t \geq t_0, \quad \|x\| < H),$$

где норма вектора  $y = (y_1, \dots, y_n)$  понимается в смысле евклидовой нормы:

$$\|y\|^2 = (y, y) = \sum_j y_j^2.$$

Пусть  $t \geq t_0$  и  $\|\mathbf{x}\| < h$ . Тогда на основании условия (4.9.1) правые части систем (а) и (б) совпадают и, следовательно, для полных производных функции  $V(t, \mathbf{x})$  в силу систем (а) и (б) имеем

$$\begin{aligned} \dot{V}_a(t, \mathbf{x}) &= V_b(t, \mathbf{x}) = \\ &= \left\{ \frac{d}{d\tau} [(1 + e^{-\tau}) \|\mathbf{y}(t_0; \tau, \mathbf{y}_\tau)\|^2] \right\}_{\tau=t}, \end{aligned} \quad (4.9.3)$$

где  $\mathbf{y}_\tau = \mathbf{y}(\tau; t, \mathbf{x})$ . Но точка  $\mathbf{y}(t_0; \tau, \mathbf{y}_\tau)$  лежит на траектории  $\Gamma$ ,

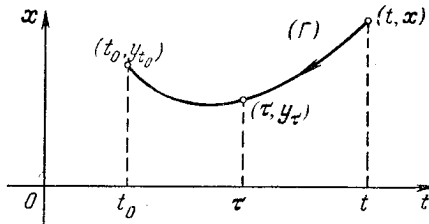


Рис. 35.

проходящей через точку  $(t, \mathbf{x})$ , и вследствие теоремы единственности точка ее выхода на гиперплоскость  $t = t_0$  совпадает со следом  $\mathbf{y}(t_0; t, \mathbf{x})$  траектории  $\Gamma$  (рис. 35), т. е.

$$\mathbf{y}(t_0; \tau, \mathbf{y}_\tau) = \mathbf{y}(t_0, t, \mathbf{x}) \quad (4.9.4)$$

при  $t_0 \leq \tau < \infty$ .

Таким образом, из формулы (4.9.3) получаем

$$\begin{aligned} \dot{V}_a(t, \mathbf{x}) &= \|\mathbf{y}(t_0; t, \mathbf{x})\|^2 \left[ \frac{d}{d\tau} (1 + e^{-\tau}) \right]_{\tau=t} = \\ &= -e^{-t} \|\mathbf{y}(t_0; t, \mathbf{x})\|^2 < 0 \end{aligned} \quad (4.9.5)$$

при  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  и  $\dot{V}_a(t, \mathbf{0}) = 0$ , т. е. производная  $\dot{V}(t, \mathbf{x})$  в силу системы (а) знакоотрицательна.

Покажем, что функция  $V(t, \mathbf{x})$  — положительно определенная в области  $t_0 \leq t < \infty$ ,  $\|\mathbf{x}\| < h$ . Так как тривиальное решение  $\xi = \mathbf{0}$  как системы (а), так и системы (б) устойчиво по Ляпунову, то существует  $\delta > 0$  ( $\delta < \varepsilon \leq h$ ) такое, что при  $t_0 \leq t < \infty$  имеем

$$\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| = \|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| < \varepsilon, \quad (4.9.6)$$

если только  $\|\mathbf{x}_0\| < \delta$ . Тогда, если  $0 < \varepsilon \leq \|\mathbf{x}_0\| < h$ , то

$$\|\mathbf{y}(t_0; t, \mathbf{x}_0)\| \geq \delta \text{ при } t \geq t_0. \quad (4.9.7)$$

Действительно, если бы

$$\|y(t_0; \bar{t}, x_0)\| < \delta \text{ для некоторого } \bar{t} \geq t_0,$$

то

$$\|y(t; \bar{t}, x_0)\| < \varepsilon \text{ при } t \geq t_0.$$

Отсюда, полагая  $t = \bar{t}$ , мы бы имели

$$\|y(\bar{t}; t, x_0)\| = \|x_0\| < \varepsilon,$$

что противоречит выбору  $x_0$  (рис. 36).

Кроме того, на основании формулы (4.9.1) в силу свойства единственности решений системы (b) имеем

$$\|y(t_0; t, x_0)\| < H \text{ при } \|x_0\| < h. \quad (4.9.8)$$

Из формулы (4.9.2) получаем

$$V(t, x_0) > \delta^2 = \eta \text{ при } \varepsilon \leq \|x_0\| < h. \quad (4.9.9)$$

Полагая  $\varepsilon = \frac{h}{2}, \dots, \frac{h}{n+1}, \dots$ , получим последовательность положительных чисел  $\eta_1 > \eta_2 > \dots > \eta_n > 0$  таких, что

$$V(t, x) > \eta_n \text{ при } \frac{h}{n+1} \leq \|x\| < \frac{h}{n}$$

( $n = 1, 2, \dots$ ). Отсюда следует, что существует непрерывная

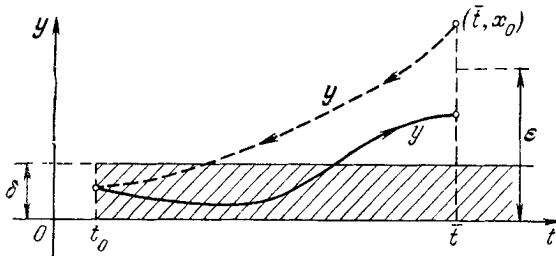


Рис. 36.

положительно определенная функция  $W(x)$ , удовлетворяющая неравенству

$$V(t, x) \geq W(x) > 0 \text{ при } x \neq 0.$$

Например, можно положить

$$W(x) = \eta_{n+1} + \frac{n(n+1)}{h} (\eta_n - \eta_{n+1}) \left( \|x\| - \frac{h}{n+1} \right)$$

при  $\frac{h}{n+1} \leq \|x\| < \frac{h}{n}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ).

Следовательно, функция  $V(t, \mathbf{x})$  — положительно определенная.

На основании известной теоремы о гладкости решения  $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$  по начальным данным  $t_0, \mathbf{y}_0$  (см. [9]) функция  $V(t, \mathbf{x})$  непрерывна по совокупности переменных  $t$  и  $\mathbf{x}$  и имеет непрерывные частные производные  $\frac{\partial V}{\partial t}$  и  $\frac{\partial V}{\partial x_j}$  ( $j = 1, \dots, n$ ), причем

$$\dot{V}_a(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j} X_j(t, \mathbf{x}) < 0$$

при  $t \in [t_0, \infty)$  и  $\|\mathbf{x}\| < h$ .

Теорема доказана.

## § 10. Устойчивость квазилинейных систем

Рассмотрим действительную дифференциальную систему

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x} + \varphi(t, \mathbf{x}), \quad (a)$$

где  $A$  — постоянная матрица и  $\varphi(t, \mathbf{x}) \in C$  ( $0 \leq t < \infty$ ,  $\|\mathbf{x}\| < H$ )<sup>1)</sup>, причем  $\varphi(t, \mathbf{x}) = o(\|\mathbf{x}\|)$  равномерно по  $t$ , т. е.

$$\frac{\varphi(t, \mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|} \xrightarrow{t} 0 \quad \text{при } \mathbf{x} \rightarrow 0 \quad (4.10.1)$$

( $\|\mathbf{x}\|$  — евклидова норма вектора  $\mathbf{x}$ ).

Систему (а) будем называть *квазилинейной*; очевидно, эта система допускает тривиальное решение  $\mathbf{x} = 0$ .

**Теорема Ляпунова.** *Если все собственные значения  $\lambda_j(A)$  ( $j = 1, \dots, n$ ) матрицы  $A$  имеют отрицательные вещественные части:*

$$\operatorname{Re} \lambda_j(A) < 0 \quad (j = 1, \dots, n), \quad (4.10.2)$$

то тривиальное решение  $\mathbf{x} = 0$  квазилинейной системы (а) асимптотически устойчиво по Ляпунову при  $t \rightarrow +\infty$ .

Доказательство (см. [10]). Пусть  $\xi(t, \mathbf{x})$  — действительное решение соответствующей линейной системы

$$\frac{d\xi}{dt} = A\xi, \quad (b)$$

определяемое начальным условием:

$$\xi(0, \mathbf{x}) = \mathbf{x}.$$

<sup>1)</sup> Для простоты принимаем  $t_0 = 0$ .

Если  $\Xi(t)$  — нормированная фундаментальная матрица (матрицант) системы (b) такая, что

$$\Xi(0) = E,$$

то, очевидно, имеем

$$\xi(t, \mathbf{x}) = \Xi(t) \mathbf{x}. \quad (4.10.3)$$

Из условия (4.10.2) вытекает (см. гл. I, § 13), что

$$\|\Xi(t)\| \leq Ne^{-\alpha t} \text{ при } t \geq 0,$$

где  $\max \operatorname{Re} \lambda_j(A) < -\alpha < 0$  и  $N$  — некоторая положительная постоянная. Отсюда

$$\|\xi(t, \mathbf{x})\| \leq Ne^{-\alpha t} \|\mathbf{x}\| \text{ при } t \geq 0. \quad (4.10.4)$$

Рассмотрим функцию

$$V(\mathbf{x}) = \int_0^{\infty} \|\xi(\tau, \mathbf{x})\|^2 d\tau. \quad (4.10.5)$$

Из (4.10.3), используя известные свойства скалярного произведения, имеем

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}) &= \int_0^{\infty} (\Xi(\tau) \mathbf{x}, \Xi(\tau) \mathbf{x}) d\tau = \\ &= \int_0^{\infty} (\Xi^T(\tau) \Xi(\tau) \mathbf{x}, \mathbf{x}) d\tau = (S\mathbf{x}, \mathbf{x}), \end{aligned} \quad (4.10.6)$$

где

$$S = \int_0^{\infty} \Xi^T(\tau) \Xi(\tau) d\tau,$$

$\Xi^T(\tau)$  — транспонированная матрица относительно матрицы  $\Xi(\tau)$ . Таким образом,  $V(\mathbf{x})$  представляет собой квадратичную форму относительно переменных  $x_1, \dots, x_n$  с действительной симметрической матрицей  $S$ .

На основании неравенства (4.10.4) интеграл в правой части равенства (4.10.6) сходится и, следовательно, функция  $V(\mathbf{x})$  определена и конечна для каждой точки  $\mathbf{x} \in \mathcal{E}_x^n$ , причем в силу свойства единственности решений системы (b) имеем

$$V(\mathbf{x}) > 0 \text{ при } \mathbf{x} \neq 0$$

и

$$V(\mathbf{0}) = 0.$$

Используя так называемое *групповое свойство* решений автономной системы (b) (рис. 37)

$$\xi(\tau, \xi(t, \mathbf{x})) = \xi(t + \tau, \mathbf{x}),$$

получим

$$\begin{aligned} V(\xi(t, \mathbf{x})) &= \int_0^{\infty} \|\xi(\tau, \xi(t, \mathbf{x}))\|^2 d\tau = \\ &= \int_0^{\infty} \|\xi(t + \tau, \mathbf{x})\|^2 d\tau = \int_t^{\infty} \|\xi(\tau, \mathbf{x})\|^2 d\tau. \end{aligned}$$

Отсюда производная по времени  $t$  функции  $V(\mathbf{x})$  в точке  $\mathbf{x}$  в силу системы (b) будет равна

$$\begin{aligned} \dot{V}_b(\mathbf{x}) &= \left[ \frac{d}{dt} V(\xi(t, \mathbf{x})) \right]_{t=0} = \\ &= \left\{ \frac{d}{dt} \int_t^{\infty} \|\xi(\tau, \mathbf{x})\|^2 d\tau \right\}_{t=0} = \\ &= - \|\xi(t, \mathbf{x})\|^2 \Big|_{t=0} = - \|\mathbf{x}\|^2. \end{aligned} \quad (4.10.7)$$

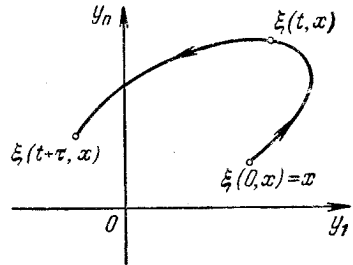


Рис. 37.

Найдем теперь производную по времени  $t$  функции  $V(\mathbf{x})$  в точке  $\mathbf{x}$  в силу системы (a). Имеем

$$\begin{aligned} \dot{V}_a(\mathbf{x}) &= (\text{grad } V, A\mathbf{x}) + (\text{grad } V, \varphi(t, \mathbf{x})) = \\ &= \dot{V}_b(\mathbf{x}) + (\text{grad } V, \varphi(t, \mathbf{x})). \end{aligned} \quad (4.10.8)$$

Полагая

$$S = [S_{jk}] \text{ и } \mathbf{x} = \text{colon}(x_1, \dots, x_n),$$

из формулы (4.10.6) находим

$$V(\mathbf{x}) = \sum_{j, k} S_{jk} x_j x_k \quad (S_{jk} = S_{kj}).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \text{grad } V &= \text{colon} \left( \frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right) = \\ &= 2 \text{colon} \left( \sum_k S_{1k} x_k, \dots, \sum_k S_{nk} x_k \right) = 2S\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Кроме того, из условия (4.10.1) получаем

$$\|\varphi(t, \mathbf{x})\| < \varepsilon \|\mathbf{x}\| \quad (4.10.9)$$

при  $\|x\| \leq h_\varepsilon < H$ , где  $\varepsilon > 0$  произвольно мало. Следовательно, из формулы (4.10.8), учитывая соотношение (4.10.7) и используя неравенство Коши, имеем

$$\begin{aligned} \dot{V}_a(x) &\leq -\|x\|^2 + |(\text{grad } V, \varphi(t, x))| \leq \\ &\leq -\|x\|^2 + 2\|S\|\|x\|\varepsilon\|x\| = \\ &= -\|x\|^2(1 - 2\varepsilon\|S\|) < -\frac{1}{2}\|x\|^2 < 0, \quad (4.10.10) \end{aligned}$$

если только  $0 < \varepsilon < \frac{1}{4\|S\|}$  и  $0 < \|x\| < h_\varepsilon$ , причем  $\dot{V}_a(0) = 0$ .

Таким образом, для системы (а) в некоторой окрестности точки  $O$  существует положительно определенная функция  $V(x)$ , не зависящая от времени  $t$  и допускающая отрицательно определенную производную  $\dot{V}_a(x)$ , в силу этой системы.

На основании второй теоремы Ляпунова (§ 4) тривиальное решение  $x=0$  системы (а) асимптотически устойчиво в смысле Ляпунова при  $t \rightarrow +\infty$ .

*Следствие.* В условиях теоремы тривиальное решение  $x=0$  экспоненциально устойчиво при  $t \rightarrow \infty$  (см. теорему из § 8).

*Замечание.* Доказательство теоремы можно получить также с помощью метода вариации произвольной постоянной, исходя из формулы

$$x(t) = \Xi(t)x(0) + \int_0^t \Xi(t-\tau)\varphi(\tau, x(\tau))d\tau$$

и применяя неравенство Гронуолла—Беллмана (ср. с теоремой 2 из § 12 гл. II).

Из теоремы Ляпунова, в частности, вытекают достаточные условия устойчивости состояния равновесия.

Пусть нелинейная автономная система имеет вид

$$\frac{dy}{dt} = f(y), \quad (4.10.11)$$

где

$$f(y) \in C^2 (\|y\| < H).$$

Если

$$f(y_0) = 0 \quad (\|y_0\| < H),$$

то  $y=y_0$  есть состояние равновесия системы (4.10.11). Положим

$$y = y_0 + x.$$



Тогда

$$f(y) = f(y_0) + f'(y_0)x + o(\|x\|) = Ax + o(\|x\|),$$

где

$$A = f'(y_0) = [f'_{jk}(y_0)]$$

— матрица Якоби.

Принимая  $x$  — отклонение вектора  $y$  от положения равновесия  $y_0$  — за новую переменную, будем иметь

$$\frac{dx}{dt} = Ax + o(\|x\|). \quad (4.10.12)$$

На основании теоремы Ляпунова имеем следующий результат.

**Теорема.** Если все собственные значения матрицы Якоби  $f'(y_0)$  имеют отрицательные вещественные части, то состояние равновесия  $y = y_0$  нелинейной автономной системы (4.10.11) асимптотически устойчиво по Ляпунову при  $t \rightarrow \infty$ .

**Пример.** Уравнение нелинейных колебаний маятника в сопротивляющейся среде имеет вид

$$\ddot{\theta} + a\dot{\theta} + b \sin \theta = 0,$$

где  $\theta$  — угловая координата (рис. 38), а  $a, b$  — положительные постоянные. Отсюда получаем систему

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \omega, \\ \frac{d\omega}{dt} &= -a\omega - b \sin \theta. \end{aligned} \right\} \quad (4.10.13)$$

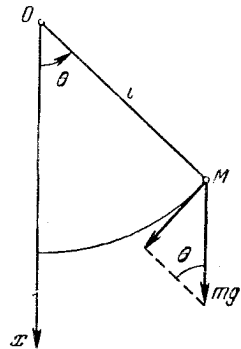


Рис. 38.

Исследуем устойчивость состояния равновесия:  $\theta_0 = 0, \omega_0 = 0$  системы (4.10.13). Вводя обозначения

$$y = (\theta, \omega) \text{ и } y_0 = (\theta_0, \omega_0),$$

будем иметь

$$f(y) = \begin{bmatrix} \omega \\ -a\omega - b \sin \theta \end{bmatrix}$$

и

$$f'(y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b \cos \theta & -a \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$f'(y_0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix}.$$

Отсюда получаем характеристическое уравнение

$$\det [f'(y_0) - \lambda E] = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -b & -\lambda - a \end{vmatrix} = \lambda^2 + a\lambda + b = 0.$$

Так как  $a > 0$  и  $b > 0$ , то для характеристического уравнения выполнено условие Гурвица и, следовательно, исследуемое состояние равновесия асимптотически устойчиво.

**Теорема неустойчивости.** Пусть квазилинейная система

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \varphi(t, x), \quad (4.10.14)$$

где  $A = [a_{jk}]$  — постоянная матрица и  $\varphi(t, x) \in C(I_t^+ \times \|x\| < H)$  такова, что

$$\frac{\|\varphi(t, x)\|}{\|x\|} \xrightarrow{t} 0 \text{ при } x \rightarrow 0.$$

Если хотя бы одно собственное значение  $\lambda_j = \lambda_j(A)$  ( $j = 1, \dots, n$ ) матрицы  $A$  обладает положительной вещественной частью, то тривиальное решение  $x = 0$  этой системы неустойчиво по Ляпунову при  $t \rightarrow \infty$ .

Доказательство (см. [6]). Без нарушения общности рассуждения можно положить

$$\operatorname{Re} \lambda_j(A) > 0 \quad (j = 1, \dots, m)$$

и

$$\operatorname{Re} \lambda_{m+k}(A) \leq 0 \quad (k = 1, \dots, n - m),$$

где  $1 \leq m \leq n^1$ ). Пусть  $S$  — постоянная неособенная матрица, приводящая матрицу  $A$  к почти треугольному виду (см. следствие 2 теоремы 2 из § 6 гл. I), т. е.

$$S^{-1}AS = \Lambda + B,$$

где  $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ,  $B = [b_{jk}]$ ,  $b_{jk} = 0$  при  $j \geq k$  и  $\|B\| \leq \varepsilon_0$ , причем положительное число  $\varepsilon_0$  может быть выбрано сколь угодно малым.

Произведем в системе (4.10.14) замену переменных:

$$x = e^{\alpha t} Sy, \quad (4.10.15)$$

где  $\alpha$  — положительное число такое, что

$$0 < \alpha < \min_{1 \leq j \leq m} \operatorname{Re} \lambda_j(A),$$

а матрица  $S$  и вектор  $y$ , вообще говоря, комплексные. Тогда будем иметь

$$e^{\alpha t} S \frac{dy}{dt} + e^{\alpha t} \alpha Sy = e^{\alpha t} ASy + \varphi(t, e^{\alpha t} Sy),$$

т. е.

$$\frac{dy}{dt} = (\Lambda - \alpha E)y + By + \Psi(t, y), \quad (4.10.16)$$

<sup>1)</sup> В дальнейших рассуждениях мы предполагаем, что  $m < n$ , так как при  $m = n$  доказательство теоремы очевидным образом упрощается.



Так как

$$\frac{d}{dt} |y_s|^2 = \frac{d}{dt} (y_s \bar{y}_s) = \bar{y}_s \frac{dy_s}{dt} + y_s \frac{d\bar{y}_s}{dt} \quad (s = 1, \dots, n),$$

то из уравнений (4.10.18) и (4.10.19) будем иметь

$$\dot{V}(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^m \operatorname{Re} \mu_j |y_i|^2 + \sum_{k=1}^{n-m} (-\operatorname{Re} \mu_{m+k}) |y_{m+k}|^2 + \rho(t, \mathbf{y}) \|\mathbf{y}\|^2,$$

где  $\rho(t, \mathbf{y}) = O(\varepsilon)$  (т. е.  $\rho(t, \mathbf{y})$  — величина порядка  $\varepsilon$ , равномерно относительно  $t$  и  $\mathbf{y}$ ) в области (4.10.17). Полагая

$$\beta = \min_{j, k} (\operatorname{Re} \mu_j, -\operatorname{Re} \mu_{m+k}),$$

при достаточно малом  $\varepsilon > 0$  находим

$$\dot{V}(\mathbf{y}) \geq [\beta - |\rho(t, \mathbf{y})|] \|\mathbf{y}\|^2 \geq \frac{\beta}{2} \|\mathbf{y}\|^2 \geq \beta V(\mathbf{y}).$$

Следовательно, при  $t_0 = 0$  и  $V(\mathbf{y}(0)) > 0$  получаем

$$V(\mathbf{y}(t)) \geq V(\mathbf{y}(0)) e^{\beta t},$$

т. е.

$$\|\mathbf{y}(t)\|^2 \geq 2V(\mathbf{y}(0)) e^{\beta t}, \quad (4.10.20)$$

если только

$$\|\mathbf{y}(t)\| \leq e^{-\alpha t} \|S\|^{-1} h(\varepsilon).$$

Пусть  $\delta > 0$  произвольно мало. Выберем  $\mathbf{y}(0)$  так, чтобы выполнялись неравенства

$$0 < \|\mathbf{y}(0)\| < \delta, \quad V(\mathbf{y}(0)) > 0$$

(этого можно добиться, положив, например,  $y_{m+k} = 0$  ( $k = 1, \dots, n - m$ )). Тогда из неравенства (4.10.20) вытекает, что существует момент  $t_1 > 0$  такой, что

$$\|\mathbf{y}(t_1)\| \geq e^{-\alpha t_1} \|S\|^{-1} h(\varepsilon).$$

Возвращаясь к прежней переменной  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ , в силу формулы (4.10.15) будем иметь  $\|\mathbf{x}(0)\| \leq \|S\| \|\mathbf{y}(0)\| < \|S\| \delta$  и

$$\|\mathbf{x}(t_1)\| \geq \frac{e^{\alpha t_1}}{\|S^{-1}\|} \|\mathbf{y}(t_1)\| \geq \frac{\|S\|^{-1}}{\|S^{-1}\|} h(\varepsilon),$$

где  $\varepsilon > 0$  фиксировано. Так как  $\delta > 0$  произвольно мало, то отсюда следует, что тривиальное решение  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  квазилинейной системы (4.10.14) неустойчиво по Ляпунову при  $t \rightarrow \infty$ .

Теорема доказана.

## § 11. Оценка матрицы Коши для правильной системы

Пусть действительная линейная система

$$\text{где} \quad \frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad (4.11.1)$$

$$A(t) \in C[t_0, \infty), \quad \sup_t \|A(t)\| < \infty,$$

есть правильная (гл. III, § 10) и

$$X(t) = [x_{jk}(t)] \quad (4.11.2)$$

— ее нормальная фундаментальная матрица. Обозначим через  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  характеристические показатели решений

$$x^{(k)} = \text{столб} [x_{1k}(t), \dots, x_{nk}(t)] \quad (k = 1, \dots, n),$$

входящих в фундаментальную систему (1). Полагая

$$\Delta = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n),$$

будем иметь

$$\Phi(t) = X(t)e^{-t\Delta} = \begin{bmatrix} x_{11}(t)e^{-\alpha_1 t} & \dots & x_{1n}(t)e^{-\alpha_n t} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{n1}(t)e^{-\alpha_1 t} & \dots & x_{nn}(t)e^{-\alpha_n t} \end{bmatrix}.$$

Отсюда

$$\chi[\Phi(t)] = \max_{j,k} \chi[x_{jk}(t)e^{-\alpha_k t}] = 0. \quad (4.11.3)$$

Аналогично, учитывая, что в силу теоремы Перрона (гл. III, § 11) для обратной матрицы

$$X^{-1}(t) = [y_{jk}(t)]$$

ее векторы-строки

$$y^{(j)} = [y_{j1}(t), \dots, y_{jn}(t)]$$

имеют характеристические показатели  $\chi[y^{(j)}] = -\alpha_j$ , находим

$$\Phi^{-1}(t) = e^{t\Delta}X^{-1}(t) = \begin{bmatrix} e^{\alpha_1 t}y_{11}(t) & \dots & e^{\alpha_1 t}y_{1n}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ e^{\alpha_n t}y_{n1}(t) & \dots & e^{\alpha_n t}y_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

и

$$\chi[\Phi^{-1}(t)] = \max_{j,k} \chi[e^{\alpha_j t}y_{jk}(t)] = 0. \quad (4.11.4)$$

Рассмотрим теперь матрицу Коши

$$K(t, \tau) = X(t)X^{-1}(\tau)$$

в области  $t_0 \leq \tau \leq t$  (рис. 39). Очевидно имеем

$$K(t, \tau) = X(t) e^{-t\Delta} e^{-(\tau-t)\Delta} e^{\tau\Delta} X^{-1}(\tau) = \Phi(t) e^{t-\tau\Delta} \Phi^{-1}(\tau). \quad (4.11.5)$$

Отсюда, учитывая равенства (4.11.3) и (4.11.4), получаем

$$\begin{aligned} \|K(t, \tau)\| &\leq \|\Phi(t)\| \|e^{t-\tau\Delta}\| \|\Phi^{-1}(\tau)\| \leq \\ &\leq c e^{\frac{\varepsilon}{2}t} e^{(\bar{\alpha} + \frac{\varepsilon}{2})(t-\tau)} e^{\frac{\varepsilon}{2}\tau} = c e^{(\bar{\alpha} + \varepsilon)(t-\tau)} e^{\varepsilon\tau}, \end{aligned} \quad (4.11.6)$$

где  $\bar{\alpha} = \max_k \alpha_k$ ,  $\varepsilon > 0$  произвольно и  $c$  — положительная постоянная, зависящая только от  $\varepsilon$  и  $t_0$ .

Пусть

$$\alpha > \bar{\alpha} = \max_k \alpha_k.$$

Тогда  $\varepsilon > 0$  можно выбрать столь малым, чтобы имело место неравенство

$$\bar{\alpha} + \varepsilon < \alpha,$$

и из неравенства (4.11.6) при  $t_0 \leq \tau \leq t$  получаем

$$\|K(t, \tau)\| \leq c(t_0) e^{\alpha(t-\tau)} e^{\varepsilon\tau}.$$

*Следствие. Если все характеристические показатели  $\alpha_k$  правильной линейной системы (4.11.1) отрицательны, то для ее матрицы Коши при  $t_0 \leq \tau \leq t$  справедлива оценка:*

$$\|K(t, \tau)\| \leq c(t_0) e^{\varepsilon\tau}, \quad (4.11.7)$$

где  $\varepsilon$  — любое положительное число.

## § 12. Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению

Рассмотрим действительную нелинейную систему

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t, x), \quad (4.12.1)$$

где

$$A(t) \in C[t_0, \infty), \sup_t \|A(t)\| < \infty, \text{ и } f(t, x) \in C_{tx}^{(0,1)}$$

$$(t_0 \leq t < \infty, \|x\| < h),$$

причем

$$\|f(t, x)\| \leq \psi(t) \|x\|^m \quad (m > 1) \quad (4.12.2)$$

и  $\psi(t)$  — непрерывная положительная функция при  $t_0 \leq t < \infty$  такая, что<sup>1)</sup>

$$\chi[\psi(t)] = 0.$$

Норма матрицы  $A = [a_{jk}]$  здесь понимается в смысле I нормы (гл. I, § 4):

$$\|A\| = \max_j \sum_k |a_{jk}|.$$

**Теорема (критерий Ляпунова).** Если система первого приближения

$$\frac{d\xi}{dt} = A(t)\xi \quad (4.12.3)$$

правильная (см. гл. III, § 11) и все ее характеристические показатели  $\alpha_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) отрицательны, причем выполнено условие нелинейности (4.12.2), то тривиальное решение  $x = 0$  полной нелинейной системы (4.12.1) экспоненциально устойчиво по Ляпунову при  $t \rightarrow +\infty$ .

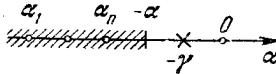


Рис. 40.

Доказательство (см. [14]). Пусть

$$\alpha_k \leq -\alpha < 0 \quad (k = 1, \dots, n). \quad (4.12.4)$$

В системе (4.12.1) выполним преобразование

$$x = ye^{-\gamma(t-t_0)}, \quad (4.12.5)$$

где  $0 < \gamma < \alpha$  (рис. 40). Тогда будем иметь

$$\frac{dy}{dt} = B(t)y + g(t, y), \quad (4.12.6)$$

где

$$B(t) = A(t) + \gamma E \quad (4.12.7)$$

и

$$g(t, y) = e^{\gamma(t-t_0)} f(t, ye^{-\gamma(t-t_0)}), \quad (4.12.8)$$

<sup>1)</sup> При формулировке Ляпунова  $\psi(t)$  — положительная постоянная.

причем

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{y}(t_0) \text{ и } \mathbf{g}(t, \mathbf{y}) \in C_{ty}^{0,1}(t_0 \leq t < \infty, \|\mathbf{y}\| < h e^{\gamma(t-t_0)}).$$

Легко видеть, что для системы (4.12.6) система первого приближения

$$\frac{d\boldsymbol{\eta}}{dt} = B(t) \boldsymbol{\eta} \quad (4.12.9)$$

правильная. Действительно, пусть  $\beta_k (k=1, \dots, n)$  — характеристические показатели линейной системы (4.12.9). Очевидно,

$$\beta_k = \alpha_k + \gamma < 0 \quad (k=1, \dots, n).$$

Учитывая правильность системы (4.12.3) и формулу (4.12.7), имеем

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \text{Sp } B(t_1) dt_1 &= \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t [\text{Sp } A(t_1) + n\gamma] dt_1 = \sum_k \alpha_k + n\gamma = \sum_k \beta_k. \end{aligned}$$

Следовательно, система (4.12.9) правильная.

Пусть  $H(t)$  ( $H(t_0) = E$ ) — нормированная фундаментальная матрица системы (4.12.9). Используя метод вариаций произвольных постоянных, нелинейное дифференциальное уравнение (4.12.6) при начальных условиях:  $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{x}_0$  — можно заменить равносильным интегральным уравнением

$$\mathbf{y}(t) = H(t) \mathbf{y}(t_0) + \int_{t_0}^t K(t, \tau) \mathbf{g}(\tau, \mathbf{y}(\tau)) d\tau, \quad (4.12.10)$$

где

$$K(t, \tau) = H(t) H^{-1}(\tau).$$

Согласно локальной теореме существования решений, для любой пары  $(t_0, \mathbf{x}_0)$ , где  $\|\mathbf{x}_0\| < h$ , существует решение  $\mathbf{y}(t)$  дифференциального уравнения (4.12.6), а следовательно, и интегрального уравнения (4.12.10), удовлетворяющее начальному условию:

$$\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0,$$

определенное в некотором интервале  $t_0 \leq t < t_0 + l$ , причем  $\|\mathbf{y}(t)\| < h$  при  $t \in [t_0, t_0 + l]$  и число  $l$ , вообще говоря, зависит от решения  $\mathbf{y}(t)$ .



Так как все характеристические показатели  $\beta_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) линейной системы (4.12.9) отрицательны, то существует положительная постоянная  $c_1$  такая, что

$$\|H(t)\| < c_1 \text{ при } t_0 \leq t < \infty \quad (c_1 \geq 1). \quad (4.12.11)$$

Кроме того, на основании оценки матрицы Коши  $K(t, \tau)$  для правильной системы с отрицательными характеристическими показателями (§ 11, следствие) имеем

$$\|K(t, \tau)\| < c_2 e^{\gamma(\tau - t_0)} \quad (4.12.12)$$

при  $t_0 \leq \tau \leq t < \infty$ .

Далее, на основании формул (4.12.8) и (4.12.2) при  $t_0 \leq t < t_0 + l$  получаем

$$\|g(t, y)\| = e^{\gamma(t-t_0)} \|f(t, ye^{-\gamma(t-t_0)})\| < c_3 e^{\delta - (m-1)\gamma(t-t_0)} \|y\|^m,$$

где  $c_3$  — достаточно большая положительная постоянная. Отсюда, оценивая по норме при  $t_0 \leq t < t_0 + l$  левую и правую части интегрального уравнения (4.12.10), будем иметь

$$y(t) \leq \|H(t)\| \|y(t_0)\| + \int_{t_0}^t \|K(t, \tau)\| \|g(\tau, y(\tau))\| d\tau,$$

или

$$\|y(t)\| \leq c_1 \|y(t_0)\| + \int_{t_0}^t c_2 c_3 e^{\delta - (m-1)\gamma(\tau-t_0)} \|y(\tau)\|^m d\tau. \quad (4.12.13)$$

Выберем положительное число  $\varepsilon$  столь малым, чтобы имело место неравенство

$$\delta = (m-1)\gamma - 2\varepsilon > 0.$$

Тогда из неравенства (4.12.13) при  $t_0 \leq t < t_0 + l$  выводим

$$\|y(t)\| \leq c_1 \|y(t_0)\| + \int_{t_0}^t c_4 e^{-\delta(\tau-t_0)} \|y(\tau)\|^m d\tau, \quad (4.12.14)$$

где

$$c_4 = c_2 c_3.$$

Из неравенства (4.12.14), используя лемму Бихари (следствие 2 из § 2 гл. II), находим

$$\|y(t)\| \leq \frac{c_1 \|y(t_0)\|}{\left[1 - (m-1) c_1^{m-1} \|y(t_0)\|^{m-1} \int_{t_0}^t c_4 e^{-\delta(\tau-t_0)} d\tau\right]^{\frac{1}{m-1}}}, \quad (4.12.15)$$

если только

$$(m-1)c_1^{m-1} \| \mathbf{y}(t_0) \|^{m-1} \int_{t_0}^t c_4 e^{-\delta(\tau-t_0)} d\tau < 1. \quad (4.12.16)$$

Так как

$$\int_{t_0}^t e^{-\delta(\tau-t_0)} d\tau < \frac{1}{\delta} < \infty,$$

то неравенство (4.12.16) всегда можно считать выполненным за счет выбора окрестности начальных данных  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{y}(t_0)$ . Из формулы (4.12.15) следует, что если  $\| \mathbf{y}(t_0) \|$  достаточно мало, то при любом  $t \in [t_0, t_0 + l)$  точка  $\mathbf{y}(t)$  является внутренней точкой области  $Z = \{t_0 \leq t < \infty, \| \mathbf{y} \| \leq \frac{h}{2} < h\}$  и, следовательно, решение  $\mathbf{y}(t)$  бесконечно продолжаемо вправо, т. е. можно положить  $l = \infty$ . Таким образом, в бесконечном промежутке  $t_0 \leq t < \infty$  выполнено неравенство

$$\| \mathbf{y}(t) \| \leq N \| \mathbf{y}(t_0) \| < \frac{h}{2}, \quad (4.12.17)$$

где  $N$  — некоторая постоянная, зависящая от начального момента  $t_0$ .

Возвращаясь к переменной  $\mathbf{x}$ , в силу формулы (4.12.5) при  $t_0 \leq t < \infty$  и  $\| \mathbf{x}(t_0) \| < \Delta < h$  будем иметь

$$\| \mathbf{x}(t) \| \leq N \| \mathbf{x}(t_0) \| e^{-\gamma(t-t_0)}, \quad (4.12.18)$$

где постоянная  $\Delta$  достаточно мала.

Отсюда следует, что тривиальное решение  $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$  нелинейной системы (4.12.1) экспоненциально устойчиво по Ляпунову при  $t \rightarrow \infty$ .

Теорема доказана.

*Следствие.* Любое решение  $\mathbf{x}(t)$  нелинейной дифференциальной системы (4.12.1) с начальными данными  $\mathbf{x}(t_0)$ , принадлежащими достаточно малой окрестности  $\| \mathbf{x}(t_0) \| < \Delta$ , имеет характеристический показатель, удовлетворяющий неравенству

$$\chi[\mathbf{x}(t)] \leq \max_k \alpha_k, \quad (4.12.19)$$

где  $\alpha_k$  — характеристические показатели соответствующей линейной системы (4.12.3).

Действительно, из неравенства (4.12.18) получаем

$$\chi[\mathbf{x}(t)] \leq -\gamma,$$

а так как число  $-\gamma$  может быть выбрано сколь угодно близким к  $\max_k \alpha_k$ , то отсюда следует неравенство (4.12.19).

### § 13. Признак устойчивости для нелинейных систем с неправильной линейной частью

Рассмотрим действительную линейную однородную систему

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad (4.13.1)$$

где  $A(t) \in C[t_0, \infty)$ ,  $\sup_t \|A(t)\| < \infty$ , и пусть  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  — ее характеристические показатели.

Определение. Число

$$\alpha = \sum_{k=1}^n \alpha_k - \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \text{Sp } A(t_1) dt_1 \quad (4.13.2)$$

называется *мерой неправильности* системы (4.13.1) (см. [15]).

В силу неравенства Ляпунова (гл. III, § 7)

$$\sum_k \alpha_k \geq \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \text{Sp } A(t_1) dt_1$$

из формулы (4.13.2) получаем

$$\alpha \geq \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \text{Sp } A(t_1) dt_1 - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \text{Sp } A(t_1) dt_1 \geq 0.$$

Очевидно, что система (4.13.1) правильная тогда и только тогда, когда  $\alpha = 0$ .

Обобщением критерия Ляпунова для неправильных систем занимался Н. Г. Четаев. Мы приведем результат Массера (см. [44]), обобщающий теорему Ляпунова (§ 12) и Четаева (см. [15]).

Теорема Массера. Пусть дана нелинейная система

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + f(t, y), \quad (4.13.3)$$

где  $A(t) \in C[t, \infty)$ ,  $\sup_t \|A(t)\| < \infty$  и  $f(t, y) \in C_{t,y}^{(m-1)}$  ( $t_0 \leq t < \infty$ ,  $\|y\| < h$ ), причем  $f(t, 0) \equiv 0$ .

Если

1)  $\|f(t, y)\| \leq \psi(t) \|y\|^m$  ( $m > 1$ ),

где  $\psi(t)$  — положительная функция такая, что  $\gamma[\psi(t)] = 0$ ,

2) для характеристических показателей  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  линейного приближения (4.13.1) выполнено неравенство

$$\max_k \alpha_k < -\frac{\alpha}{m-1} \leq 0,$$

где  $\alpha$  — мера неправильности соответствующей линейной системы (4.13.1),

то тривиальное решение  $\mathbf{y} \equiv 0$  нелинейной системы (4.13.3) асимптотически устойчиво по Ляпунову при  $t \rightarrow \infty$ .

Доказательство. Пусть

$$D = \text{diag} (\alpha_1 + \gamma, \dots, \alpha_n + \gamma),$$

где (рис. 41)

$$\frac{\alpha}{m-1} < \gamma < -\alpha, \quad \alpha = \max_k \alpha_k. \quad (4.13.4)$$

Положим

$$\mathbf{y} = X(t) e^{-Dt} \mathbf{z}, \quad (4.13.5)$$

где  $X(t) = [x_{jk}(t)]$  — нормированная фундаментальная матрица

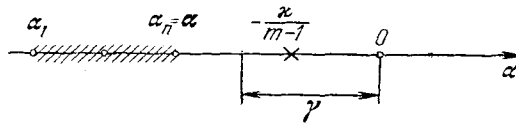


Рис. 41.

линейной системы (4.13.1) ( $X(t_0) = E$ ). В силу (4.13.3) имеем

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{y}}{dt} &\equiv X(t) e^{-Dt} \frac{d\mathbf{z}}{dt} + \dot{X}(t) e^{-Dt} \mathbf{z} - X(t) e^{-Dt} D\mathbf{z} = \\ &= A(t) X(t) e^{-Dt} \mathbf{z} + \mathbf{f}(t, X(t) e^{-Dt} \mathbf{z}). \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая, что

$$\dot{X}(t) = A(t) X(t),$$

получим

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = D\mathbf{z} + \mathbf{g}(t, \mathbf{z}), \quad (4.13.6)$$

где

$$\mathbf{g}(t, \mathbf{z}) = e^{Dt} X^{-1}(t) \mathbf{f}(t, X(t) e^{-Dt} \mathbf{z}). \quad (4.13.7)$$

Как известно,

$$X^{-1}(t) = \frac{1}{\Delta(t)} [\Delta_{kj}(t)],$$

где

$$\Delta(t) = \det X(t)$$

и  $\Delta_{jk}(t)$  — соответствующие алгебраические дополнения определителя  $\Delta(t)$ . На основании формулы Остроградского — Лиувилля, учитывая, что  $\Delta(t_0) = 1$ , находим

$$\Delta(t) = e^{\int_{t_0}^t \text{Sp } A(t_1) dt_1}$$

Следовательно,

$$X^{-1}(t) = [\Delta_{kj}(t) e^{-\int_{t_0}^t \text{Sp } A(t_1) dt_1}].$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \chi[e^{Dt} X^{-1}(t)] &= \chi[e^{(\alpha_j + \gamma)t} \Delta_{kj}(t) e^{-\int_{t_0}^t \text{Sp } A(t_1) dt_1}] \leq \\ &\leq \max_{i, k} [\alpha_j + \gamma + \sum_k \alpha_k - \alpha_j - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \text{Sp } A(t_1) dt_1] = \alpha + \gamma \quad (4.13.8) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \chi[X(t) e^{-Dt}] &= \chi\{[x_{jk}(t) e^{-\alpha_k + \gamma t}]\} \leq \\ &\leq \max_{i, k} [x_k - (\alpha_k + \gamma)] = -\gamma. \quad (4.13.9) \end{aligned}$$

Так как

$$\chi[X(t) e^{-Dt}] < 0,$$

то

$$X(t) e^{-Dt} \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow +\infty. \quad (4.13.10)$$

Следовательно,

$$\|X(t) e^{-Dt}\| \leq M < \infty \text{ при } t_0 \leq t < \infty.$$

Положим

$$\|z\| < \frac{h}{M}.$$

Тогда на основании формулы (4.13.5) получим

$$\|y\| \leq \|X(t) e^{-Dt}\| \|z\| \leq M \cdot \frac{h}{M} = h.$$

Оценим нелинейный член в правой части уравнения (4.13.6) при  $\|z\| < \frac{h}{M}$ . Используя условие 1), имеем

$$\begin{aligned} \|g(t, z)\| &\leq \|e^{Dt} X^{-1}(t)\| \|f(t, X(t) e^{-Dt} z)\| \leq \\ &\leq \|e^{Dt} X^{-1}(t)\| \|\psi(t)\| \|X(t) e^{-Dt}\|^m \|z\|^m = \varphi(t) \|z\|^m, \quad (4.13.11) \end{aligned}$$

где в силу неравенств (4.13.8) и (4.13.9) и свойств характеристических показателей справедлива оценка:

$$\begin{aligned} \chi[\varphi(t)] &= \chi[\|e^{Dt} X^{-1}(t)\| \|\psi(t)\| \|X(t) e^{-Dt}\|^m] \leq \\ &\leq \alpha + \gamma + 0 - m\gamma = \alpha - (m-1)\gamma. \end{aligned}$$

Отсюда на основании неравенства (4.13.4) получаем

$$\chi[\varphi(t)] < 0.$$

Следовательно,

$$\|g(t, z)\| \leq c \|z\|^m \quad (m > 1) \quad \text{при } t_0 \leq t < +\infty \quad \text{и} \quad \|z\| < \frac{h}{M}. \quad (4.13.12)$$

Таким образом, нелинейная система (4.13.6) удовлетворяет условиям теоремы Ляпунова об устойчивости квазилинейных систем (§ 10) и, следовательно, тривиальное решение ее  $z \equiv 0$  асимптотически устойчиво при  $t \rightarrow +\infty$ . В силу формулы (4.13.5) и неравенства (4.13.9) это будет верно также для тривиального решения  $y \equiv 0$  исходной нелинейной системы (4.13.3).

*Следствие.* Для характеристических показателей решений  $y(t)$ , где  $\|y(t_0)\|$  достаточно мала, справедлива оценка:

$$\chi[y(t)] \leq \max_k z_k. \quad (4.13.13)$$

Действительно, из формулы (4.13.5), учитывая неравенство (4.13.9) и ограниченность функции  $z(t)$ , получаем

$$\chi[y(t)] \leq -\gamma.$$

А так как число  $-\gamma$  можно брать сколь угодно близким к  $\max_k z_k$ , то справедливо неравенство (4.13.13).

## § 14. Неограниченная продолжаемость решений

Рассмотрим действительную систему

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad (4.14.1)$$

где

$$f(t, y) \in C_{ty}^{(0,1)}(I_t^+ \times \mathbb{R}^n).$$

Для произвольного решения  $y(t) \equiv y(t; t_0, y_0)$  ( $t_0 \in I_t^+$ ) справедливы две возможности: 1) либо  $y(t)$  имеет смысл на бесконечном промежутке  $[t_0, \infty)$ ; тогда оно будет неограниченно продолжаемым вправо; 2) либо  $y(t)$  определено лишь на некотором конечном промежутке  $t_0 \leq t < T < \infty$ .

*Лемма.* Если решение  $y(t)$  имеет конечное время определения  $t_0 \leq t < T < \infty$ , то

$$\|y(t)\| \rightarrow \infty \quad \text{при } t \rightarrow T - 0.$$

*Доказательство.* Пусть  $\|y(t)\| \not\rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow T - 0$ . Тогда существует последовательность  $t_k \rightarrow T - 0$  такая, что  $y(t_k) \rightarrow z \neq \infty$

при  $k \rightarrow \infty$ . Рассмотрим решение  $z(t) = z(t; T, z)$  (рис. 42), определенное, согласно локальной теореме существования решений (см. [11]), в некотором интервале

$$(T - \alpha, T + \alpha) \quad (\alpha > 0).$$

В силу свойства единственности решений, при  $t_k > T - \frac{\alpha}{4}$  имеем

$$y(t; t_k, y(t_k)) \equiv y(t; t_0, y_0)$$

и

$$z(t; t_k, z(t_k)) \equiv z(t; T, z).$$

Так как  $y(t_k)$  может быть выбрано сколь угодно близко к  $z$  и  $t_k \rightarrow T$ , то при достаточно большом  $k$  точки  $y(t_k)$  и  $z(t_k)$  сколь

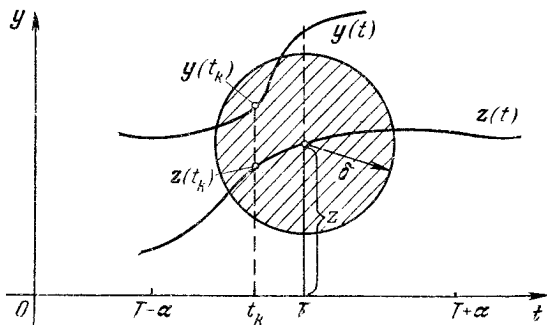


Рис. 42.

угодно близки между собой (см. рис. 42). А тогда на основании свойства интегральной непрерывности (гл. II, § 1) получим, что решение  $y(t; t_0, y_0)$  определено во всяком случае на промежутке  $(t_k, t_k + \frac{\alpha}{2}) \supset (T, T + \frac{\alpha}{4})$ . А это противоречит максимальной промежутку  $[t_0, T)$  существования решения  $y(t)$  при  $t \geq t_0$ . Таким образом,  $\|y(t)\| \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow T - 0$ .

Лемма доказана.

*Следствие.* Если решение  $y = y(t; t_0, y_0)$  ограничено в своем максимальном промежутке существования  $t_0 \leq t < t_0 + T$ , то оно бесконечно продолжаемо вправо, т. е.  $T = \infty$ .

Неограниченная продолжаемость вправо решений системы (4.14.1) является необходимым условием устойчивости по Ляпунову решений этой системы. Используя функции, аналогичные функциям Ляпунова (§ 5, замечание 2), можно получить достаточные условия неограниченной продолжаемости при  $t \rightarrow +\infty$  решений системы (4.14.1).

Следуя Ла-Саллю [45], рассмотрим дифференциальное неравенство

$$\dot{v} \leq G(t, v) \quad (t \geq t_0), \quad (4.14.2)$$

где  $G(t, v)$  — некоторая непрерывная скалярная функция, определенная при  $t \geq t_0$  и  $v \in \mathcal{R}^1$ , а  $v = v(t)$  — непрерывно дифференцируемая положительная скалярная функция.

Будем говорить, что решение  $v(t) \in C^1$  неравенства (4.14.2) имеет конечное время определения  $t_0 \leq t < T$ , если: 1)  $\dot{v}(t) \leq G(t, v)$  при  $t_0 \leq t < T$  и 2)  $\|v(t)\| \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow T - 0$ .

Теорема Ла-Салля.  
Пусть

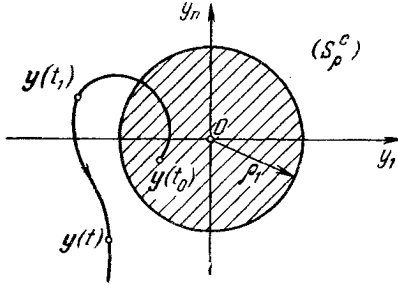


Рис. 43.

$$S_\rho^c = \{\|y\| \geq \rho\} \subset \mathcal{R}_y^n$$

— внешность сферы радиуса  $\rho$  и

$$V(t, y) \in C_{ty}^{(1, 1)}(I_t^+ \times S_\rho^c),$$

причем  $V(t, y) \xrightarrow{t} \infty$  при  $\|y\| \rightarrow \infty$ , равномерно на каждом конечном промежутке  $(a, b) \subset I_t^+$ .

Тогда, если

1) производная  $\dot{V}(t, y)$  по  $t$  в силу системы (4.14.1) при  $t \geq t_0$  и  $y \in S_\rho^c$  удовлетворяет неравенству

$$\dot{V}(t, y) \leq G(t, V(t, y)), \quad (4.14.3)$$

где  $G(t, v)$  — непрерывная скалярная функция;

2) соответствующее скалярное неравенство (4.14.2) не имеет положительных решений  $v(t)$  с конечным временем определения, то каждое решение  $y = y(t)$  системы (4.14.1) неограниченно продолжаемо вправо.

Доказательство. Допустим, что некоторое решение  $y(t)$  системы (4.14.1) имеет конечное время определения  $t_0 \leq t < T < \infty$ . Тогда в силу леммы  $\|y(t)\| \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow T - 0$ , следовательно, при  $t \in (t_1, T)$ , где  $t_1 > t_0$ , решение  $y(t)$  целиком будет содержаться в некоторой области  $S_{\rho_1}^c$  (рис. 43), где  $\rho_1 > \rho$ . Кроме того, можно предполагать, что  $V(t, y) > 0$  при  $(t, y) \in [t_0, T] \times S_{\rho_1}^c$ . Но тогда на основании неравенства (4.14.3) функция

$$v(t) = V(t, y(t))$$

является положительным решением скалярного неравенства (4.14.2)



с конечным временем определения  $t_0 \leq t < T$  ( $v(T) = \infty$ ). А это невозможно в силу условия 2) теоремы.

Теорема доказана.

Следствие. Пусть

$$G(t, v) = k(t) L(v),$$

где  $k(t) \geq 0$  и  $L(v) > 0$  — скалярные функции, непрерывные при  $t \geq t_0$ .

Если

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{dv}{L(v)} = +\infty,$$

то неравенство (4.14.2) не имеет положительных решений  $v(t)$  с конечным временем определения.

Действительно, пусть существует положительное решение  $v(t)$  ( $t_0 \leq t < T$ ) неравенства

$$\frac{dv}{dt} \leq k(t) L(v) \tag{4.14.4}$$

такое, что  $\|v(T)\| = \infty$ . Из неравенства (4.14.4) находим

$$\int_{v(t_0)}^{v(t)} \frac{dv}{L(v)} \leq \int_{t_0}^t k(\tau) d\tau. \tag{4.14.5}$$

Отсюда при  $t \rightarrow T - 0$  получаем, что левая часть неравенства (4.14.5) стремится к  $+\infty$ , а правая — ограничена, что, очевидно, невозможно. Следовательно, каждое положительное решение  $v(t)$  неравенства (4.14.4) или имеет смысл лишь на некотором конечном промежутке  $[t_0, T)$ , причем  $\|v(t)\| \not\rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow T - 0$ , или же оно определено на бесконечном промежутке  $t_0 \leq t < \infty$ .

Пример. Рассмотрим действительную систему (см. [45])

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x), \tag{4.14.6}$$

где

$$X(t, x) \in C_{tx}^{(0,1)}(I_t^+ \times \mathcal{E}_x^n).$$

Если

$$\|X(t, x)\| \leq k(t) \|x\| \tag{4.14.7}$$

при  $\|x\| \geq r$ , где  $k(t) \in C(I_t^+)$  — неотрицательная скалярная функция, то все решения  $x(t)$  системы (4.14.6) неограниченно продолжаемы вправо.

Действительно, положим

$$V(x) = \|x\|^2 \equiv (x, x).$$

Отсюда

$$\dot{V}(x) = \left( \frac{dx}{dt}, x \right) + \left( x, \frac{dx}{dt} \right) = 2x^T X(t, x).$$

Используя неравенство Коши (гл. I, § 5) и неравенство (4.14.7), будем иметь

$$\dot{V}(x) \leq 2 \|x^T\| \|X(t, x)\| \leq 2k(t) V(x) \equiv G(t, V(x))$$

при  $t \geq t_0$  и  $\|x\| \geq \rho$ . Но неравенство

$$\dot{v}(t) \leq 2k(t)v(t)$$

в силу следствия ( $L(v) = 2v$ ) не имеет положительных решений с конечным временем определения. Следовательно, на основании теоремы Ла-Салля каждое решение  $x(t)$  системы (4.14.6) имеет смысл при  $t_0 \leq t < \infty$ .

## § 15. Устойчивость по Лагранжу

Рассмотрим систему

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad (4.15.1)$$

где  $f(t, y) \in C_{ty}^{(0,1)}(I_t^+ \times \mathcal{R}_y^n)$  и  $I_t^+ = \{a < t < \infty\}$ . Очевидно, система (4.15.1) обладает свойством единственности решений  $y(t; t_0, y_0)$ , где  $t_0 \in I_t^+$  и  $y_0 \in \mathcal{R}_y^n$ .

**Определение.** Будем говорить, что система (4.15.1) *устойчива по Лагранжу* (см. [12], [45]), если: 1) каждое решение  $y(t; t_0, y_0)$ , где  $t_0 \in I_t^+$ , неограниченно продолжаемо вправо, т. е. имеет смысл при  $t_0 \leq t < \infty$ ; 2)  $\|y(t; t_0, y_0)\|$  ограничена на  $[t_0, \infty)$ .

Например, если система (4.15.1) имеет ограниченное решение  $\eta(t)$ , асимптотически устойчивое в целом (§ 7), то эта система устойчива по Лагранжу.

Используя функции Ляпунова, нетрудно сформулировать необходимые и достаточные условия устойчивости системы (4.15.1) по Лагранжу (см. [41], [46]).

**Теорема.** Для того чтобы система (4.15.1) была устойчива по Лагранжу, необходимо и достаточно, чтобы в  $I_t^+ \times \mathcal{R}_y^n$  существовала функция  $V(t, y)$  такая, что

- 1)  $V(t, y) \geq W(y)$ , где  $W(y) \rightarrow \infty$  при  $\|y\| \rightarrow \infty$ ;
- 2) для каждого решения  $y(t; t_0, y_0)$  функция  $V(t, y(t; t_0, y_0))$  была невозрастающей относительно переменной  $t$ .

**Замечание.** Для случая достаточности условие 2) можно заменить следующим:

- 2')  $\dot{V}(t, y) \leq 0$  в силу системы (4.15.1).

**Доказательство.** 1) Докажем сначала достаточность условий теоремы. Пусть для системы (4.15.1) существует функция  $V(t, y)$ , обладающая свойствами 1) и 2). Для всякого решения  $y(t; t_0, y_0)$  ( $t_0 > a$ ,  $\|y_0\| < \infty$ ) в силу условия 2) при  $t \geq t_0$  имеем

$$V(t, y(t; t_0, y_0)) \leq V(t_0, y(t_0; t_0, y_0)) = V(t_0, y_0).$$

Отсюда на основании условия 1) получаем

$$W(\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)) \leq V(t, \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)) \leq V(t_0, \mathbf{y}_0) \quad \text{при } t \geq t_0. \quad (4.15.2)$$

Из последнего неравенства следует, что решение  $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$  ограничено. Действительно, если это не так, то нашлась бы последовательность моментов времени  $t_k \rightarrow \infty$  ( $k = 1, 2, \dots; t_k \geq t_0$ ) такая, что

$$\|\mathbf{y}(t_k; t_0, \mathbf{y}_0)\| \rightarrow \infty \quad \text{при } k \rightarrow \infty$$

и, следовательно,

$$W(\mathbf{y}(t_k; t_0, \mathbf{y}_0)) \rightarrow +\infty \quad \text{при } k \rightarrow \infty,$$

вопреки неравенству (4.15.2). Таким образом, решение  $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$  неограниченно продолжаемо вправо и

$$\sup_t \|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)\| < \infty \quad (4.15.3)$$

при  $t \in [t_0, \infty)$ .

Замечание. Для этой части теоремы не требуется выполнения свойства единственности решений.

2) Докажем теперь необходимость условий теоремы. Пусть любое решение  $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$  системы (4.15.1) существует и ограничено на промежутке  $t_0 \leq t < \infty$  и, следовательно, бесконечно продолжаемо при  $t \rightarrow +\infty$ .

Положим

$$V(t, \mathbf{y}) = \sup_{\tau \geq 0} \|\mathbf{y}(t + \tau; t, \mathbf{y})\|^2, \quad (4.15.4)$$

где  $t > a$ ,  $\|\mathbf{y}\| < \infty$ .

Из формулы (4.15.4) имеем

$$\begin{aligned} V(t, \mathbf{y}) &\geq \|\mathbf{y}(t; t, \mathbf{y})\|^2 = \\ &= \|\mathbf{y}\|^2 \equiv W(\mathbf{y}), \end{aligned}$$

причем, очевидно,  $W(\mathbf{y}) \rightarrow \infty$  при  $\|\mathbf{y}\| \rightarrow \infty$ , т. е. условие 1) выполнено.

Далее, при  $a < t_1 < t_2$ , учитывая, что в силу свойства единственности решение  $\mathbf{y}(t; t_2, \mathbf{y}(t_2; t_0, \mathbf{y}_0))$  является продолжением решения  $\mathbf{y}(t; t_1, \mathbf{y}(t_1; t_0, \mathbf{y}_0))$  (рис. 44), получаем

$$\begin{aligned} V(t_1, \mathbf{y}(t_1; t_0, \mathbf{y}_0)) &= \sup_{\tau \geq 0} \|\mathbf{y}(t_1 + \tau; t_1, \mathbf{y}(t_1; t_0, \mathbf{y}_0))\|^2 \geq \\ &\geq \sup_{\tau \geq 0} \|\mathbf{y}(t_2 + \tau; t_2, \mathbf{y}(t_2; t_0, \mathbf{y}_0))\|^2 = V(t_2, \mathbf{y}(t_2; t_0, \mathbf{y}_0)). \end{aligned}$$

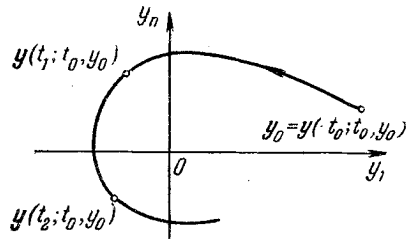


Рис. 44.

Таким образом, условие 2) также выполнено.

Теорема доказана полностью.

**З а м е ч а н и е.** Непрерывность функции  $V(t, y)$  здесь не гарантируется.

**П р и м е р.** Рассмотрим скалярное дифференциальное уравнение (см. [46])

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)f(x) = 0, \quad (4.15.5)$$

где  $p(t) \in C[0, \infty)$ ,  $q(t) \in C^1[0, \infty)$  и  $f(x) \in C(-\infty, \infty)$ .

Если выполнены условия:

- 1)  $0 < q(t) \leq M$ ;
- 2)  $p(t) \geq -\frac{\dot{q}(t)}{2q(t)}$ ;
- 3)  $\int_0^{+\infty} f(x) dx = +\infty$ ,

то решения  $x(t)$  уравнения (4.15.5) ограничены на  $[0, \infty)$  вместе со своими производными  $\dot{x}(t)$ .

Действительно, запишем уравнение (4.15.5) в виде системы

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= -p(t)y - q(t)f(x). \end{aligned} \right\} \quad (4.15.6)$$

Положим

$$V(t, x, y) = \int_0^x f(\xi) d\xi + \frac{y^2}{2q(t)}.$$

На основании неравенства 1) имеем

$$V(t, x, y) \geq \int_0^x f(\xi) d\xi + \frac{y^2}{2M} \equiv W(x, y),$$

причем  $W(x, y) \rightarrow +\infty$  при  $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$ .

Далее,

$$V[t, x(t), y(t)] = \int_0^{x(t)} f(\xi) d\xi + \frac{y^2(t)}{2q(t)}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, x, y) &= f(x(t))y(t) + \frac{y(t)}{q(t)}\frac{dy}{dt} - \frac{y^2(t)\dot{q}(t)}{2q^2(t)} = \\ &= f(x(t))y(t) - \frac{y(t)}{q(t)}[p(t)y(t) + q(t)f(x(t))] - \frac{y^2(t)\dot{q}(t)}{2q^2(t)} = \\ &= -\frac{y^2(t)}{q(t)}\left[p(t) + \frac{\dot{q}(t)}{2q(t)}\right] \leq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, условия теоремы выполнены и, следовательно,  $x(t)$  и  $y(t) = \dot{x}(t)$  ограничены на промежутке  $0 \leq t < \infty$ .

## § 16. Системы с конвергенцией

Рассмотрим систему

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad (4.16.1)$$

где  $f(t, y) \in C_{ty}^{(0,1)}(I_t \times \mathcal{R}^n)$  и  $I_t = \{-\infty < t < +\infty\}$ .

**О п р е д е л е н и е.** Обобщая определение В. А. Плисса (см. [47]), будем говорить, что система (4.16.1) обладает *свойством конвергенции*, если

- 1) все решения  $y(t; t_0, y_0)$  определены при  $t_0 \leq t < \infty$ ;
- 2) существует единственное решение  $\eta(t)$  ( $t \in I_t$ ), определенное и ограниченное на всей оси, т. е.

$$\sup_t \|\eta(t)\| < \infty;$$

- 3) решение  $\eta(t)$  асимптотически устойчиво в целом при  $t \rightarrow +\infty$  (см. § 7), т. е. для любого решения  $y(t; t_0, y_0)$  имеем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [y(t; t_0, y_0) - \eta(t)] = 0.$$

Можно сказать, что в некотором смысле  $\eta(t)$  является *предельным режимом* системы (4.16.1).

Очевидно, если система (4.16.1) обладает свойством конвергенции, то все ее решения  $y(t; t_0, y_0)$  предельно (финально) ограничены при  $t \rightarrow +\infty$  (см. § 17), т. е. существует положительное число  $R$  такое, что

$$\|y(t; t_0, y_0)\| < R \text{ при } t > t_0 + T(t_0, y_0).$$

В частности, например, можно принять

$$R = \sup_t \|\eta(t)\| + 1.$$

**З а м е ч а н и е.** Если правая часть  $f(t, y)$  конвергентной системы (4.16.1)  $\omega$ -периодична по  $t$ , то ограниченное решение  $\eta(t)$  также  $\omega$ -периодично по  $t$ .

Действительно, пусть

$$f(t + \omega, y) \equiv f(t, y).$$

Рассмотрим вектор-функцию  $\eta(t + \omega)$ . Имеем

$$\frac{d}{dt} [\eta(t + \omega)] = \dot{\eta}(t + \omega) = f(t + \omega, \eta(t + \omega)) = f(t, \eta(t + \omega)).$$

Таким образом,  $\eta(t + \omega)$  также является решением системы (4.16.1) и притом ограниченным на  $I_t$ . А так как система

с конвергенцией обладает единственным ограниченным на  $I_t$  решением, то

$$\boldsymbol{\eta}(t + \omega) \equiv \boldsymbol{\eta}(t),$$

т. е.  $\boldsymbol{\eta}(t)$  есть  $\omega$ -периодическое решение системы (4.16.1).

Лемма 1. Пусть

$$\frac{dy}{dt} = Ay + f(t), \quad (4.16.2)$$

где  $A$  — постоянная  $(n \times n)$ -матрица и  $(n \times 1)$ -матрица  $f(t) \in C(-\infty, +\infty)$ .

Если

1) все характеристические корни  $\lambda_j(A)$  матрицы  $A$  имеют отрицательные действительные части

$$\operatorname{Re} \lambda_j(A) < 0 \quad (j = 1, \dots, n); \quad (4.16.3)$$

2) вектор-функция  $f(t)$  ограничена на  $I_t = (-\infty, +\infty)$ :

$$\sup_t \|f(t)\| = M < \infty,$$

то система (4.16.2) обладает свойством конвергенции, причем

$$\boldsymbol{\eta}(t) = \int_{-\infty}^t e^{A(t-\tau)} f(\tau) d\tau \quad (4.16.4)$$

представляет собой единственное ограниченное на  $I_t$  решение системы (4.16.2).

Доказательство. Из условия (4.16.3) имеем

$$\|e^{At}\| \leq Ne^{-\alpha t} \quad \text{при } t \geq 0,$$

где  $N > 0$  и  $0 < \alpha < -\max_j \operatorname{Re} \lambda_j(A)$ . Отсюда получаем

$$\|\boldsymbol{\eta}(t)\| \leq N \int_{-\infty}^t e^{-\alpha(t-\tau)} \|f(\tau)\| d\tau \leq MN e^{-\alpha t} \frac{e^{\alpha t}}{\alpha} = \frac{MN}{\alpha} < \infty.$$

Следовательно, интеграл (4.16.4) сходится и функция  $\boldsymbol{\eta}(t)$  ограничена, причем

$$\sup_t \|\boldsymbol{\eta}(t)\| \leq \frac{N}{\alpha} \sup_t \|f(t)\|.$$

Дифференцируя формулу (4.16.4) по параметру  $t$ , получим

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}(t) = f(t) + A \int_{-\infty}^t e^{A(t-\tau)} f(\tau) d\tau \equiv f(t) + A\boldsymbol{\eta}(t),$$

и, таким образом,  $\boldsymbol{\eta}(t)$  является решением системы (4.16.2).

То, что ограниченное решение системы (4.16.2) единственно, следует из того обстоятельства, что разность двух ограниченных решений неоднородной системы (4.16.2) является ограниченным решением соответствующей однородной системы

$$\frac{dx}{dt} = Ax,$$

не имеющей нетривиальных решений, ограниченных на всей оси  $I_t$ .

Действительно, если  $\eta_1(t)$  — другое решение неоднородной системы (4.16.2), ограниченное на оси  $I_t$ , то при любом  $t_0 \in I_t$  имеем

$$\eta_1(t) - \eta(t) = e^{A(t-t_0)} [\eta_1(t_0) - \eta(t_0)].$$

Отсюда

$$\|\eta_1(t) - \eta(t)\| \leq N e^{-\alpha(t-t_0)} \|\eta_1(t_0) - \eta(t_0)\|. \quad (4.16.5)$$

Так как

$$\sup_{t_0} \|\eta_1(t_0) - \eta(t_0)\| < \infty,$$

то, фиксируя  $t$  и переходя к пределу при  $t_0 \rightarrow -\infty$  в неравенстве (4.16.5), получим

$$\|\eta_1(t) - \eta(t)\| \leq 0,$$

т. е.

$$\eta_1(t) \equiv \eta(t),$$

и, таким образом, других, кроме  $\eta(t)$ , ограниченных на  $I_t$  решений система (4.16.2) не имеет.

Если  $y(t)$  — любое решение неоднородной системы (4.16.2), то, учитывая, что разность  $y(t) - \eta(t)$  удовлетворяет однородной системе (4.16.4), получим

$$y(t) - \eta(t) = e^{A(t-t_0)} [y(t_0) - \eta(t_0)];$$

отсюда

$$\|y(t) - \eta(t)\| \leq N e^{-\alpha(t-t_0)} \|y(t_0) - \eta(t_0)\|$$

при  $t \geq t_0$  и, следовательно,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t) - \eta(t)\| = 0.$$

Таким образом,  $\eta(t)$  устойчива в целом при  $t \rightarrow +\infty$  и, значит, система (4.16.2) конвергентна.

Приведем одно достаточное условие конвергентности нелинейной системы. Для этого нам понадобятся две леммы, представляющие также самостоятельный интерес.

Лемма 2 (см. [48]). Пусть  $f(x) \in C^1(\mathcal{R}_x^2)$  — действительная вектор-функция,

$$J_s(x) = \frac{1}{2} \{f'(x) + [f'(x)]^T\} \equiv \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f_j}{\partial x_k} + \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \right)$$

— симметризованная матрица Якоби (см. гл. I, § 10), а  $\lambda(x)$  и  $\Lambda(x)$  — ее наименьший и наибольший характеристические корни.

Тогда для скалярного произведения  $(f(x+h) - f(x), h)$  справедлива оценка:

$$\lambda_m(h, h) \leq (f(x+h) - f(x), h) \leq \Lambda_M(h, h), \quad (4.16.6)$$

где

$$\lambda_m = \inf_{t \in [0, 1]} \lambda(x + th)$$

и

$$\Lambda_M = \sup_{t \in [0, 1]} \Lambda(x + th).$$

Доказательство. Полагая

$$\xi = x + th \quad (0 \leq t \leq 1),$$

имеем

$$f(x+h) - f(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} [f(\xi)] dt = \int_0^1 f'(\xi) h dt.$$

Отсюда

$$(f(x+h) - f(x), h) = \left( \int_0^1 f'(\xi) h dt, h \right) = \int_0^1 (f'(\xi) h, h) dt. \quad (4.16.7)$$

Так как

$$(f'(\xi) h, h) = (J_s(\xi) h, h),$$

то, очевидно (гл. I, § 5), имеем

$$(f'(\xi) h, h) \geq \lambda(\xi)(h, h) \geq \lambda_m(h, h)$$

и

$$(f'(\xi) h, h) \leq \Lambda(\xi)(h, h) \leq \Lambda_M(h, h).$$

Поэтому из формулы (4.16.7) вытекает неравенство (4.16.6).

Лемма 3 (см. [48], [49]). Пусть

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad (4.16.8)$$



где  $f(t, \mathbf{y}) \in C_{ty}^{(0,1)}(I_t \times \mathcal{R}_y^n)$  и выполнено свойство единственности решений, причем при  $\|\mathbf{y}_0\| = R$  и любом  $t_0 \in I_t$  все решения  $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$  входят внутрь цилиндра  $Z \{-\infty < t < +\infty; \|\mathbf{y}\| \leq R\}$  при возрастающем  $t$  (рис. 45), т. е.

$$\frac{d}{dt}(\|\mathbf{y}\|^2) < 0 \quad \text{при } \|\mathbf{y}\| = R,$$

в силу системы (4.16.8). Тогда существует по меньшей мере одно

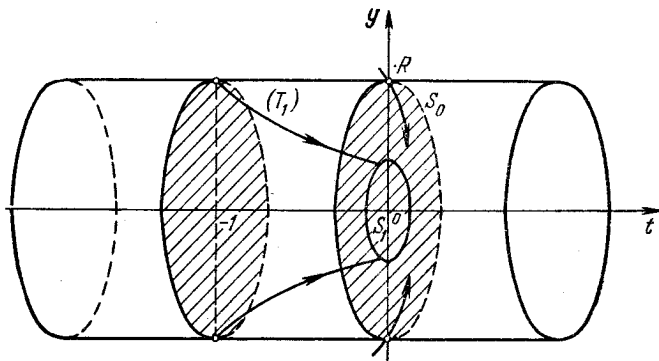


Рис. 45.

решение  $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}(t)$  системы (4.16.8), определенное для всех  $t \in I_t$  и целиком содержащееся в цилиндре  $Z$ :

$$\|\boldsymbol{\eta}(t)\| < R,$$

т. е. ограниченное на всей оси  $-\infty < t < +\infty$ .

Доказательство. Рассмотрим последовательность трубок  $T_p$  решений  $\mathbf{y}(t; t_p, \mathbf{y}_0)$ , определяемых начальными условиями:  $t_p = -p$  ( $p = 0, 1, 2, \dots$ ),  $\mathbf{y}_0 \in S_0$ , где  $S_0 = \{\|\mathbf{y}\| \leq R\}$ . Так как решения  $\mathbf{y}(t; t_p, \mathbf{y}_0) \in T_p$  при  $t_p = -p$  входят в цилиндр  $Z$  и остаются в нем, то они бесконечно продолжаемы вправо, т. е. имеют смысл при  $-p \leq t < \infty$ .

Пусть  $S_p = \{\mathbf{y}(0; -p, \mathbf{y}_0)\}$  ( $p = 0, 1, 2, \dots$ ) — сечение трубки  $T_p$  начальной гиперплоскостью  $t = 0$ . В силу свойства интегральной непрерывности (гл. II, § 1) множества  $S_p$  замкнуты. Так как решения  $\mathbf{y}(t; -p, \mathbf{y}_0)$  при  $t \geq -p$  содержатся внутри цилиндра  $Z$ , то

$$\|\mathbf{y}(-p+1; -p, \mathbf{y}_0)\| < R$$

и, следовательно, на основании свойства единственности, значения  $\mathbf{y}(-p+1; -p, \mathbf{y}_0)$  составляют часть начальных значений  $t_0 = -(p-1)$ ,  $\|\mathbf{y}_0\| \leq R$  трубки  $T_{p-1}$ . Поэтому для каждого  $p \geq 1$

трубка  $T_p$  целиком содержится в трубке  $T_{p-1}$ , и поэтому для системы замкнутых множеств  $\{S_p\}$  будем иметь

$$S_0 \supset S_1 \supset \dots \supset S_{p-1} \supset S_p \supset \dots$$

Следовательно, на основании принципа вложенных сфер для системы  $\{S_p\}$  существует общая точка

$$\eta_0 \in \bigcap_{p=0}^{\infty} S_p,$$

где  $\|\eta_0\| < R$ . Рассмотрим решение

$$\eta(t) = y(t; 0, \eta_0).$$

Так как  $\eta_0 \in S_p$  ( $p=1, 2, \dots$ ), то существует решение  $y(t; -p, \eta_p)$  ( $t \geq -p$ ,  $\|\eta_p\| \leq R$ ) такое, что  $y(0; -p, \eta_p) = \eta_0$ . В силу свойства единственности имеем

$$y(t; 0, \eta_0) \equiv y(t; -p, \eta_p)$$

и, следовательно,  $y(t; 0, \eta_0)$  определено при  $-p \leq t < \infty$ . Отсюда ввиду произвольности натурального числа  $p$  получаем, что решение  $\eta(t) = y(t; 0, \eta_0)$  имеет смысл на всей оси  $-\infty < t < +\infty$ , причем

$$\sup_t \|\eta(t)\| \leq R.$$

Лемма доказана.

Теорема (см. [48]). Пусть дана действительная система

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad (4.16.9)$$

где

$$f(t, y) \in C_{ty}^{(0,1)}(I_t \times \mathcal{R}_y^n),$$

причем

$$J_s(t, y) = \frac{1}{2} \{f'_y(t, y) + [f'_y(t, y)]^T\}$$

— симметризованная матрица Якоби.

Если

$$1) \sup_t \|f(t, 0)\| = k < \infty;$$

2) наибольший характеристический корень  $\Lambda(t, y)$  симметрической матрицы  $J_s(t, y)$  для всех  $t$  и  $y$  удовлетворяет неравенству

$$\Lambda(t, y) \leq -\alpha < 0, \quad (4.16.10)$$

где  $\alpha$  — положительное число,

то система (4.16.9) обладает свойством конвергенции.

Доказательство. Положим

$$V(\mathbf{y}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{y}\|^2 \equiv \frac{1}{2} (\mathbf{y}, \mathbf{y}).$$

На основании системы (4.16.9) имеем

$$\frac{dV}{dt} = \left( \frac{d\mathbf{y}}{dt}, \mathbf{y} \right) = (\mathbf{f}(t, \mathbf{y}), \mathbf{y}).$$

Отсюда

$$\frac{dV}{dt} = (\mathbf{f}(t, \mathbf{y}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{0}), \mathbf{y}) + (\mathbf{f}(t, \mathbf{0}), \mathbf{y}).$$

Применяя лемму 2 и используя неравенство (4.16.10), получим

$$\frac{dV}{dt} \leq -\alpha (\mathbf{y}, \mathbf{y}) + |(\mathbf{f}(t, \mathbf{0}), \mathbf{y})|.$$

Далее, в силу неравенства Коши (гл. 1, § 5) и условия 1) имеем

$$|(\mathbf{f}(t, \mathbf{0}), \mathbf{y})| \leq \|\mathbf{f}(t, \mathbf{0})\| \|\mathbf{y}\| \leq k \|\mathbf{y}\|.$$

Таким образом,

$$\frac{dV}{dt} \leq -\alpha \|\mathbf{y}\|^2 + k \|\mathbf{y}\| \leq 0,$$

если

$$\|\mathbf{y}\| \geq \frac{k}{\alpha} = R.$$

Следовательно, все решения  $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$  при  $\|\mathbf{y}_0\| = R$  входят внутрь цилиндра  $Z = \{-\infty < t < +\infty, \|\mathbf{y}\| \leq R\}$  и по лемме 3 существует решение  $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}(t)$  системы (4.16.9), определенное и ограниченное на  $I_t = \{-\infty < t < +\infty\}$ , причем

$$\sup_t \|\boldsymbol{\eta}(t)\| \leq R.$$

Пусть  $\mathbf{y}(t)$  — любое решение системы (4.16.9), определяемое начальным условием:  $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$ . Положим

$$\mathbf{x} = \mathbf{y}(t) - \boldsymbol{\eta}(t)$$

и

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{x}\|^2 \equiv \frac{1}{2} (\mathbf{x}, \mathbf{x}).$$

Так как

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}) - \mathbf{f}(t, \boldsymbol{\eta}),$$

то на основании леммы 2 имеем

$$\frac{dV}{dt} = (\mathbf{f}(t, \mathbf{y}) - \mathbf{f}(t, \boldsymbol{\eta}), \mathbf{x}) \leq -\alpha (\mathbf{x}, \mathbf{x}) = -2\alpha V.$$

Отсюда при  $t \geq t_0$  получаем

$$V[\mathbf{x}(t)] \leq V[\mathbf{x}(t_0)] e^{-2\alpha(t-t_0)},$$

т. е.

$$\|\mathbf{y}(t) - \boldsymbol{\eta}(t)\| \leq \|\mathbf{y}(t_0) - \boldsymbol{\eta}(t_0)\| e^{-\alpha(t-t_0)} \text{ при } t \geq t_0. \quad (4.16.11)$$

Следовательно,  $\boldsymbol{\eta}(t)$  асимптотически устойчиво в целом (§ 7), причем устойчивость экспоненциальная (§ 8). Из неравенства (4.16.11) следует также единственность ограниченного на оси  $I_t$  решения  $\boldsymbol{\eta}(t)$  (ср. конец доказательства леммы). Таким образом, система (4.16.9) — конвергентна.

Следствие 1. Пусть

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}(t) + \mathbf{g}(\mathbf{y}), \quad (4.16.12)$$

где  $\mathbf{f}(t) \in C(I_t)$  и  $\mathbf{g}(\mathbf{y}) \in \mathcal{R}_y^n$ , причем  $J(\mathbf{y}) = \mathbf{g}'(\mathbf{y})$  — матрица Якоби.

Если

$$1) \sup_t \|\mathbf{f}(t)\| < \infty;$$

2) наибольший из характеристических корней  $\Lambda(\mathbf{y})$  симметризованной матрицы Якоби

$$J_s(\mathbf{y}) = \frac{1}{2} [J(\mathbf{y}) + J^T(\mathbf{y})]$$

удовлетворяет неравенству

$$\Lambda(\mathbf{y}) \leq -\alpha < 0 \quad (\mathbf{y} \in \mathcal{R}_y^n),$$

где  $\alpha$  — положительная постоянная, то система (4.16.12) обладает свойством конвергенции.

Следствие 2. Пусть

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{f}(t), \quad (4.16.13)$$

где  $A(t), \mathbf{f}(t) \in C(I_t)$ .

Если

$$1) \sup_t \|\mathbf{f}(t)\| < \infty;$$

2) наибольший из характеристических корней  $\Lambda(t)$  симметризованной матрицы

$$A_s(t) = \frac{1}{2} [A(t) + A^T(t)]$$

удовлетворяет неравенству

$$\Lambda(t) \leq -\alpha < 0 \quad (t \in I_t),$$

где  $\alpha$  — положительная постоянная, то система (4.16.13) обладает свойством конвергенции.

## § 17. Диссипативные системы

Рассмотрим действительную нелинейную систему

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad (4.17.1)$$

где  $f(t, y) \in C(I_t \times \mathcal{R}_y^n)$ , причем обеспечено свойство единственности решений  $y(t; t_0, y_0)$ .

Определение 1. Следуя Левинсону (см. [50]), систему (4.17.1) будем называть *D-системой* или *диссипативной*, если все решения ее  $y(t; t_0, y_0)$  бесконечно продолжаемы вправо и существует число  $R > 0$  такое, что

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|y(t; t_0, y_0)\| < R. \quad (4.17.2)$$

Иными словами, для каждого решения  $y(t; t_0, y_0)$  существует момент  $t_1 = t_0 + T(t_0, y_0) \geq t_0$ , после которого оно навсегда погружается в фиксированную сферу  $\|y\| < R$ , т. е.

$$\|y(t; t_0, y_0)\| < R \quad \text{при } t_1 \leq t < \infty.$$

Заметим, что если система обладает свойством конвергенции (§ 16), то она диссипативна. Здесь за сферу  $\|y\| < R$  можно принять любую сферу, содержащую единственное ограниченное решение  $\eta(t)$ .

Решения диссипативной системы иногда называются *предельно (финально) ограниченными* (см. [41]).

Пусть

$$V(t, y) \in C_{iy}^{1,1}(Z),$$

где  $Z = \{t \in I_t \times y \in D_y\}$ .

Определение 2. Будем говорить (см. [41]), что  $V(t, y)$  обладает *свойством A* в области  $Z$ , если существует положительная непрерывная возрастающая функция  $a(r)$  ( $r \geq 0$ ) такая, что

$$V(t, y) \leq a(\|y\|) \quad \text{при } (t, y) \in Z. \quad (4.17.3)$$

Говорят, что  $V(t, y)$  обладает *свойством B* в области  $Z$ , если существует непрерывная неубывающая функция  $b(r)$  ( $r \geq 0$ ) такая, что

$$V(t, y) \geq b(\|y\|) \quad \text{при } (t, y) \in Z, \quad (4.17.4)$$

причем  $b(r) \rightarrow +\infty$  при  $r \rightarrow \infty$ .

Наконец, будем говорить, что  $V(t, y)$  обладает в области  $Z$  *свойством C* относительно данной системы (4.17.1), если существует положительная непрерывная функция  $c(r)$  ( $r \geq 0$ ) такая, что

$$\dot{V}(t, y) \leq -c(\|y\|) \quad \text{при } (t, y) \in Z, \quad (4.17.5)$$

где  $\dot{V}(t, \mathbf{y})$  — полная производная по  $t$  функции  $V(t, \mathbf{y})$  в силу системы (4.17.1).

Теорема Йосидзавы (см. [41]). Пусть во внешности некоторого цилиндра

$$Z^c = \{t \in I_t\} \times \{\mathbf{y} \in S_\rho^c\},$$

где  $S_\rho^c = \{\|\mathbf{y}\| \geq \rho\}$ , для системы (4.17.1) существует функция Ляпунова  $V(t, \mathbf{y}) \in C_{t, \mathbf{y}}^{(1,1)}(Z^c)$ , обладающая свойствами  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Тогда система (4.17.1) равномерно диссипативна относительно начального момента  $t_0$ , т. е. число  $T(t_0, y_0)$  можно выбрать зависящим только от  $y_0$ .

Доказательство. Из условия  $B$  вытекает, что при  $\|\mathbf{y}\| \geq \rho_1$ , где  $\rho_1 \geq \rho$  достаточно велико, функция  $V(t, \mathbf{y})$  является положительной. Так как по смыслу теоремы вместо числа  $\rho$ , очевидно, можно взять число  $\rho_1$ , то в дальнейшем мы будем предполагать функцию  $V(t, \mathbf{y})$  положительной в  $Z^c$ .

Рассмотрим решения  $\mathbf{y}(t) \equiv \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$  с начальными условиями  $t \in I_t$  и  $\|\mathbf{y}(t_0)\| \leq \rho$ .

Покажем, что эти решения равномерно ограничены в совокупности. Действительно, промежуток существования  $[t_0, T)$  решения  $\mathbf{y}(t)$  можно разбить на два множества:

$$[t_0, T) = T_1 + T_2,$$

где  $T_i$  ( $i = 1, 2$ ) — совокупность всех моментов из  $[t_0, T)$ , для которых решение  $\mathbf{y}(t)$ , соответственно, принадлежит области  $\|\mathbf{y}\| \leq \rho$  при  $i = 1$  и области  $\|\mathbf{y}\| > \rho$  при  $i = 2$ . Если  $t \in T_1$ , то, очевидно, имеем

$$\|\mathbf{y}(t)\| \leq \rho. \quad (4.17.6)$$

Если множество  $T_2$  пусто, то тем самым наше утверждение доказано. Пусть  $T_2$  не пусто. Тогда, так как область  $\|\mathbf{y}\| > \rho$  есть открытое множество, то в силу свойства интегральной непрерывности (гл. II, § 1)  $T_2$  является также открытым множеством и, следовательно (см. [51]), представляет собой конечную или счетную сумму интервалов

$$T_2 = \bigcup_{\alpha} (t_{\alpha}, t_{\beta}),$$

где  $\|\mathbf{y}(t_{\alpha})\| = \rho$ ,  $\|\mathbf{y}(t_{\beta})\| = \rho$  и  $\beta = \beta(\alpha)$ . Отсюда, если  $t \in T_2$ , то  $t \in (t_{\alpha}, t_{\beta})$  для некоторого  $\alpha$  (рис. 46) и, учитывая монотонное убывание функции  $V(t, \mathbf{y}(t))$  при возрастании  $t$ , а также свойства  $B$  и  $A$ , будем иметь

$$b(\|\mathbf{y}(t)\|) \leq V(t, \mathbf{y}(t)) \leq V(t_{\alpha}, \mathbf{y}(t_{\alpha})) \leq a(\|\mathbf{y}(t_{\alpha})\|) = a(\rho). \quad (4.17.7)$$

Так как  $b(r) \rightarrow \infty$  при  $r \rightarrow \infty$ , то существует  $R \geq \rho > 0$  такое, что

$$b(r) > a(\rho) \quad \text{при } r \geq R.$$

В таком случае на основании неравенства (4.17.7) получаем

$$\|y(t)\| < R \quad \text{при } t \in T_2. \quad (4.17.8)$$

Из неравенств (4.17.6) и (4.17.8) вытекает, что

$$\|y(t)\| < R \quad \text{при } t_0 \leq t < t_0 + T. \quad (4.17.9)$$

Отсюда следует, что решение  $y(t) = y(t; t_0, y_0)$  бесконечно продолжаемо вправо, т. е.  $T = \infty$ , причем для всех  $t_0 \in I$ , и  $\|y_0\| \leq \rho$  имеет место неравенство (4.17.9), где  $R$  зависит только от  $\rho$ .

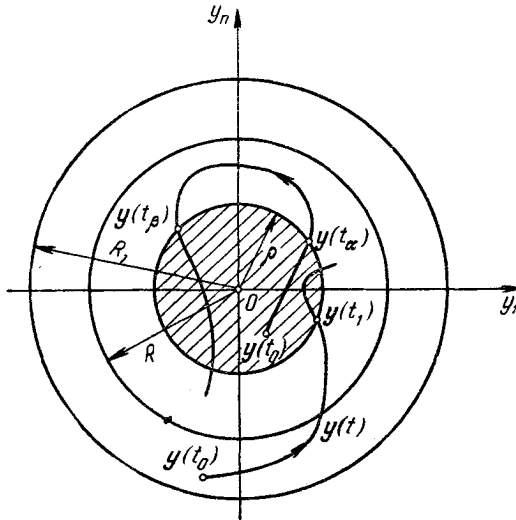


Рис. 46.

Рассмотрим теперь произвольное решение  $y(t) = y(t; t_0, y_0)$ , где  $\|y(t_0)\| > \rho$  (рис. 46). Покажем, что и в этом случае при  $t \geq t_1$  ( $t_1 > t_0$ ) неизменно обеспечено неравенство (4.17.9).

Прежде всего, заметим, что если для некоторого момента времени  $t_1 > t_0$  будет выполнено неравенство

$$\|y(t_1; t_0, y_0)\| \leq \rho,$$

то в силу свойства единственности имеем

$$y(t; t_0, y_0) \equiv y(t; t_1, y(t_1; t_0, y_0)).$$

Отсюда на основании неравенства (4.17.9) получаем

$$\|y(t; t_0, y_0)\| < R \quad \text{при } t \geq t_1. \quad (4.17.10)$$

Поэтому достаточно предположить, что  $\|y(t)\| > \rho$  при  $t \geq t_0$ . Но тогда в силу свойств  $A$ ,  $B$  и  $C$  имеем

$$b(\|y(t)\|) \leq V(t, y(t)) \leq V(t_0, y_0) \leq a(\|y_0\|) \quad \text{при } t \geq t_0$$

и

$$b(r) > a(\|y_0\|) \quad \text{при } r \geq R_1 \geq R,$$

где  $R_1$  достаточно велико. Отсюда получаем

$$\|y(t)\| < R_1 \quad \text{при } t \geq t_0,$$

где  $R_1$  зависит только от  $y_0$ , т. е. любое решение  $y(t; t_0, y_0)$  ограничено на  $[t_0, \infty)$ , равномерно относительно начального момента  $t_0$  и, следовательно, бесконечно продолжаемо вправо.

Покажем, что для некоторого момента  $t_1 > t_0$  будет справедливо равенство

$$\|y(t_1; t_0, y_0)\| = \rho. \quad (4.17.11)$$

Действительно, пусть

$$\rho < \|y(t; t_0, y_0)\| < R_1 \quad \text{при } t \geq t_0. \quad (4.17.12)$$

Положим

$$\inf_{\rho \leq r \leq R_1} c(r) = \gamma > 0.$$

Тогда, учитывая неравенство (4.17.12), в силу свойства  $C$  будем иметь

$$\dot{V}(t, y(t; t_0; y_0)) \leq -\gamma \quad \text{при } t \geq t_0.$$

Следовательно,

$$V(t; y(t; t_0, y_0)) \leq V(t_0, y_0) - \gamma(t - t_0) \quad \text{при } t \geq t_0. \quad (4.17.13)$$

Из неравенства (4.17.13) вытекает, что при достаточно большом  $t$  функция  $V(t, y(t))$  становится отрицательной, причем  $(t, y(t)) \in S_\rho^c$ , что противоречит предположению. Таким образом, решение  $y(t; t_0, y_0)$  не может для всех  $t \geq t_0$  удовлетворять неравенству (4.17.12) и, следовательно, при некотором  $t_1 > t_0$  выполнено равенство (4.17.11). Отсюда на основании приведенных выше рассуждений вытекает наличие неравенства (4.17.10). Итак, система (4.17.1) диссипативна.

Оценим момент  $t_1$ . Полагая

$$\rho < \|y(t; t_0, y_0)\| < R_1,$$

из неравенства (4.17.13) выводим

$$t_1 \leq t_0 + \sup_{t \geq t_0} \frac{V(t_0, y_0) - V(t, y(t))}{\gamma}.$$



В силу свойства  $A$  имеем

$$V(t_0, \mathbf{y}_0) \leq a(\|\mathbf{y}_0\|) < a(R_1).$$

Кроме того, на основании свойства  $B$  получаем

$$V(t, \mathbf{y}(t)) \geq b(\|\mathbf{y}(t)\|) \geq b(\rho).$$

Поэтому

$$t_1 \leq t_0 + T(\mathbf{y}_0),$$

где

$$T(\mathbf{y}_0) < \frac{a(R_1) - b(\rho)}{\gamma} \quad \text{и} \quad R_1 = R_1(\|\mathbf{y}_0\|).$$

Так как число  $T(\mathbf{y}_0)$  не зависит от начального момента  $t_0$ , то диссипативность системы (4.17.1) равномерна по  $t_0$ .

**З а м е ч а н и е.** Можно ослабить условия гладкости для функции Ляпунова  $V(t, \mathbf{y})$ . А именно, для справедливости теоремы достаточно требовать, чтобы

$$V(t, \mathbf{y}) \in C_t(Z_\rho^c) \cap \text{Lip } \mathbf{y}(Z_\rho^c).$$

В этом случае производную  $\dot{V}(t, \mathbf{y})$  в силу системы (4.16.1) можно определить формулой

$$\dot{V}(t, \mathbf{y}) = \overline{\lim}_{h \rightarrow +0} \frac{1}{h} [V(t+h, \mathbf{y} + h\mathbf{f}(t, \mathbf{y})) - V(t, \mathbf{y})].$$

Легко проверить, что  $\dot{V}(t_0, \mathbf{y}_0)$  представляет собой верхнюю правую производную по  $t$  функции  $V(t, \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0))$  в точке  $t = t_0$ .

## § 18. Уравнения в вариациях

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}), \quad (4.18.1)$$

где  $\mathbf{f}(t, \mathbf{y}) \in C_{ty}^{(0,1)}(Z)$  и  $Z = \{t_0 \leq t < \infty, \|\mathbf{y}\| < H\}$ .

Пусть  $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}(t)$  ( $t_0 \leq t < \infty$ ) — решение системы (4.18.1), удовлетворяющее условию:  $\|\boldsymbol{\eta}(t)\| \leq h < H$ . Положим

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{y} - \boldsymbol{\eta}(t).$$

Тогда будем иметь

$$\frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{dt} = \mathbf{f}(t, \boldsymbol{\eta}(t) + \tilde{\mathbf{x}}) - \mathbf{f}(t, \boldsymbol{\eta}(t)). \quad (4.18.2)$$

Отсюда, применяя теорему о среднем, получим

$$\frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{dt} = \mathbf{f}'_y(t, \boldsymbol{\eta}(t))\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{r}(t, \tilde{\mathbf{x}}), \quad (4.18.3)$$

где  $r(t, \tilde{x}) = o(\|\tilde{x}\|)$  при  $\tilde{x} \rightarrow \mathbf{0}$  равномерно по  $t$  на каждом конечном отрезке  $[t_0, t_0 + T]$  ( $T > 0$ ). Линейная система

$$\frac{dx}{dt} = f_y'(t, \eta(t))x, \quad (4.18.4)$$

представляющая линеаризованную систему (4.18.3), называется *уравнениями в вариациях* (см. [35], [28]) для системы (4.18.1) относительно ее решения  $\eta(t)$  (*система первого приближения*).

Заметим, что если данная система линейная

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + f(t),$$

то ее уравнения в вариациях совпадают с соответствующей однородной системой

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x.$$

*Лемма. Если система (4.18.1) автономная*

$$\frac{dy}{dt} = f(y)$$

*и  $\eta = \eta(t)$  есть ее решение, то*

$$x = \dot{\eta}(t)$$

*является решением ее уравнений в вариациях.*

*Доказательство.* Дифференцируя по  $t$  тождество

$$\dot{\eta}(t) \equiv f(\eta(t)),$$

будем иметь

$$\frac{d}{dt} [\dot{\eta}(t)] = f_y'(\eta(t)) \dot{\eta}(t),$$

что и доказывает утверждение леммы.

Предположим теперь, что  $f(t, y)$   $\omega$ -периодична по  $t$  и исследуемое решение  $\eta(t)$  также периодически и имеет период  $\omega$ . Тогда уравнения в вариациях (4.18.4) представляют собой линейную систему с периодическими коэффициентами.

*Теорема Ляпунова. Если все характеристические показатели  $\lambda_j$  уравнения в вариациях для данного периодического решения  $\eta(t)$  имеют отрицательные вещественные части, то это периодическое решение асимптотически устойчиво при  $t \rightarrow \infty$ .*

*Доказательство* (см. [28]). Согласно теории Флоке (гл. III, § 15) система (4.18.4) имеет нормированную фундаментальную матрицу вида

$$X(t) = \Phi(t)e^{\Delta t}, \quad (4.18.5)$$

где  $\Phi(t)$  —  $\omega$ -периодическая матрица и  $\Lambda$  — постоянная матрица, причем характеристические показатели  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  являются собственными значениями матрицы  $\Lambda$ .

В нелинейной системе (4.18.3) сделаем замену переменной

$$\tilde{x} \equiv y - \eta(t) = \Phi(t) z. \quad (4.18.6)$$

Тогда, учитывая, что

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(t) &= \frac{d}{dt} [X(t) e^{-\Lambda t}] = \dot{X}(t) e^{-\Lambda t} - X(t) e^{-\Lambda t} \Lambda = \\ &= f'_y(t, \eta(t)) X(t) e^{-\Lambda t} - X(t) e^{-\Lambda t} \Lambda = f'_y(t, \eta(t)) \Phi(t) - \Phi(t) \Lambda, \end{aligned}$$

будем иметь

$$\begin{aligned} \Phi(t) \frac{dz}{dt} + [f'_y(t, \eta(t)) \Phi(t) - \Phi(t) \Lambda] z = \\ = f'_y(t, \eta(t)) \Phi(t) z + r(t, \Phi(t) z) \end{aligned}$$

или

$$\frac{dz}{dt} = \Lambda z + \Phi^{-1}(t) r(t, \Phi(t) z), \quad (4.18.7)$$

где

$$\frac{\Phi^{-1}(t) r(t, \Phi(t) z)}{\|z\|} \xrightarrow{t} 0 \quad \text{при } z \rightarrow 0.$$

Отсюда на основании теоремы Ляпунова для квазилинейных систем (§ 10) заключаем, что тривиальное решение  $z = 0$  системы (4.18.7) асимптотически устойчиво, что в силу формулы (4.18.6) эквивалентно асимптотической устойчивости периодического решения  $\eta = \eta(t)$ .

## § 19. Орбитальная устойчивость

Рассмотрим действительную автономную систему

$$\frac{dy}{dt} = f(y), \quad (4.19.1)$$

где  $f(y) \in C^1$  ( $\|y\| < H$ ).

Определение 1. Если  $y = y(t)$  ( $a < t < b$ ) есть решение системы (4.19.1), то совокупность точек  $L = \{y(t): t \in (a, b)\}$  фазового пространства  $\mathcal{R}_y^n$  называется *траекторией* решения.

Траектория  $L$  представляет собой проекцию интегральной кривой  $y = y(t)$  пространства  $I_t \times \mathcal{R}_y^n$  в пространство  $\mathcal{R}_y^n$ , где время  $t$  играет роль параметра.

Так как система (4.19.1) автономна, то наряду с решением  $y = y(t)$  она допускает семейство решений  $y_c = y(t + c)$  ( $-\infty < c < +\infty$ ), которые, очевидно, обладают одной и той же траекторией.

Под  $\rho(z, L)$ , как обычно, будем понимать расстояние точки  $z \in \mathcal{R}_y^n$  до множества  $L \subset \mathcal{R}_y^n$ , т. е.

$$\rho(z, L) = \inf_{y \in L} \|z - y\|.$$

В дальнейшем для решения  $y = y(t)$  ( $t_0 \leq t < \infty$ ) иногда придется рассматривать множество точек  $L^+ = \{y(t) : t_0 \leq t < \infty\}$ , которые будем называть *положительной полутраекторией*. Аналогично определяется *отрицательная полутраектория*  $L^- = \{y(t) : t_0 \geq t > -\infty\}$ .

Определение 2. Решение  $\eta = \eta(t)$  ( $t_0 \leq t < \infty$ ) системы (4.19.1) называется (см. [52]) *орбитально устойчивым* при  $t \rightarrow \infty$ , если положительные траектории  $L^+$  всех решений  $y = y(t)$  ( $t_0 \leq t < \infty$ ), достаточно близких в начальный момент  $t_0$  к решению  $\eta(t)$ , в дальнейшем целиком содержатся в  $\varepsilon$ -окрестности положительной полутраектории  $L_0^+$  данного решения  $\eta = \eta(t)$ ,

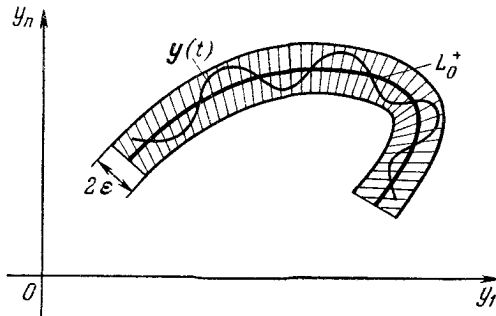


Рис. 47.

где  $\varepsilon > 0$  произвольно мало (рис. 47), т. е. для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$  такое, что если

$$\|y(t_0) - \eta(t_0)\| < \delta, \quad (4.19.2)$$

то

$$\rho(y(t), L_0^+) < \varepsilon \quad \text{при } t \geq t_0. \quad (4.19.3)$$

**Замечание.** В силу свойства интегральной непрерывности наличие орбитальной устойчивости решения  $\eta(t)$  ( $a < t < \infty$ ) не зависит от выбора начального момента  $t_0 \in (a, \infty)$ , поэтому она эквивалентна орбитальной устойчивости траектории.

Более того, если решение  $\eta(t)$  орбитально устойчиво и для решения  $y(t)$  при  $t = t_1 \in (a, \infty)$  выполнено неравенство

$$\|y(t_1) - \eta(t_0)\| < \delta,$$

где  $\delta$  — число, определяемое неравенством (4.19.2), то при  $t \geq t_1$  имеет место неравенство (4.19.3).

Действительно, полагая

$$\hat{y}(t) = y(t - t_0 + t_1)$$

и учитывая, что  $\hat{y}(t)$  — также решение автономной системы (4.19.1), будем иметь

$$\|\hat{y}(t_0) - \eta(t_0)\| = \|y(t_1) - \eta(t_0)\| \leq \delta;$$

отсюда

$$\rho(\hat{y}(t), L_0^+) = \rho(y(t - t_0 + t_1), L_0^+) < \varepsilon \quad \text{при } t \geq t_0,$$

т. е.

$$\rho(y(t), L_0^+) < \varepsilon \quad \text{при } t \geq t_1.$$

Определение 3. Орбитально устойчивое решение  $\eta(t)$  называется *асимптотически орбитально устойчивым*, если существует  $\Delta_0 > 0$  такое, что для всех решений  $y(t)$ , удовлетворяющих неравенству

$$\|y(t_0) - \eta(t_0)\| < \Delta_0, \quad (4.19.4)$$

выполнено предельное соотношение

$$\rho(y(t), L_0^+) \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

Таким образом, если  $L_0^+$  — замкнутая орбитально устойчивая траектория, то достаточно близкие к ней при  $t = t_0$  траектории  $L^+$  навиваются на нее при  $t \rightarrow \infty$ .

Замечание. Из устойчивости решения, очевидно, следует его орбитальная устойчивость. Но из орбитальной устойчивости решения, вообще говоря, не вытекает устойчивость его по Ляпунову, а тем более асимптотическая устойчивость.

Пример 1. Рассмотрим скалярную систему

$$\frac{dx}{dt} = x, \quad \frac{dy}{dt} = 0.$$

Полагая  $x_0 = x(0)$ ,  $y_0 = y(0)$ , будем иметь

$$x = x_0 e^t, \quad y = y_0 \quad (-\infty < t < +\infty).$$

Траекториями на плоскости  $Oxy$  здесь являются:

- а) правые полупрямые  $y = y_0$ ,  $x > 0$  при  $x_0 > 0$ ;
- б) левые полупрямые  $y = y_0$ ,  $x < 0$  при  $x_0 < 0$ ;
- в) точки  $x = 0$ ,  $y = y_0$  при  $x_0 = 0$ .

Очевидно, любое решение  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  данной системы неустойчиво по Ляпунову при  $t \rightarrow \infty$ . Однако траектории типов а) и б) орбитально устойчивы.

Пример 2. Пусть  $\eta(t)$  — периодическое решение с периодом  $\omega (\omega > 0)$  автономной системы (4.19.1), не сводящейся к постоянной ( $\dot{\eta}(t) \neq 0$ ). Тогда такое решение не может быть асимптотически устойчивым.

Действительно, полагая, что

$$y_{\delta}(t) = \eta(t + \delta),$$

так как  $\eta'(t_0) \neq 0$ , то при любом достаточно малом  $\delta > 0$  будем иметь

$$\|y_{\delta}(t_0) - \eta(t_0)\| = h > 0.$$

Отсюда, учитывая  $\omega$ -периодичность решения  $\eta(t)$  при произвольном  $T > 0$ , получаем

$$\sup_{t \geq T} \|y_{\delta}(t) - \eta(t)\| = h > 0$$

и, следовательно,  $y_{\delta}(t) - \eta(t) \not\rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Однако орбитальная устойчивость периодического решения  $\eta(t)$  и даже асимптотическая орбитальная устойчивость могут иметь место.

**Лемма 1.** Если автономная система (4.19.1) имеет нетривиальное  $\omega$ -периодическое решение  $\eta(t)$ , то для соответствующих уравнений в вариациях

$$\frac{dx}{dt} = f'_x(\eta(t)) \cdot x, \quad (4.19.5)$$

представляющих собой линейную периодическую систему, по меньшей мере один из ее мультипликаторов  $\rho = 1$ , т. е. по крайней мере один из характеристических показателей системы (4.19.5) является нулевым.

**Доказательство.** Согласно лемме из § 18 система (4.19.5) допускает  $\omega$ -периодическое решение

$$x = \dot{\eta}(t) \neq 0.$$

Поэтому периодическая система (4.19.5) имеет по крайней мере один мультипликатор

$$\rho = 1$$

(гл. III, § 15). Отсюда, беря главное значение логарифма, получаем, что соответствующий характеристический показатель  $\lambda$  будет нулевым:

$$\lambda = \frac{1}{\omega} \ln 1 = 0.$$

**Определение 4.** Будем говорить, что решение  $\eta(t)$  имеет свойство асимптотической фазы (см. [52], [28]), если для каждого решения  $y(t)$ , удовлетворяющего начальному неравенству (4.19.4), где  $\Delta_0 > 0$  достаточно мало, существует число  $c = c[y]$  (асимптотическая фаза) такое, что<sup>1)</sup>

$$\|y(t+c) - \eta(t)\| \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty. \quad (4.19.6)$$

<sup>1)</sup> Для удобства записи некоторых дальнейших формул знак фазы изменен на обратный по сравнению с [52].

Лемма 2. Орбитально устойчивое решение  $\eta(t)$  с асимптотической фазой асимптотически орбитально устойчиво.

Доказательство. Действительно, при  $t \geq t_0 + |c|$  имеем

$$\rho(\mathbf{y}(t), L_0^+) = \inf_{t_0 \leq t_1 < \infty} \|\mathbf{y}(t) - \eta(t_1)\| \leq \|\mathbf{y}(t) - \eta(t-c)\|.$$

Отсюда на основании условия (4.19.6) получаем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(\mathbf{y}(t), L_0^+) = 0,$$

что и требовалось доказать.

## § 20. Аналог теоремы Андронова—Витта

В этом параграфе будут установлены достаточные условия орбитальной устойчивости периодического решения автономной системы. Предварительно докажем три леммы (см. [28]).

Лемма 1. Пусть действительная периодическая система

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x, \quad (4.20.1)$$

где  $P(t) \in C(-\infty, +\infty)$  и  $P(t+\omega) = P(t)$  ( $\omega > 0$ ) имеет один мультипликатор  $\rho_1 = 1$ , а модули всех остальных ее мультипликаторов  $\rho_j$  ( $j = 2, \dots, n$ ) меньше единицы:

$$|\rho_j| < 1 \quad \text{при } j \neq 1.$$

Тогда для системы (4.20.1) существует фундаментальная матрица специального вида

$$X(t) = \Phi(t) \operatorname{diag}(E_1, e^{C_1 t}), \quad (4.20.2)$$

где  $\Phi(t)$  — действительная неособенная  $\omega$ -периодическая непрерывно дифференцируемая  $(n \times n)$ -матрица,  $E_1 = 1$  и  $C_1$  — действительная постоянная  $(n-1) \times (n-1)$ -матрица, все характеристические корни которой имеют отрицательные действительные части:

$$\operatorname{Re} \lambda_j(C_1) < 0 \quad (j = 1, \dots, n-1).$$

Доказательство. Пусть  $\tilde{X}(t)$  ( $\tilde{X}(0) = E$ ) — нормированная фундаментальная матрица системы (4.20.1). Так как матрица  $P(t)$  —  $\omega$ -периодическая, то справедливо соотношение

$$\tilde{X}(t+\omega) = \tilde{X}(t)\tilde{X}(\omega). \quad (4.20.3)$$

В силу условия теоремы для матрицы монодромии  $\tilde{X}(\omega)$  одно из ее собственных значений равно 1, а все другие по модулю меньше 1. Поэтому существует действительная неособенная матрица  $A$  такая, что

$$A^{-1}\tilde{X}(\omega)A = \operatorname{diag}(E_1, B_1) \equiv B, \quad (4.20.4)$$

где  $B_1$  — действительная матрица типа  $(n-1) \times (n-1)$ <sup>1)</sup>, все характеристические числа которой по модулю меньше 1. Тогда, вводя действительную фундаментальную матрицу

$$X(t) = \tilde{X}(t) A, \quad (4.20.5)$$

на основании соотношений (4.20.3) и (4.20.4) будем иметь

$$X(t + \omega) = \tilde{X}(t + \omega) A = \tilde{X}(t) \tilde{X}(\omega) A = X(t) B.$$

Для матрицы  $X(t)$  из (4.20.5) построим основную матрицу (обобщение, § 15 гл. III)

$$C = X^{-1}(0) X(\omega) = A^{-1} \tilde{X}^{-1}(0) \tilde{X}(\omega) A = B,$$

и пусть

$$\Lambda = \frac{1}{\omega} \text{Ln } B = \text{diag}(0, C_1), \quad (4.20.6)$$

где

$$C_1 = \frac{1}{\omega} \text{Ln } B_1.$$

Согласно теореме Флоке имеем

$$X(t) = \Phi(t) e^{\Lambda t}, \quad (4.20.7)$$

где  $\Phi(t)$  — неособенная  $\omega$ -периодическая матрица. Отсюда на основании формулы (4.20.6) получим

$$X(t) = \Phi(t) \text{diag}(E_1, e^{C_1 t}),$$

где

$$\text{Re } \lambda_j(C_1) = \text{Re} \left[ \frac{1}{\omega} \text{Ln } \lambda_j(B_1) \right] < 0.$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть  $X(t)$  — действительная фундаментальная матрица системы (4.20.1) вида (4.20.2) и

$$G(t, s) = \begin{cases} X(t) \text{diag}(0, E_{n-1}) X^{-1}(s) & \text{при } t > s, \\ -X(t) \text{diag}(E_1, 0) X^{-1}(s) & \text{при } t < s, \end{cases} \quad (4.20.8)$$

где  $E_p$  ( $p=1, \dots, n$ ) — единичная матрица соответствующего порядка. Тогда матрица  $G(t, s)$  обладает следующими свойствами:

- 1)  $G(t, t-0) - G(t, t+0) = E_n$ ;
- 2)  $\dot{G}_t(t, s) = P(t) G(t, s)$  при  $t \neq s$ ;
- 3)  $\|G(t, s)\| \leq \begin{cases} k e^{-\alpha(t-s)} & \text{при } t > s, \\ k & \text{при } t < s, \end{cases}$

где  $\alpha > 0$  и  $k > 0$  — постоянные;

<sup>1)</sup> Можно, например, воспользоваться приведением матрицы  $\tilde{X}(\omega)$  к нормальной форме Жордана в поле действительных чисел (см. [4]).



4) вектор-функция

$$\mathbf{y}(t) = X(t) \mathbf{a} + \int_0^{\infty} G(t, s) \mathbf{f}(s) ds, \quad (4.20.9)$$

где  $\mathbf{a}$  — произвольный постоянный вектор с нулевой первой координатой, т. е.

$$(\mathbf{a}, \mathbf{e}_1) = 0, \quad \mathbf{e}_1 = \text{colon}(1, 0, \dots, 0)$$

и

$$\mathbf{f}(t) \in C[0, \infty), \quad \int_0^{\infty} \|\mathbf{f}(t)\| dt < \infty,$$

является решением неоднородной системы

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = P(t) \mathbf{y} + \mathbf{f}(t), \quad (4.20.10)$$

стремящимся к нулю при  $t \rightarrow \infty$ :

$$\mathbf{y}(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{y}(t) = \mathbf{0}.$$

Доказательство. Свойства 1) и 2) непосредственно вытекают из формулы (4.20.8).

В силу структуры матрицы  $X(t)$  имеем

$$X(t) = \Phi(t) \text{diag}(E_1, e^{C_1 t})$$

и

$$X^{-1}(s) = \text{diag}(E_1, e^{-C_1 s}) \Phi^{-1}(s),$$

где  $\Phi(t)$  —  $\omega$ -периодическая матрица. Следовательно,

$$G(t, s) = \Phi(t) \text{diag}(0, e^{C_1(t-s)}) \Phi^{-1}(s) \quad \text{при } t > s$$

и

$$G(t, s) = -\Phi(t) \text{diag}(E_1, 0) \Phi^{-1}(s) \quad \text{при } t < s.$$

Так как все характеристические корни матрицы  $C_1$  имеют отрицательные действительные части, а матрица  $\Phi(t)$  ограничена вместе с матрицей  $\Phi^{-1}(t)$ , то, полагая

$$0 < \alpha < \min_j [-\text{Re } \lambda_j(C_1)],$$

получим оценки 3).

Рассмотрим теперь функцию  $\mathbf{y}(t)$ , определяемую формулой (4.20.9). Так как  $\|G(t, s)\| \leq k$  при  $t, s \geq 0$ , то имеем

$$\int_0^{\infty} \|G(t, s)\| \|\mathbf{f}(s)\| ds \leq k \int_0^{\infty} \|\mathbf{f}(s)\| ds < \infty$$

и, следовательно, несобственный интеграл, стоящий в правой части равенства (4.20.9), является абсолютно сходящимся.

Записав формулу (4.20.9) в виде

$$\mathbf{y}(t) = X(t) \mathbf{a} + \int_0^t G(t, s) \mathbf{f}(s) ds + \int_t^\infty G(t, s) \mathbf{f}(s) ds$$

и дифференцируя по параметру  $t$ , используя свойства 1) и 2), находим

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}}(t) &= \dot{X}(t) \mathbf{a} + \\ &+ [G(t, t-0) - G(t, t+0)] \mathbf{f}(t) + \int_0^\infty \dot{G}_t(t, s) \mathbf{f}(s) ds = \\ &= P(t) X(t) \mathbf{a} + \mathbf{f}(t) + \int_0^\infty P(t) G(t, s) \mathbf{f}(s) ds, \end{aligned}$$

т. е.

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = P(t) \mathbf{y}(t) + \mathbf{f}(t)$$

и, таким образом,  $\mathbf{y}(t)$  является решением неоднородной системы (4.20.10). Законность дифференцирования под знаком интеграла легко проверить.

Учитывая структуру матрицы  $X(t)$ , будем иметь

$$X(t) \mathbf{a} \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

Кроме того, на основании неравенства 3) получаем

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^\infty G(t, s) \mathbf{f}(s) ds \right\| &\leq \int_0^{\frac{t}{2}} \|G(t, s)\| \|\mathbf{f}(s)\| ds + \int_{\frac{t}{2}}^\infty \|G(t, s)\| \|\mathbf{f}(s)\| ds \leq \\ &\leq \int_0^{\frac{t}{2}} k e^{-\alpha(t-s)} \|\mathbf{f}(s)\| ds + \int_{\frac{t}{2}}^\infty k \|\mathbf{f}(s)\| ds \leq \\ &\leq k e^{-\frac{\alpha t}{2}} \int_0^\infty \|\mathbf{f}(s)\| ds + k \int_{\frac{t}{2}}^\infty \|\mathbf{f}(s)\| ds < \varepsilon, \end{aligned}$$

если  $t > T(\varepsilon)$ . Поэтому

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^\infty G(t, s) \mathbf{f}(s) ds = \mathbf{0}.$$

Следовательно,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{y}(t) = \mathbf{0}$ .

Лемма 2 полностью доказана.

Лемма 3. Пусть дана нелинейная система

$$\frac{dz}{dt} = P(t)z + \varphi(t, z), \quad (4.20.11)$$

где  $\omega$ -периодическая матрица  $P(t)$  удовлетворяет условиям леммы 1, а нелинейная вектор-функция  $\varphi(t, z)$   $\omega$ -периодична по  $t$  и удовлетворяет условию Липшица по  $z$ :

$$\begin{aligned} \|\varphi(t, z') - \varphi(t, z)\| &\leq N \|z' - z\| \\ (t \in [0, \infty), \|z\| < \Delta, \|z'\| < \Delta), \end{aligned} \quad (4.20.12)$$

причем  $\varphi(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ .

Рассмотрим интегральное уравнение

$$z(t, \mathbf{a}) = X(t)\mathbf{a} + \int_0^{\infty} G(t, s)\varphi(s, z(s, \mathbf{a})) ds, \quad (4.20.13)$$

где  $X(t)$  — фундаментальная матрица соответствующей однородной системы (4.20.1), имеющая специальный вид (4.20.2),  $G(t, s)$  определяется формулой (4.20.8) и  $\mathbf{a}$  — произвольный постоянный вектор такой, что

$$(\mathbf{a}, \mathbf{e}_1) = 0.$$

Тогда, если константа Липшица  $N$  достаточно мала, то при  $\|\mathbf{a}\| < a_0$  интегральное уравнение (4.20.13) имеет решение  $z(t, \mathbf{a})$ , представляющее собой  $(n-1)$ -параметрическое семейство решений дифференциальной системы (4.20.11), обращающихся в нуль на бесконечности.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t, \mathbf{a}) = \mathbf{0}. \quad (4.20.14)$$

Доказательство. В силу формулы (4.20.2) при  $t \geq 0$  справедлива оценка

$$\|X(t)\mathbf{a}\| \leq k_1 \|\mathbf{a}\| e^{-\alpha t}, \quad (4.20.15)$$

где  $k_1$  ( $k_1 \geq 1$ ) — некоторая положительная постоянная и

$$0 < \alpha < \min_j \operatorname{Re}[-\lambda_j(C_1)].$$

Предположим, что  $k$  — постоянная из леммы 2 и константа Липшица  $N$  удовлетворяет условию

$$N < \frac{\alpha}{8k}. \quad (4.20.16)$$

Применяя метод последовательных приближений, покажем, что если

$$\|\mathbf{a}\| < \frac{\Delta}{2k_1} = a_0,$$

то интегральное уравнение (4.20.13) при  $t \geq 0$  имеет решение

$z(t, a)$ , причем

$$\|z(t, a)\| \leq 2k_1 \|a\| e^{-\frac{\alpha}{2}t} < \Delta. \quad (4.20.17)$$

За начальное приближение примем  $z_0(t, a) = 0$  и, как обычно, положим

$$z_p(t, a) = X(t)a + \int_0^{\infty} G(t, s) \varphi(s, z_{p-1}(s, a)) ds \quad (p=1, 2, \dots). \quad (4.20.18)$$

Так как  $\varphi(s, 0) = 0$ , то в силу неравенства (4.20.15) при  $t \geq 0$  имеем

$$\|z_1(t, a) - z_0(t, a)\| = \|X(t)a\| \leq k_1 \|a\| e^{-\alpha t} \leq k_1 \|a\| e^{-\frac{\alpha}{2}t}.$$

Пусть теперь

$$\|z_p(t, a) - z_{p-1}(t, a)\| \leq \frac{k_1}{2^{p-1}} \|a\| e^{-\frac{\alpha}{2}t} \quad \text{при } t \geq 0; \quad (4.20.19)$$

тогда в силу (4.20.18), учитывая неравенство (4.20.16) и оценку 3) для  $\|G(t, s)\|$  (см. лемму 2), будем иметь

$$\begin{aligned} \|z_{p+1}(t, a) - z_p(t, a)\| &\leq \\ &\leq \int_0^{\infty} \|G(t, s)\| \|\varphi(s, z_p(s, a)) - \varphi(s, z_{p-1}(s, a))\| ds \leq \\ &\leq \int_0^{\infty} \|G(t, s)\| \cdot \frac{\alpha}{8k} \|z_p(s, a) - z_{p-1}(s, a)\| ds \leq \\ &\leq \frac{\alpha}{8k} \left\{ \int_0^t k e^{-\alpha(t-s)} \cdot \frac{k_1}{2^{p-1}} \|a\| e^{-\frac{\alpha}{2}s} ds + \int_t^{\infty} k \cdot \frac{k_1}{2^{p-1}} \|a\| e^{-\frac{\alpha}{2}s} ds \right\} \leq \\ &\leq \frac{\alpha k_1}{2^{p+2}} \|a\| \left( \frac{2}{\alpha} e^{-\frac{\alpha t}{2}} + \frac{2}{\alpha} e^{-\frac{\alpha t}{2}} \right) = \frac{k_1}{2^p} \|a\| e^{-\frac{\alpha t}{2}} < \Delta \quad \text{при } t \geq 0 \\ &\quad (p=1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Таким образом, на основании принципа математической индукции заключаем, что все приближения  $z_p(t, a)$  ( $p=1, 2, \dots$ ) имеют смысл и для них справедлива оценка (4.20.19). Отсюда, так как

$$z_p(t, a) = \sum_{q=1}^p [z_q(t, a) - z_{q-1}(t, a)],$$

то существует

$$\lim_{p \rightarrow \infty} z_p(t, a) = z(t, a),$$

причем сходимость последовательности равномерна в области

$$Z \{0 \leq t < \infty, \|a\| < \frac{\Delta}{4k_1}\}$$

и, значит, предельная функция  $z(t, a)$  непрерывна по совокупности переменных  $t$  и  $a$  при достаточно малой  $\|a\|$ .

Переходя к пределу при  $p \rightarrow \infty$  в равенстве (4.20.18), получаем

$$z(t, a) = X(t)a + \int_0^{\infty} G(t, s) \varphi(s, z(t, a)) ds,$$

т. е.  $z(t, a)$  в области  $Z$  является решением интегрального уравнения (4.20.13). Отсюда, дифференцируя по  $t$  последнее соотношение и используя свойства функции  $G(t, s)$ , будем иметь

$$\dot{z}(t, a) = P(t)z(t, a) + \varphi(t, z(t, a)),$$

т. е.  $z(t, a)$  в области  $Z$  есть решение нелинейной дифференциальной системы (4.20.11).

Далее, из неравенств (4.20.19) выводим

$$\begin{aligned} \|z(t, a)\| &\leq \|z_0(t, a)\| + \sum \|z_p(t, a) - z_{p-1}(t, a)\| \leq \\ &\leq \sum_{p=1}^{\infty} \frac{k_1}{2^{p-1}} \|a\| e^{-\frac{\alpha}{2}t} \leq 2k_1 \|a\| e^{-\frac{\alpha}{2}t} < \Delta \quad \text{при } t \geq 0. \end{aligned} \quad (4.20.20)$$

Следовательно,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t, a) = 0, \quad \text{если } \|a\| < \frac{\Delta}{4k_1};$$

в частности, при  $a = 0$  имеем

$$z(t, 0) \equiv 0.$$

Лемма 3 доказана.

Рассмотрим теперь действительную автономную систему

$$\frac{dy}{dt} = f(y), \quad (4.20.21)$$

где  $f(y) \in C^1$  ( $\|y\| < H$ ), и пусть  $\eta = \eta(t)$  —  $\omega$ -периодическое ее решение такое, что  $\|\eta(t)\| \leq h < H$ . Уравнения в вариациях здесь имеют вид

$$\frac{dx}{dt} = f'_y(\eta(t))x. \quad (4.20.22)$$

Аналог теоремы Андронова—Витта (см. [52], [28]). Пусть автономная система (4.20.21) допускает  $\omega$ -периодическое

решение  $\eta(t)$ , не являющееся тождественной постоянной ( $\dot{\eta}(t) \neq 0$ ), причем уравнения в вариациях (4.20.22) для этого решения имеют один простой нулевой характеристический показатель, а все остальные — с отрицательными действительными частями. Тогда периодическое решение  $\eta(t)$  асимптотически орбитально устойчиво при  $t \rightarrow \infty$ .

Более того, для каждого близкого к  $\eta(t)$  решения  $y(t)$  существует асимптотическая фаза, т. е. если  $\Delta > 0$  достаточно мало и

$$\|y(t_1) - \eta(t_0)\| < \Delta$$

для некоторых  $t_0$  и  $t_1$ , то найдется постоянная  $c = c[y]$  такая, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [y(t+c) - \eta(t)] = 0. \quad (4.20.23)$$

Доказательство (см. [28]). 1) Выберем новую прямоугольную систему координат  $O'v_1 \dots v_n$ , начало которой  $O'$  находится в точке  $\eta(0)$ , а первая ось  $O'v_1$  имеет направление,

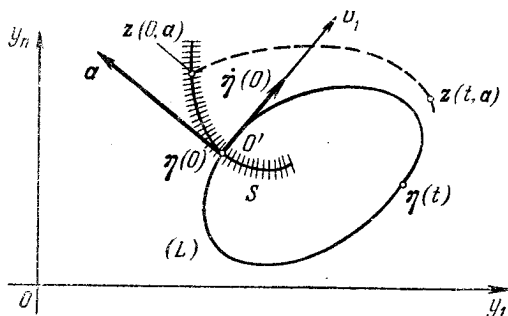


Рис. 48.

определяемое вектором  $\dot{\eta}(0)$  (рис. 48). Тогда система (4.20.21) примет вид

$$\frac{dv}{dt} = g(v), \quad (4.20.24)$$

где снова  $g(v) \in C^1$ .

Периодическое решение  $\eta(t)$  при этом перейдет в периодическое решение  $v_0 = p(t)$ , обладающее следующими свойствами:

$$p(0) = 0, \quad \dot{p}(0) = e_1 \|\dot{p}(0)\|, \quad (4.20.25)$$

где

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Уравнения в вариациях, соответственно, будут иметь вид

$$\frac{du}{dt} = g'_v(p(t)) u, \quad (4.20.26)$$

причем, очевидно, характеристические показатели периодической системы (4.20.26) совпадают с характеристическими показателями системы в вариациях (4.20.22). Согласно лемме 1 для системы (4.20.26) существует действительная фундаментальная матрица вида

$$U(t) = \Phi(t) \operatorname{diag}(E_1, e^{C_1 t}), \quad (4.20.27)$$

где  $\Phi(t + \omega) = \Phi(t)$  и  $\operatorname{Re} \lambda_j(C_1) < 0$ . Из формулы (4.20.27) вытекает, что первый столбец матрицы  $U(t)$  представляет собой  $\omega$ -периодическое решение уравнения (4.20.26). Так как  $\dot{p}(t)$  является  $\omega$ -периодическим решением уравнений в вариациях (4.20.26) (см. § 18) и в силу условия теоремы это решение единственно, с точностью до скалярного постоянного множителя, то можно принять

$$U(t) = \left[ \frac{\dot{p}(t)}{\|\dot{p}(0)\|}, U_1(t) \right], \quad (4.20.28)$$

где  $U_1(t)$  — матрица типа  $n \times (n-1)$ , причем

$$U(0) = [e_1, U_1(0)]. \quad (4.20.29)$$

Положим

$$v = p(t) + z.$$

Тогда уравнение (4.20.24) примет вид

$$\frac{dz}{dt} = g'_v(p(t)) z + \varphi(t, z), \quad (4.20.30)$$

где

$$\varphi(t, z) = [g(p(t) + z) - g(p(t))] - g'_v(p(t)) z.$$

Так как

$$\varphi'_z(t, z) = g'_v(p(t) + z) - g'_v(p(t)),$$

то

$$\varphi(t, 0) = \varphi'_z(t, 0) \equiv 0 \quad (4.20.31)$$

и

$$\varphi(t, z) \xrightarrow{z \rightarrow 0} 0, \quad \varphi'_z(t, z) \xrightarrow{z \rightarrow 0} \theta \text{ при } z \rightarrow 0.$$

Отсюда следует, что  $\varphi(t, z)$  удовлетворяет условию Липшица:

$$\begin{aligned} \|\varphi(t, z') - \varphi(t, z)\| &\leq N \|z' - z\| \\ (t \in [0, \infty), \|z\| < \Delta, \|z'\| < \Delta), \end{aligned}$$

где константа Липшица  $N$  сколь угодно мала, если число  $\Delta$  достаточно мало.

Пусть

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

— любой вектор, перпендикулярный орту  $\mathbf{e}_1$ .

В силу леммы 3 при  $\|\mathbf{a}\| < a_0$  нелинейная система (4.20.30) допускает непрерывное по  $\mathbf{a}$  многообразие решений

$$\mathbf{z}(t, \mathbf{a}) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty,$$

норма которых подчинена неравенству (4.20.20). Эти решения удовлетворяют интегральному уравнению

$$\mathbf{z}(t, \mathbf{a}) = U(t) \mathbf{a} + \int_0^\infty G(t, s) \boldsymbol{\varphi}(s, \mathbf{z}(s, \mathbf{a})) ds, \quad (4.20.32)$$

где аналогично (4.20.2) имеем

$$G(t, s) = \begin{cases} U(t) \text{diag}(0, E_{n-1}) U^{-1}(s) & \text{при } s < t, \\ -U(t) \text{diag}(E_1, 0) U^{-1}(s) & \text{при } s > t, \end{cases} \quad (4.20.33)$$

причем

$$\|G(t, s)\| \leq \begin{cases} ke^{-\alpha(t-s)} & \text{при } s < t, \\ k & \text{при } s > t. \end{cases}$$

2) Установим связь между начальными значениями  $\mathbf{z}^{(0)} = \mathbf{z}(0, \mathbf{a})$  решения  $\mathbf{z}(t, \mathbf{a})$  и параметром  $\mathbf{a}$ . Из уравнения (4.20.32), полагая  $t=0$  и учитывая формулы (4.20.33), имеем

$$\mathbf{z}^{(0)} = U(0) \mathbf{a} - U(0) \text{diag}(E_1, 0) \int_0^\infty U^{-1}(s) \boldsymbol{\varphi}(s, \mathbf{z}(s, \mathbf{a})) ds, \quad (4.20.34)$$

где интеграл справа сходится абсолютно и равномерно по параметру  $\mathbf{a}$  при  $\|\mathbf{a}\| < a_0$ .

Используя формулу (4.20.29), получаем

$$U(0) \text{diag}(E_1, 0) = \text{diag}(E_1, 0).$$

Отсюда, полагая

$$\mathbf{z}^{(0)} = \begin{bmatrix} z_1^{(0)} \\ \vdots \\ z_n^{(0)} \end{bmatrix}$$



и переходя в векторном уравнении (4.20.34) к координатам, будем иметь систему скалярных уравнений

$$\begin{cases} z_1^{(0)} = \sum_{j=2}^n c_j^{(1)} a_j + \tilde{\psi}(a_2, \dots, a_n), \\ z_k^{(0)} = \sum_{j=2}^n c_j^{(k)} a_j \quad (k=2, \dots, n), \end{cases} \quad (4.20.35)$$

где  $c_j^{(k)}$  — соответствующие элементы матрицы  $U_1(0)$  и

$$\tilde{\psi}(a_2, \dots, a_n) = \left[ \int_0^{\infty} G(0, s) \Phi(s, \mathbf{z}(s, \mathbf{a})) ds \right]_1$$

(символ  $[ ]_1$  обозначает первую компоненту соответствующего вектора), причем  $\tilde{\psi}(a_2, \dots, a_n)$  непрерывна при  $\|\mathbf{a}\| < a_0$ . Так как матрица  $U(0)$  неособенная, то из структуры формулы (4.20.29) следует, что

$$\det U(0) = A_{11} \neq 0,$$

где

$$A_{11} = |c_j^{(k)}| \quad (j, k=2, \dots, n).$$

Поэтому последние  $(n-1)$  уравнений системы (4.20.35) можно разрешить относительно координат  $a_2, \dots, a_n$ , и мы будем иметь

$$a_k = \sum_{j=2}^n d_j^{(k)} z_j^{(0)} \quad (k=2, \dots, n), \quad (4.20.36)$$

где  $d_j^{(k)}$  — некоторые постоянные.

Подставляя эти выражения в первое уравнение системы (4.20.35), находим

$$z_1^{(0)} = \sum_{j=2}^n k_j z_j^{(0)} + \psi(z_2^{(0)}, \dots, z_n^{(0)}), \quad (4.20.37)$$

где  $k_j$  — некоторые постоянные и  $\psi(z_2^{(0)}, \dots, z_n^{(0)})$  — результат подстановки параметров  $a_2, \dots, a_n$  в функцию  $\tilde{\psi}(a_2, \dots, a_n)$ . В силу формулы (4.20.20) имеем:

$$\|\mathbf{z}(s, \mathbf{a})\| \leq 2k_1 \|\mathbf{a}\| e^{-\frac{\alpha}{2}s} \quad \text{при } s \geq 0.$$

Кроме того, из соотношений (4.20.31) вытекает неравенство

$$\|\Phi(s, \mathbf{z})\| \leq \gamma(\mathbf{z}) \|\mathbf{z}\|,$$

где  $\gamma(\mathbf{z}) \rightarrow 0$  при  $\mathbf{z} \rightarrow 0$ . Поэтому, учитывая ограниченность матрицы  $G(0, s)$ , получаем

$$\check{\psi}(a_2, \dots, a_n) = o(\|\mathbf{a}\|)$$

и, следовательно, на основании (4.20.36) будем иметь

$$\psi(z_2^{(0)}, \dots, z_n^{(0)}) = o(r), \quad (4.20.38)$$

где

$$r = |z_2^{(0)}| + \dots + |z_n^{(0)}|.$$

Пусть

$$\mathbf{v}(0) = \begin{bmatrix} v_1^{(0)} \\ \vdots \\ v_n^{(0)} \end{bmatrix}$$

— начальные значения некоторого решения  $\mathbf{v}(t)$  преобразованной автономной системы (4.20.24). Так как

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{p}(t) + \mathbf{z}(t)$$

и

$$\mathbf{v}(0) = \mathbf{p}(0) + \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}^{(0)},$$

то уравнение (4.20.37) имеет вид

$$v_1^{(0)} = \sum_{j=2}^n k_j v_j^{(0)} + \psi(v_2^{(0)}, \dots, v_n^{(0)}), \quad (4.20.39)$$

где функция  $\psi$  непрерывна, если  $r = |v_2^{(0)}| + \dots + |v_n^{(0)}|$  достаточно мало, причем

$$\psi(0, \dots, 0) = 0.$$

В пространстве  $O'v_1 \dots v_n$  уравнение (4.20.39) представляет собой некоторую непрерывную поверхность  $S$  (рис. 48), определенную в окрестности точки  $O'$  и однозначную относительно координаты  $v_1^{(0)}$ , обладающую тем свойством, что из ее точек при  $t=0$  выходят траектории  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$  системы (4.20.24), неограниченно приближающиеся к замкнутой периодической траектории  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{p}(t)$ , т. е. такие, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\mathbf{v}(t) - \mathbf{p}(t)] = 0.$$

Заметим, что из уравнения (4.20.39) и формулы (4.20.38) вытекает, что функция  $v_1^{(0)}$  дифференцируема в точке  $v_2^{(0)} = \dots = v_n^{(0)} = 0$ , причем уравнение касательной плоскости  $Q$  в этой точке выражается линейной частью:

$$v_1^{(0)} = \sum_{j=2}^n k_j v_j^{(0)}. \quad (4.20.40)$$

Обозначая через  $\varphi$  угол между единичным вектором  $\mathbf{n}$  нормали к плоскости  $Q$  в точке  $O'$  и вектором  $\mathbf{p}'(0) = \mathbf{e}_1 \|\mathbf{p}'(0)\|$ , из уравнения (4.20.40) будем иметь

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + k_2^2 + \dots + k_n^2}} \neq 0.$$

Следовательно, периодическая траектория  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{p}(t)$  пересекает поверхность  $S$ , не касаясь ее, и, значит, переходит с одной стороны поверхности на другую. А так как поверхность  $S$  непрерывна и задана явным уравнением (4.20.39), то близкие к ней траектории  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$  при возрастании или убывании  $t$  имеют с поверхностью  $S$  общие точки.

3) Пусть для некоторых  $t_0$  и  $t_1$  решение  $\mathbf{v}(t)$  системы (4.20.21) в системе координат  $O'v_1 \dots v_n$  удовлетворяет неравенству

$$\|\mathbf{v}(t_1) - \mathbf{p}(t_0)\| < \Delta,$$

где  $\Delta$  — некоторое достаточно малое положительное число. В силу автономности системы (4.20.21) вектор-функции

$$\mathbf{v}_1(t) = \mathbf{v}(t + t_1)$$

и

$$\mathbf{p}_0(t) = \mathbf{p}(t + t_0)$$

также являются ее решениями, причем, очевидно, выполнено неравенство

$$\|\mathbf{v}_1(0) - \mathbf{p}_0(0)\| < \Delta. \quad (4.20.41)$$

Для периодической траектории  $\hat{\mathbf{v}}_0 = \mathbf{p}_0(t) (L_0)$  в точке  $t = 0$  построим непрерывную поверхность  $S_0$  со свойствами, аналогичными свойствам поверхности  $S$ , которую траектория  $L_0$  пересекает без касания при  $t = 0$ . Следовательно, близкие к ней при  $t = 0$  траектории  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1(t)$ , удовлетворяющие неравенству (4.20.41), где  $\Delta$  достаточно мало, также пересекают поверхность  $S_0$  при  $t$  возрастающем или при  $t$  убывающем в некоторый момент  $\hat{t}$ . Так как траектория  $\hat{\mathbf{v}}_0 = \mathbf{p}_0(t)$  не вырождается в точку, то момент  $\hat{t}$  можно выбрать равномерно ограниченным для траекторий, подчиненных начальному условию (4.20.41), т. е.

$$|\hat{t}| \leq T(\Delta),$$

где  $T(\Delta)$  — некоторое положительное число.

Отсюда, полагая

$$\hat{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{v}_1(t + \hat{t}) \equiv \mathbf{v}(t + t_1 + \hat{t}),$$

получаем

$$\hat{\mathbf{v}}(0) = \mathbf{v}_1(\hat{t}) \in S_0.$$

В силу свойства поверхности  $S_0$  имеем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{\mathbf{v}}(t) - \mathbf{p}_0(t)\| = 0,$$

т. е.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{v}(t + t_1 + \hat{t}) - \mathbf{p}(t + t_0)\| = 0.$$

Отсюда находим

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{v}(t + c) - \mathbf{p}(t)\| = 0,$$

где

$$c = t_1 - t_0 + \hat{t}$$

— предельная фаза решения  $\mathbf{v}(t)$ . В частности, если  $t_1 = t_0$ , то  $c = \hat{t}$ .

Возвращаясь к старым координатам  $y_1, \dots, y_n$ , получим, что соответствующее решение  $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$  системы (4.20.21) удовлетворяет условию (4.20.23).

Так как величина  $\hat{t}$  может быть выбрана равномерно ограниченной в каждой начальной окрестности (4.20.41), то решение  $\boldsymbol{\eta}(t)$  является орбитально устойчивым, причем в силу наличия предельной фазы эта устойчивость асимптотическая (см. лемму 2 из § 19).

Теорема доказана полностью.

Для сравнения приводим формулировку теоремы Андронова — Витта (см. [52a], [10]).

**Теорема Андронова — Витта.** Пусть  $\omega$ -периодическое решение  $\boldsymbol{\eta}(t)$  автономной системы (4.20.21) не сводится к тождественной постоянной ( $\dot{\boldsymbol{\eta}}(t) \not\equiv \mathbf{0}$ ), причем уравнения в вариациях для этого решения имеют один простой нулевой характеристический показатель, а все остальные характеристические показатели обладают отрицательными действительными частями. Тогда решение  $\boldsymbol{\eta}(t)$  устойчиво в смысле Ляпунова при  $t \rightarrow \infty$ .

## § 21. Признак Пуанкаре

Рассмотрим автономную скалярную систему

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y), \end{aligned} \right\} \quad (4.21.1)$$

где  $P(x, y), Q(x, y) \in C^1$ . Пусть система (4.21.1) имеет  $\omega$ -периодическое решение

$$\xi = \xi(t), \quad \eta = \eta(t), \quad (4.21.2)$$

траектория которого на плоскости  $Oxy$  не сводится в точку:  $|\dot{\xi}(t)| + |\dot{\eta}(t)| \neq 0$ . Тогда соответствующая система в вариациях

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= P'_x(\xi(t), \eta(t))u + P'_y(\xi(t), \eta(t))v, \\ \frac{dv}{dt} &= Q'_x(\xi(t), \eta(t))u + Q'_y(\xi(t), \eta(t))v \end{aligned} \right\} \quad (4.21.3)$$

допускает нетривиальное  $\omega$ -периодическое решение

$$u = \dot{\xi}(t), \quad v = \dot{\eta}(t).$$

Пусть  $X(t)$  ( $X(0) = E$ ) — нормированная фундаментальная матрица линейной системы (4.21.3). Мультипликаторы  $\rho_1$  и  $\rho_2$  этой системы являются корнями уравнения

$$\det [X(\omega) - \rho E] = 0.$$

Отсюда

$$\rho^2 - \rho \operatorname{Sp} X(\omega) + \det X(\omega) = 0.$$

Так как система в вариациях (4.21.3) имеет нетривиальное  $\omega$ -периодическое решение, то в силу леммы 1 (§ 19) один из ее мультипликаторов

$$\rho_1 = 1.$$

Отсюда по свойству корней квадратного уравнения имеем

$$\rho_2 = \det X(\omega).$$

Но в силу формулы Остроградского — Лиувилля, обозначая через  $A(t)$  матрицу системы (4.21.3), получим

$$\begin{aligned} \det X(\omega) &= \det X(0) \exp \int_0^\omega \operatorname{Sp} A(t) dt = \\ &= \exp \int_0^\omega [P'_x(\xi(t), \eta(t)) + Q'_y(\xi(t), \eta(t))] dt. \end{aligned}$$

Поэтому справедлив признак Пуанкаре: *если*

$$\lambda = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega [P'_x(\xi(t), \eta(t)) + Q'_y(\xi(t), \eta(t))] dt < 0, \quad (4.21.4)$$

то

$$0 < \rho_2 < 1$$

*и периодическое решение  $\xi = \xi(t)$ ,  $\eta = \eta(t)$  асимптотически орбитально устойчиво, т. е. траектория его является устойчивым предельным циклом (см. [52]) и близкие к нему решения обладают асимптотической фазой.*

## § 22. Условная устойчивость

**Определение.** Говорят, что решение  $\xi = \xi(t)$   $n$ -мерной дифференциальной системы

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (4.22.1)$$

*условно устойчиво* при  $t \rightarrow \infty$ , если в  $\mathcal{R}_x^n$  существует  $k$ -мерное многообразие  $S_k \supset \xi(t_0)$  начальных значений ( $1 \leq k < n$ ) такое, что для всякого решения  $x = x(t)$ , подчиненного условию:

$$x(t_0) \in S_k, \quad \|x(t_0) - \xi(t_0)\| < \delta(\varepsilon),$$

будет выполнено неравенство

$$\|x(t) - \xi(t)\| < \varepsilon \quad \text{при } t \geq t_0.$$

Условная устойчивость называется *асимптотической*, если, сверх того,

$$\|x(t) - \xi(t)\| \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty,$$

где

$$\|x(t_0) - \xi(t_0)\| < \Delta$$

( $\Delta$  — некоторая положительная постоянная).

Рассмотрим квазилинейную систему

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \varphi(t, x), \quad (4.22.2)$$

где  $A$  — постоянная матрица, имеющая  $k$  ( $1 \leq k < n$ ) характеристических корней с отрицательными действительными частями, причем  $\varphi(t, x) = o(x)$  равномерно по  $t$ .

Обобщенная теорема Ляпунова (см. [13], [28]). Пусть матрица  $A$  имеет  $k$  характеристических корней с отрицательными действительными частями и  $(n - k)$  характеристических корней с неотрицательными действительными частями, причем вектор-функция  $\varphi(t, x)$  непрерывна по  $t$  при  $t \geq 0$  и удовлетворяет по  $x$  условию Липшица:

$$\begin{aligned} \|\varphi(t, x') - \varphi(t, x)\| &\leq L \|x' - x\| \\ (\|x'\| < \Delta, \|x\| < \Delta, t \geq 0), \end{aligned} \quad (4.22.3)$$

где  $L = L(\Delta)$  и  $L \rightarrow 0$  при  $\Delta \rightarrow 0^1$ ). Тогда тривиальное решение  $x = 0$  системы (4.22.2) условно асимптотически устойчиво относительно некоторого  $k$ -мерного многообразия  $S_k$  начальных значений.

<sup>1)</sup> Для дальнейших рассуждений существенно, что константа Липшица  $L$  может быть выбрана достаточно малой.

Доказательство. Без нарушения общности рассуждения можно принять  $t_0 = 0$ . Положим

$$x = Cy,$$

где действительная неособенная матрица  $C$  такова, что

$$C^{-1}AC \equiv B = \text{diag}(N, P),$$

причем

$$\text{Re } \lambda_j(N) < 0 \quad (j = 1, \dots, k)$$

и

$$\text{Re } \lambda_j(P) \geq 0 \quad (j = k + 1, \dots, n).$$

Тогда система (4.22.2) примет вид

$$\frac{dy}{dt} = By + \Psi(t, y), \quad (4.22.4)$$

где

$$\Psi(t, y) = C^{-1} \varphi(t, Cy).$$

Полагая

$$L_1 = \|C^{-1}\| \cdot \|C\| L,$$

очевидно, имеем

$$\|\Psi(t, y') - \Psi(t, y)\| \leq L_1 \|y' - y\| \quad \text{для } t \geq 0, \quad (4.22.5)$$

если только  $\|y\| < \Delta_1$  и  $\|y'\| < \Delta_1$ , где  $\Delta_1 = \Delta / \|C\|$ .

Пусть  $\beta > 0$  произвольно мало и  $\alpha > 0$  таково, что

$$\alpha + \beta < \min_j [-\text{Re } \lambda_j(N)].$$

Тогда, очевидно, справедливы неравенства

$$\left. \begin{aligned} &\|e^{Nt}\| \leq Ke^{-(\alpha+\beta)t} \quad \text{при } t \geq 0 \\ &\|e^{Pt}\| \leq Ke^{\beta t} \quad \text{при } t \leq 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.22.6)$$

где  $K$  — некоторая достаточно большая положительная постоянная.

Положим

$$G(t) = \begin{cases} e^{\beta t} \text{diag}(E_k, 0) & \text{при } t > 0, \\ -e^{\beta t} \text{diag}(0, E_{n-k}) & \text{при } t < 0, \end{cases} \quad (4.22.7)$$

где  $E_p$  — единичные матрицы соответствующих порядков. Очевидно,

$$G(+0) - G(-0) = E_n.$$

Из неравенств (4.22.6), учитывая, что

$$e^{Bt} = \text{diag} (e^{Nt}, e^{Pt}),$$

получаем

$$\|G(t)\| \leq \begin{cases} Ke^{-(\alpha+\beta)t} & \text{при } t > 0, \\ Ke^{\beta t} & \text{при } t < 0. \end{cases} \quad (4.22.8)$$

Кроме того, очевидно, имеем

$$\dot{G}(t) = BG(t) \quad \text{при } t \neq 0.$$

Рассмотрим сингулярное интегральное уравнение

$$\mathbf{y}(t, \mathbf{a}) = Z(t) \mathbf{a} + \int_0^{\infty} G(t-s) \Psi(s, \mathbf{y}(s, \mathbf{a})) ds, \quad (4.22.9)$$

где

$$Z(t) = e^{Bt} \text{diag} (E_k, 0) \equiv \text{diag} (e^{Nt}, 0)$$

и  $\mathbf{a}$  — постоянный вектор,  $(n-k)$  последних координат которого равны нулю. Для решения интегрального уравнения (4.22.9) применим метод последовательных приближений, полагая

$$\mathbf{y}^{(0)}(t, \mathbf{a}) = 0$$

и

$$\mathbf{y}_p(t, \mathbf{a}) = Z(t) \mathbf{a} + \int_0^{\infty} G(t-s) \Psi(s, \mathbf{y}_{p-1}(s, \mathbf{a})) ds \quad (p = 1, 2, \dots). \quad (4.22.10)$$

Выберем число  $\Delta$  столь малым, чтобы было выполнено неравенство

$$L_1 < \frac{\beta}{4K},$$

и пусть

$$\|\mathbf{a}\| < \frac{\Delta_1}{2K} = a_0.$$

Тогда, учитывая первое из неравенств (4.22.6) при  $t \geq 0$ , будем иметь

$$\|\mathbf{y}(t, \mathbf{a})\| \leq \|Z(t)\| \|\mathbf{a}\| \leq Ke^{-(\alpha+\beta)t} \|\mathbf{a}\| \leq K \|\mathbf{a}\| e^{-\alpha t}.$$

Пусть

$$\|\mathbf{y}_p(t, \mathbf{a}) - \mathbf{y}_{p-1}(t, \mathbf{a})\| \leq \frac{K}{2^{p-1}} \|\mathbf{a}\| e^{-\alpha t} \quad \text{при } t \geq 0 \quad (p \geq 1). \quad (4.22.11)$$



Из формулы (4.22.10), используя неравенства (4.22.8), выводим

$$\begin{aligned} & \|y_{p+1}(t, a) - y_p(t, a)\| \leq \\ & \leq \int_0^{\infty} \|G(t-s)\| \cdot \|\Psi(s, y_p(s, a)) - \Psi(s, y_{p-1}(s, a))\| ds \leq \\ & \leq \int_0^t K e^{-(\alpha+\beta)(t-s)} \cdot \frac{\beta}{4K} \cdot \frac{K}{2^{p-1}} \|a\| e^{-\alpha s} ds + \int_t^{\infty} K e^{\beta(t-s)} \cdot \frac{\beta}{4K} \cdot \frac{K}{2^{p-1}} \|a\| e^{-\alpha s} ds = \\ & = \frac{\beta K}{2^{p+1}} \|a\| e^{-(\alpha+\beta)t} \frac{e^{\beta t} - 1}{\beta} + \frac{\beta K}{2^{p+1}} \|a\| \frac{e^{-(\alpha+\beta)t}}{\alpha + \beta} \leq \\ & \leq \frac{K}{2^{p+1}} \|a\| e^{-\alpha t} \left(1 + \frac{\beta}{\alpha + \beta}\right) \leq \frac{K}{2^p} \|a\| e^{-\alpha t} \quad \text{при } t \geq 0. \end{aligned}$$

Отсюда заключаем, что все приближения  $y_p(t, a)$  имеют смысл, причем неравенство (4.22.11) выполнено для всех натуральных  $p$ . Следовательно,

$$y_p(t, a) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} y(t, a)$$

на  $[0, \infty)$  при  $p \rightarrow \infty$ , причем предельная вектор-функция  $y(t, a)$  непрерывна по совокупности переменных  $t$  и  $a$  при  $0 \leq t < \infty$  и  $\|a\| < a_0$ .

Переходя к пределу при  $p \rightarrow \infty$  в формуле (4.22.10), будем иметь

$$y(t, a) = Z(t) a + \int_0^{\infty} G(t-s) \Psi(s, y(s, a)) ds, \quad (4.22.12)$$

т. е. предельная функция  $y(t, a)$  является решением интегрального уравнения (4.22.9). Дифференцируя последнее равенство по параметру  $t$ , находим

$$\begin{aligned} \dot{y}_t(t, a) &= BZ(t) a + \int_0^t BG(t-s) \Psi(s, y(s, a)) ds + \\ &+ \int_t^{\infty} BG(t-s) \Psi(s, y(s, a)) ds + \\ &+ [G(+0) - G(-0)] \Psi(t, y(t, a)), \end{aligned}$$

т. е.

$$\dot{y}_t(t, a) = By(t, a) + \Psi(t, y(t, a))$$

и, значит,  $y(t, a)$  является решением системы дифференциальных уравнений (4.22.4).

Используя неравенства (4.22.11), получаем

$$\begin{aligned} \|y(t, a)\| &\leq \|y_0(t, a)\| + \sum_{p=1}^{\infty} \|y_p(t, a) - y_{p-1}(t, a)\| \leq \\ &\leq \sum_{p=1}^{\infty} \frac{K}{2^{p-1}} \|a\| e^{-at} = 2K \|a\| e^{-at}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t, a) = 0.$$

Таким образом,  $y(t, a)$  при  $\|a\| < a_0$  представляет собой многообразие решений дифференциальной системы (4.22.4), непрерывно зависящее от  $k$  параметров  $a_1, \dots, a_k$  — первых  $k$  координат вектора  $a$  и стремящихся к нулю при  $t \rightarrow \infty$ .

Из уравнения (4.22.12), учитывая структуру (4.22.7) матрицы  $G(t)$ , для координат  $y_j(t, a)$  ( $j=1, \dots, n$ ) решения  $y(t, a)$  при  $t=0$  будут иметь следующие выражения:

$$y_j(0, a) = a_j \quad (j=1, \dots, k)$$

и

$$y_j(0, a) = \left[ \int_0^{\infty} G(-s) \Psi(s, y(s, a)) ds \right]_j \quad (j=k+1, \dots, n),$$

где  $[ ]_j$  обозначает  $j$ -ю компоненту соответствующего вектора. Поэтому в окрестности начала координат  $O$  эти начальные значения

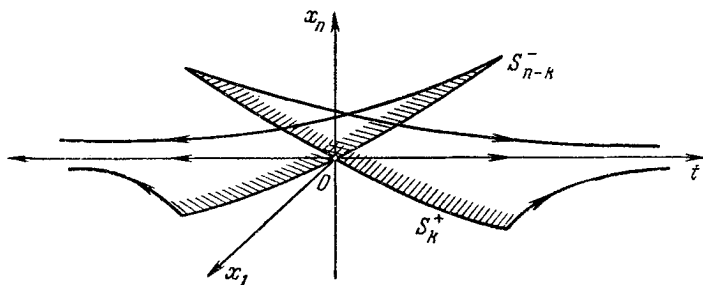


Рис. 49.

$y_j^{(0)} = [y(0, a)]_j$  удовлетворяют системе уравнений

$$y_{k+j}^{(0)} = \theta_j(y_1^{(0)}, \dots, y_k^{(0)}) \quad (j=1, \dots, n-k),$$

которые определяют в пространстве  $\mathcal{E}_y^n$  некоторое  $k$ -мерное многообразие  $S_k$  начальных значений, порождающее решения  $y(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Возвращаясь к прежним переменным

$$\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{y},$$

получим, что аналогичное утверждение справедливо для решений  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  исходной системы (4.22.2).

**Следствие.** Пусть матрица  $A$  имеет  $k$  характеристических корней с отрицательной действительной частью и  $(n - k)$  характеристических корней с положительной действительной частью, причем условие Липшица (4.22.3) для  $\varphi(t, \mathbf{x})$  выполнено для всех  $t \in (-\infty, +\infty)$  и константа Липшица достаточно мала. Тогда в некоторой окрестности точки  $O$  пространства  $\mathcal{R}_x^n$  существуют многообразия  $S_k^+$  и  $S_{n-k}^-$  (рис. 49), соответственно, измерений  $k$  и  $(n - k)$  такие, что для решений  $\mathbf{x}(t)$  системы (4.22.2) справедливы предельные соотношения:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &\rightarrow \mathbf{0} \text{ при } t \rightarrow +\infty, \text{ если } \mathbf{x}(0) \in S_k^+, \\ \mathbf{x}(t) &\rightarrow \mathbf{0} \text{ при } t \rightarrow -\infty, \text{ если } \mathbf{x}(0) \in S_{n-k}^-. \end{aligned}$$

#### Упражнения к главе IV

1. Пусть для приведенной системы

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{X}(t, \mathbf{x}) \quad (\mathbf{X}(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0}) \quad (*)$$

существует ограниченная функция

$$\begin{aligned} V(t, \mathbf{x}) &\in C_{tx}^{(1,1)}(Z), \\ Z &= \{t_0 \leq t < \infty, \|\mathbf{x}\| < H\}, \end{aligned}$$

имеющая полную производную в силу системы (\*):

$$\dot{V}(t, \mathbf{x}) = \alpha V(t, \mathbf{x}) + W(t, \mathbf{x}),$$

где  $\alpha$  — положительное число и  $W(t, \mathbf{x})$  — знакопостоянная функция, причем функция  $V$  такова, что в любой окрестности  $t = t_0, \|\mathbf{x}\| < \delta$  существует точка  $\mathbf{x}_0$ , для которой выполнено неравенство

$$V(t_0, \mathbf{x}_0) W(t_0, \mathbf{x}_0) > 0.$$

Тогда тривиальное решение  $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$  неустойчиво (см. [13]).

2. Пусть для системы (\*) (см. 1) существует ограниченная положительно определенная функция  $V(t, \mathbf{x}) \in C_{tx}^{(1,1)}(Z)$ , производная которой  $\dot{V}(t, \mathbf{x})$  в силу системы (\*) отрицательно определенная. Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  суммарное время пребывания нетривиального решения  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  ( $t_0 \leq t < \infty$ ) вне  $\varepsilon$ -окрестности центра притяжения  $O$  ограничено.

3. Пусть 1)  $A = [a_{jk}]$  — постоянная  $(n \times n)$ -матрица и все решения системы

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}$$

ограничены на полуоси  $t_0 \leq t < \infty$ ; 2)  $f(t, \mathbf{x}) \in C(I_t^+ \times \|\mathbf{x}\| \leq h)$ , причем

$$\|f(t, \mathbf{x})\| \leq g(t) \|\mathbf{x}\|,$$

где

$$\int_{t_0}^{\infty} g(t) dt < \infty.$$

Тогда тривиальное решение  $y = 0$  системы

$$\frac{dy}{dt} = Ay + f(t, y)$$

устойчиво по Ляпунову при  $t \rightarrow \infty$ .

4. Пусть для приведенной системы

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x) \quad (X(t, 0) = 0), \quad (a)$$

где  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $X(t, x) \in C_{tx}^{(0,0)}$  ( $t \in I_t \times \|x\| < H$ ), существует положительно определенная квадратичная форма

$$V(x) = (Ax, x),$$

полная производная которой  $\dot{V}_a(t, x)$  в силу системы (a) удовлетворяет неравенству

$$\dot{V}_a(t, x) \leq -(Bx, x),$$

причем  $-(Bx, x)$  — отрицательно определенная квадратичная форма ( $A$  и  $B$  — постоянные симметрические  $(n \times n)$  — матрицы). Тогда для возмущенной системы

$$\frac{dy}{dt} = X(t, y) + Y(t, y), \quad (b)$$

где

$$Y(t, y) \in C^{(0,0)} \quad (t \in I_t \times \|y\| < H) \text{ и } \|Y(t, y)\| \leq N\|y\|,$$

если постоянная Липшица  $N$  — достаточно мала, то ее тривиальное решение  $y = 0$  — асимптотически устойчиво при  $t \rightarrow \infty$ . Доказать.

5. Пусть

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t, x), \quad (**)$$

где  $A$  — постоянная  $(n \times n)$  — матрица,  $\operatorname{Re} \lambda_j(A) \leq -\sigma < 0$  ( $j = 1, \dots, n$ ) и  $f(t, x) \in C(I_t^* \times \|x\| < H)$ , причем

$$\|f(t, x)\| \leq Me^{\alpha t} \|x\|^{1+\beta}$$

( $\alpha > 0, \beta > 0, M > 0$  — постоянные). Тогда, если  $\alpha < M\sigma$ , то тривиальное решение  $x = 0$  системы (\*\*\*) асимптотически устойчиво (R a m a r k i s c h n a).

6. Пусть

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t, x), \quad (***)$$

где  $A(t) \in C[t_0, \infty)$  и  $f(t, x) \in C(I_t^* \times \|x\| < H)$ .

Если а)  $\|f(t, x)\| \leq \lambda(t)\|x\|$ ;

б)  $\lambda_j[A_s(t)] \leq \mu(t)$  ( $j = 1, \dots, n$ ), где

$$A_s(t) = \frac{1}{2} [A(t) + A^T(t)];$$

в)

$$\int_{t_0}^{\infty} [\lambda(t) + \mu(t)] dt = -\infty,$$

то тривиальное решение  $x=0$  системы (\*\*\*) асимптотически устойчиво в целом (W o p g).

7. Пусть

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x) \quad (X(0, x) = 0) \quad (\text{A})$$

и

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = X(t, \tilde{x}) + R(t, \tilde{x}), \quad (\text{B})$$

где  $X(t, x)$ ,  $R(t, x) \in C_{tx}^{(0,1)}(Z)$  и  $Z = I_t^+ \times (\|x\| < h)$ .

Если существует положительно определенная скалярная функция  $V(t, x) \in C_{tx}^{(0,1)}(Z)$ , удовлетворяющая в  $Z$  условиям:

а)

$$W_1(x) \leq V(t, x) \leq W_2(x), \quad \dot{V}(t, x) \leq -W_3(x),$$

где  $W_k(x)$  ( $k=1, 2, 3$ ) — положительно определенные функции;

б)

$$\sup \left| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right| < \infty \quad (j=1, \dots, n),$$

то тривиальное решение  $x=0$  системы (A) устойчиво при постоянно действующих возмущениях  $R(t, x)$ , т. е. для любого  $\varepsilon > 0$  ( $0 < \varepsilon < h$ ) существует  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  такое, что из неравенств

$$\|\tilde{x}(t_0)\| < \delta, \quad \|R(t, \tilde{x})\| < \delta \quad \text{при } t \geq t_0, \quad \|\tilde{x}\| < \varepsilon$$

вытекает неравенство

$$\|\tilde{x}(t)\| < \varepsilon \quad \text{для всех } t \geq t_0$$

(М а л к и н).

8. Пусть

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (f(t, x) \in C_{tx}(I_t^+ \times \mathcal{R}_x^n)),$$

причем

$$\|f(t, x)\| \leq \lambda(t) \varphi(\|x\|),$$

где  $\lambda(t)$  ( $0 \leq t < \infty$ ) и  $\varphi(r)$  ( $0 < r < \infty$ ) положительны, непрерывны и таковы, что

$$\int_0^\infty \lambda(t) dt < \infty, \quad \int_0^\infty \frac{dr}{\varphi(r)} = \infty.$$

Тогда решение  $x(t; t_0, x_0)$  равномерно ограничено, т. е.  $\sup \|x(t; t_0, x_0)\| \leq C(r_0) < \infty$  при  $0 \leq t < \infty$  и  $\|x_0\| \leq r_0 < \infty$  (В и н т н е р).

9. Пусть

$$\dot{\tilde{x}} + f(x, \dot{x}) \tilde{x} + g(x) = e(t),$$

где  $f(x, \dot{x})$ ,  $g(x) \in C(\mathcal{E}^2)$  и  $e(t) \in C[0, \infty)$ .

Если а)  $f(x, \dot{x}) \geq 0$ ; б)  $G(x) = \int_0^x g(\xi) d\xi > 0$  при  $x \neq 0$  и  $G(x) \rightarrow \infty$  при  $|x| \rightarrow \infty$ ; в)  $\int_0^\infty |e(t)| dt < \infty$ , то каждое решение  $x(t)$  предельно ограничено вместе со своей производной  $\dot{x}(t)$  при  $t \rightarrow \infty$  (см. § 17) (А н т о с и е в и ч).  
У к а з а н и е. Рассмотреть функцию Ляпунова

$$V(t, x, y) = \sqrt{\frac{y^2}{2} + G(x)} - \int_0^t |e(t_1)| dt_1.$$

10. Пусть для автономной системы

$$\frac{dx}{dt} = X(x) \quad (X(0) = 0), \quad (****)$$

где  $X(x) \in C(\mathcal{R}_x^n)$ , существует скалярная функция  $V(x) \in C^{(1)}(\mathcal{R}_x^n)$ , удовлетворяющая в ограниченной области  $\Omega_l = \{x \in \mathcal{R}_x^n : V(x) < l\}$  условиям:

а)  $V(x) > 0$  при  $x \neq 0$ ; б)  $\dot{V}(x) \leq 0$ . Далее, пусть  $M$  — максимальное непустое инвариантное множество (т. е. множество, содержащее вместе с точкой  $x_0$  всю траекторию  $\{x(t, x_0), -\infty < t < +\infty\}$ ) такое, что

$$M \subset \Omega_l \cap \{\dot{V}(x) = 0\}.$$

Тогда каждое решение  $x(t)$  системы (\*\*\*\*), начинающееся в  $\Omega_l$ , неограниченно приближается к  $M$  при  $t \rightarrow \infty$  (Л е ф ш е ц и Л а-С а л л ь [45]).

11. Пусть  $x = (x_1, \dots, x_p)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_q)$  и

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, y), \quad (a)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(t, x, y), \quad (b)$$

где  $f, g \in C_t^{(0,1,1)}(I_t^+ \times \mathcal{R}_x^p \times \mathcal{R}_y^q)$ , причем  $f(0, x, y) = g(0, x, y) = 0$  при  $t \geq t_0$ .

Говорят, что начало координат  $Ox$  системы (а) квазистойчиво, если для всякого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$  такое, что любое решение  $\tilde{x}(t)$  вспомогательной системы

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = f(t, \tilde{x}, \eta(t)),$$

где  $\eta(t)$  — непрерывный  $q$ -мерный вектор, при  $\|\tilde{x}(t_0)\| < \delta$  и  $\|\eta(t_0)\| < \delta$  удовлетворяет неравенству

$$\|\tilde{x}(t)\| < \varepsilon$$

на любом отрезке  $t_0 \leq t \leq t_1$ , для которого  $\|\eta(t)\| \leq \varepsilon$ .

Доказать теорему Персидского (см. [21]): если начала координат как  $O_x$ , так и  $O_y$ , систем (а) и (б), соответственно, квазистойчивы, то начало координат  $O$  полной системы ((а), (б)) также устойчиво.

12. Исследовать на устойчивость тривиальное решение  $x=0$  скалярного уравнения

$$\ddot{x} + x = \mu \dot{x} (ax^2 + 2bx\dot{x} + c\dot{x}^2) \\ (a > 0, \quad ac - b^2 > 0),$$

где  $a, b, c$  — постоянные и  $\mu$  — действительный скалярный параметр (см. [21]).

13. Исследовать на орбитальную устойчивость периодическое решение  $\xi = \sin t$  скалярного уравнения

$$\ddot{x} + \mu \dot{x} (x^2 + \dot{x}^2 - 1) + x = 0,$$

где  $\mu$  — действительный скалярный параметр.

14. Для треугольной нелинейной системы

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1), \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2), \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{aligned} \right\}$$

где  $f_j \in C^1(\mathcal{E}_x^n)$  ( $j=1, \dots, n$ ), получить достаточные условия асимптотической орбитальной устойчивости ее  $\omega$ -периодического решения

$$x_j = p_j(t) \quad (j=1, \dots, n).$$

## АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

### § 1. Равномерная сходимость семейства функций

Пусть имеется бесконечное семейство комплекснозначных вектор-функций действительной переменной  $t$

$$y_\lambda = f(t, \lambda), \quad (5.1.1)$$

зависящих от действительного параметра  $\lambda$  и определенное на некотором множестве  $\omega = \{t \in T \subset \mathcal{R}^1, \lambda \in \Lambda \subset \mathcal{R}^k\}$ , причем значения функции  $f(t, \lambda) \in \mathfrak{R}_y^n$ .

**Определение.** Говорят (см. [7]), что при  $\lambda \rightarrow \lambda_0 \in \Lambda$  семейство (5.1.1) равномерно по  $t$  сходится к предельной вектор-функции  $\varphi(t)$ , т. е.

$$f(t, \lambda) \xrightarrow{t} \varphi(t) \text{ на } T \text{ при } \lambda \rightarrow \lambda_0, \quad (5.1.2)$$

если для  $\forall \varepsilon > 0$  существует  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  такое, что

$$\|f(t, \lambda) - \varphi(t)\| < \varepsilon \quad (5.1.3)$$

при  $t \in T$  и  $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ .

**Теорема.** Для того чтобы семейство функций (5.1.1) при  $\lambda \rightarrow \lambda_0$  равномерно на множестве  $T$  сходилось к предельной вектор-функции  $\varphi(t)$ , необходимо и достаточно, чтобы из каждой последовательности  $f(t, \lambda_k)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), где  $\lambda_k \rightarrow \lambda_0$ , можно было бы выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность

$$f(t, \lambda_{p_k}) \xrightarrow{t} \varphi(t) \quad (t \in T). \quad (5.1.4)$$

**Доказательство.** Необходимость условий теоремы ясна, так как в случае равномерной сходимости семейства  $f(t, \lambda)$  при  $\lambda \rightarrow \lambda_0$  к предельной вектор-функции  $\varphi(t)$  каждая последовательность  $f(t, \lambda_k)$ , где  $\lambda_k \rightarrow \lambda_0$ , очевидно, также будет равномерно сходиться к  $\varphi(t)$ .

Докажем достаточность условий теоремы. Пусть семейство  $f(t, \lambda)$  не является равномерно сходящимся при  $\lambda \rightarrow \lambda_0$  к общей предельной вектор-функции  $\varphi(t)$  всех последовательностей  $f(t, \lambda_k)$ , где  $\lambda_k \rightarrow \lambda_0$ . Тогда существует  $\varepsilon > 0$  такое, что для любого  $\delta_k < \frac{1}{k}$



( $k = 1, 2, \dots$ ) найдется значение параметра  $\lambda_k \in \Lambda$ , обладающее следующими свойствами:

$$|\lambda_k - \lambda_0| < \frac{1}{k} \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (5.1.5)$$

и

$$\sup_{t \in T} \|f(t, \lambda_k) - \Phi(t)\| \geq \varepsilon. \quad (5.1.6)$$

Из неравенств (5.1.5) и (5.1.6) вытекает, что из последовательности  $f(t, \lambda_k)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) нельзя выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся к вектор-функции  $\Phi(t)$ , и мы приходим к противоречию.

Теорема доказана.

## § 2. Теорема Арцеля

**Определение 1.** Семейство вектор-функций  $f(t, \lambda)$  ( $t \in T$ ,  $\lambda \in \Lambda$ ) называется *равномерно ограниченным*, если существует постоянная  $M$  такая, что

$$\|f(t, \lambda)\| \leq M, \quad (5.2.1)$$

где  $f(t, \lambda)$  — любая функция семейства.

**Определение 2.** Семейство вектор-функций  $f(t, \lambda)$  называется *равнostenенно непрерывным* на множестве  $T$ , если для  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  общее для всего семейства, т. е. такое, что для каждой вектор-функции  $f(t, \lambda)$  семейства выполнено неравенство

$$\|f(t', \lambda) - f(t'', \lambda)\| < \varepsilon, \quad (5.2.2)$$

если только

$$|t' - t''| < \delta, \quad t' \in T, \quad t'' \in T.$$

**Пример.** Вектор-функции  $f(t, \lambda)$ , обладающие равномерно ограниченными производными  $f'_i(t, \lambda)$  ( $\|f'_i(t, \lambda)\| \leq M_1$ ) на промежутке  $a < t < b$ , образуют равнostenенно непрерывное семейство.

Действительно, предполагая, например, что норма вектора — евклидова, на основании теоремы Лагранжа, примененной к каждой компоненте, имеем

$$\|f(t', \lambda) - f(t'', \lambda)\| = \|(t' - t'') f'_i(\tau, \lambda)\| \leq \sqrt{n} M_1 |t' - t''| < \varepsilon,$$

если только

$$|t' - t''| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n} M_1} = \delta \quad (t', t'' \in (a, b), t' < \tau < t'').$$

**Теорема Арцеля.** Из каждого бесконечного семейства вектор-функций  $f(t, \lambda)$  ( $\lambda \in \Lambda$ ), равномерно ограниченного и равнostenенно

пенно непрерывного на конечном промежутке  $(a, b)$ , можно выделить равномерно сходящуюся на  $(a, b)$  последовательность

$$f(t, \lambda_k) \quad (k=1, 2, \dots; \lambda_k \in \Lambda).$$

Доказательство (см. [9], [51]). Рассмотрим счетное всюду плотное множество точек  $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$  на промежутке  $(a, b)$ , например множество рациональных точек. Множество значений  $f(t_1, \lambda) \in \mathfrak{R}^n (\lambda \in \Lambda)$  бесконечно и ограничено и, следовательно, из него можно выделить сходящуюся последовательность  $f(t_1, \lambda_m^{(1)})$  ( $m=1, 2, \dots$ ). Далее, множество значений  $f(t_2, \lambda_m^{(1)})$  ( $m=1, 2, \dots$ ) также бесконечно и ограничено и, значит, допускает сходящуюся последовательность  $f(t_2, \lambda_m^{(2)})$ , где числа  $\lambda_m^{(2)}$  являются частью чисел  $\lambda_m^{(1)}$ . Продолжая рассуждение, получим счетное множество вложенных последовательностей

$$\begin{aligned} & f(t, \lambda_1^{(1)}), f(t, \lambda_2^{(1)}), \dots; \\ & f(t, \lambda_1^{(2)}), f(t, \lambda_2^{(2)}), \dots, \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

из которых первая сходится в точке  $t_1$ , вторая — в точках  $t_1$  и  $t_2$  и т. д.

Рассмотрим диагональную последовательность

$$f_1(t) = f(t, \lambda_1^{(1)}), f_2(t) = f(t, \lambda_2^{(2)}), \dots, f_k(t) = f(t, \lambda_k^{(k)}), \dots \quad (5.2.3)$$

Так как для любого  $m$ , при  $k \geq m$ , члены диагональной последовательности  $f_k(t)$  образуют подпоследовательность последовательности  $\{f(t, \lambda_m^{(k)})\}$  ( $k=1, 2, \dots$ ), сходящейся в точке  $t_m$ , то диагональная последовательность сходится в каждой точке  $t_m$  ( $m=1, 2, \dots$ ).

Докажем теперь, что диагональная последовательность  $\{f_k(t)\}$  сходится равномерно на всем промежутке  $(a, b)$ .

Пусть  $\varepsilon > 0$  произвольно. На основании равномерной непрерывности семейства вектор-функций  $f(t, \lambda)$  можно определить число  $\delta = \delta\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) > 0$ , соответствующее числу  $\frac{\varepsilon}{3}$ . Так как промежутки  $(a, b)$  конечны и множество  $\{t_m\}$  всюду плотно на  $(a, b)$ , то найдется конечная система точек  $t_{\alpha_1}, t_{\alpha_2}, \dots, t_{\alpha_p}$ , представляющая собой  $\delta$ -сеть на  $(a, b)$ , т. е. такая, что каждая точка  $t \in (a, b)$  будет содержаться в  $\delta$ -окрестности одной из точек  $t_{\alpha_i}$  ( $i=1, 2, \dots, p$ ). На этой конечной системе точек диагональная последовательность (5.2.3) сходится и, следовательно, для нее выполнен критерий Коши, причем, ввиду конечности числа точек, равно-

мерно относительно данных точек. Иными словами, найдется число  $N = N\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$  такое, что при  $m \geq N$  и  $k \geq N$ ,

$$\|f_m(t_{\alpha_i}) - f_k(t_{\alpha_i})\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (i = 1, 2, \dots, p). \quad (5.2.4)$$

Пусть  $t$  — произвольная точка промежутка  $(a, b)$  и  $t_{\alpha_j}$  — ближайшая точка  $\delta$ -сети, т. е.

$$|t - t_{\alpha_j}| < \delta. \quad (5.2.5)$$

Тогда в силу равностепенной непрерывности функций  $\{f_k(t)\}$  и выбора числа  $\delta$  имеем

$$\|f_m(t) - f_m(t_{\alpha_j})\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (5.2.6)$$

и

$$\|f_k(t) - f_k(t_{\alpha_j})\| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (5.2.7)$$

Далее, при  $m \geq N$  и  $k \geq N$  получаем

$$\|f_m(t_{\alpha_j}) - f_k(t_{\alpha_j})\| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (5.2.8)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|f_m(t) - f_k(t)\| &\leq \|f_m(t) - f_m(t_{\alpha_j})\| + \|f_m(t_{\alpha_j}) - f_k(t_{\alpha_j})\| + \\ &+ \|f_k(t_{\alpha_j}) - f_k(t)\| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned} \quad (5.2.9)$$

Таким образом, для последовательности  $\{f_k(t)\}$  на  $(a, b)$  выполнено условие критерия Коши и, значит, эта последовательность равномерно на  $(a, b)$  сходится к некоторой предельной вектор-функции  $\varphi(t)$ , т. е.

$$f_k(t) = f(t, \lambda_k^{(k)}) \xrightarrow[t]{} \varphi(t) \text{ на } (a, b).$$

Так как члены последовательности  $\{f_k(t)\}$  непрерывны, то предельная функция  $\varphi(t)$  непрерывна на промежутке  $(a, b)$ .

Теорема доказана.

*Следствие.* Пусть семейство вектор-функций  $f(t, \lambda)$  ( $\lambda \in \Lambda$ ) равномерно ограничено и равностепенно непрерывно на бесконечном интервале  $(t_0, \infty)$ . Тогда из этого семейства можно выделить последовательность  $f_k(t) = f(t, \lambda_k)$  ( $k = 1, 2, \dots; \lambda_k \in \Lambda$ ), сходящуюся на интервале  $(t_0, \infty)$  к непрерывной вектор-функции  $\varphi(t)$  равномерно на каждом конечном промежутке  $(a, b) \subset (t_0, \infty)$ .

Это проверяется непосредственно путем последовательного применения теоремы Арцеля к системе расширяющихся конечных промежутков

$$(a_1, b_1) \subset (a_2, b_2) \subset (a_3, b_3) \subset \dots,$$

исчерпывающей весь интервал  $(t_0, \infty)$ :

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k) = (t_0, \infty).$$

**З а м е ч а н и е.** Равномерной сходимости выделенной последовательности  $\{f_k(t)\}$  на всем интервале  $(t_0, \infty)$  в общем случае гарантировать нельзя.

### § 3. Теорема Красносельского и Крейна

Пусть

$$X(t, \mathbf{x}, \lambda) \quad (5.3.1)$$

— вектор-функция, определенная в области

$$\Omega = \{t \in [0, T] \times \mathbf{x} \in D \subset \mathcal{E}^n \times \lambda \in \Lambda\}$$

и имеющая значения  $X(t, \mathbf{x}, \lambda) \in \mathfrak{R}^n$ .

**О п р е д е л е н и е.** Будем говорить, что данная вектор-функция  $X(t, \mathbf{x}, \lambda)$  *интегрально непрерывна* в  $\Omega$  по параметру  $\lambda$  в точке сгущения  $\lambda_0 \in \Lambda$ , если для любых  $t \in [0, T]$  и  $\mathbf{x} \in D$  имеет место предельное соотношение

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \int_0^t X(\tau, \mathbf{x}, \lambda) d\tau = \int_0^t X(\tau, \mathbf{x}, \lambda_0) d\tau. \quad (5.3.2)$$

**З а м е ч а н и е.** Условие интегральной непрерывности не эквивалентно обычной непрерывности. Например, функция

$$X(t, \lambda) = \begin{cases} \sin \frac{t}{\lambda} & \text{при } \lambda \neq 0, \\ 0 & \text{при } \lambda = 0 \end{cases}$$

не является в области  $\{0 \leq t \leq T, -\infty < \lambda < \infty\}$  непрерывной по  $\lambda$  при  $\lambda = 0$ . Однако эта функция интегрально непрерывна по  $\lambda$  при  $\lambda = 0$ , так как для каждого отрезка  $[0, t] \subset [0, T]$  имеем

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_0^t X(\tau, \lambda) d\tau &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_0^t \sin \frac{\tau}{\lambda} d\tau = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda \left(1 - \cos \frac{t}{\lambda}\right) = \\ &= 0 = \int_0^t X(\tau, 0) d\tau. \end{aligned}$$

Теорема Красносельского и Крейна (см. [55]).  
(Обобщение теоремы о переходе к пределу под знаком интеграла.)

Пусть

1)  $X(t, \mathbf{x}, \lambda) \in C_t(\Omega)$ , где  $\Omega = [0, T] \times D \times \Lambda$ ;

2)  $X(t, \mathbf{x}, \lambda) \in C_x(\Omega)$  равномерно по совокупности переменных  $t, \mathbf{x}, \lambda$  в  $\Omega$ , т. е. для  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$  такое, что для любых  $t \in [0, T]$ ,  $\mathbf{x} \in D$ ,  $\mathbf{x}' \in D$  и  $\lambda \in \Lambda$  справедливо неравенство

$$\|X(t, \mathbf{x}', \lambda) - X(t, \mathbf{x}, \lambda)\| < \varepsilon,$$

если только  $\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\| < \delta$ ;

3)  $X(t, \mathbf{x}, \lambda)$  в  $\Omega$  интегрально непрерывна по параметру  $\lambda$  в точке сгущения  $\lambda_0 \in \Lambda$ , т. е. при любых  $t \in [0, T]$  и  $\mathbf{x} \in D$  справедлива формула (5.3.2).

Тогда, если  $\mathbf{x}_\lambda(t) = \mathbf{x}(t, \lambda)$  — семейство вектор-функций, кусочно-непрерывных по  $t$  на  $[0, T]$  со значениями  $\mathbf{x}_\lambda(t) \in D$  при  $t \in [0, T]$  и  $\lambda \in \Lambda$ , причем

$$\mathbf{x}_\lambda(t) \xrightarrow[t]{} \mathbf{x}_{\lambda_0}(t) \text{ при } \lambda \rightarrow \lambda_0 \quad (t \in [0, T]), \quad (5.3.3)$$

то

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \int_0^t X(\tau, \mathbf{x}_\lambda(\tau), \lambda) d\tau = \int_0^t X(\tau, \mathbf{x}_{\lambda_0}(\tau), \lambda_0) d\tau \quad (0 \leq t \leq T). \quad (5.3.4)$$

Доказательство (см. [55]). 1) Докажем сначала, что формула (5.3.2) справедлива для любой кусочно-постоянной вектор-

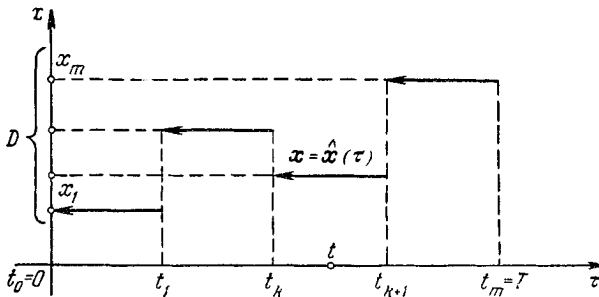


Рис. 50.

функции  $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}(\tau)$ , где  $\hat{\mathbf{x}}(\tau) = \mathbf{x}_\nu = \text{const}$  при  $t_{\nu-1} < \tau \leq t_\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots, m$ ;  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m = T$ ), причем  $\mathbf{x}_\nu \in D$  ( $\nu = 1, 2, \dots, m$ ) (рис. 50).

Пусть

$$t_k < t \leq t_{k+1} \quad (k \leq m-1).$$

Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^t \mathbf{X}(\tau, \hat{\mathbf{x}}(\tau), \lambda) d\tau &= \sum_{\nu=1}^k \int_{t_{\nu-1}}^{t_\nu} \mathbf{X}(\tau, \mathbf{x}_\nu, \lambda) d\tau + \int_{t_k}^t \mathbf{X}(\tau, \mathbf{x}_{k+1}, \lambda) d\tau = \\ &= \sum_{\nu=1}^k \left[ \int_0^{t_\nu} \mathbf{X}(\tau, \mathbf{x}_\nu, \lambda) d\tau - \int_0^{t_{\nu-1}} \mathbf{X}(\tau, \mathbf{x}_\nu, \lambda) d\tau \right] + \\ &\quad + \left[ \int_0^t \mathbf{X}(\tau, \mathbf{x}_{k+1}, \lambda) d\tau - \int_0^{t_k} \mathbf{X}(\tau, \mathbf{x}_{k+1}, \lambda) d\tau \right]. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при  $\lambda \rightarrow \lambda_0$  в этом равенстве и учитывая условие (5.3.2), при  $0 \leq t \leq T$  получаем

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \int_0^t \mathbf{X}(\tau, \hat{\mathbf{x}}(\tau), \lambda) d\tau &= \\ &= \sum_{\nu=1}^k \left[ \int_0^{t_\nu} \mathbf{X}(\tau, \mathbf{x}_\nu, \lambda_0) d\tau - \int_0^{t_{\nu-1}} \mathbf{X}(\tau, \mathbf{x}_\nu, \lambda_0) d\tau \right] + \\ &\quad + \left[ \int_0^t \mathbf{X}(\tau, \mathbf{x}_{k+1}, \lambda_0) d\tau - \int_0^{t_k} \mathbf{X}(\tau, \mathbf{x}_{k+1}, \lambda_0) d\tau \right] = \\ &= \int_0^t \mathbf{X}(\tau, \hat{\mathbf{x}}(\tau), \lambda_0) d\tau. \end{aligned} \quad (5.3.5)$$

2) Пусть теперь для вектор-функции  $\mathbf{x}_\lambda(t)$  выполнено условие (5.3.3). Рассмотрим произвольно малое число  $\varepsilon > 0$  и выберем  $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$ . Так как  $\mathbf{X}(t, \mathbf{x}, \lambda)$  равномерно непрерывна по  $\mathbf{x}$  в области  $\omega$ , то существует  $\delta > 0$  такое, что

$$\| \mathbf{X}(t, \mathbf{x}_1, \lambda) - \mathbf{X}(t, \mathbf{x}_2, \lambda) \| < \varepsilon_1 \quad (5.3.6)$$

при  $\| \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \| < \delta$ , если только  $t \in [0, T]$ ,  $\mathbf{x}_1 \in D$ ,  $\mathbf{x}_2 \in D$  и  $\lambda \in \Lambda$ . Из равномерной сходимости семейства  $\mathbf{x}_\lambda(t)$  к вектор-функции  $\mathbf{x}_{\lambda_0}(t)$  следует, что

$$\| \mathbf{x}_\lambda(t) - \mathbf{x}_{\lambda_0}(t) \| < \delta \quad (5.3.7)$$

при  $0 \leq t \leq T$  и  $\lambda \in U(\lambda_0)$ .

Наконец, ввиду кусочной непрерывности предельной вектор-функции  $\mathbf{x}_{\lambda_0}(t)$  найдется кусочно-постоянная вектор-функция  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  такая, что

$$\| \mathbf{x}_{\lambda_0}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t) \| < \delta \quad (5.3.8)$$

при  $0 \leq t \leq T$  (рис. 51). Для  $t \in [0, T]$  имеем

$$\begin{aligned}
 I &= \left\| \int_0^t X(\tau, x_\lambda(\tau), \lambda) d\tau - \int_0^t X(\tau, x_{\lambda_0}(\tau), \lambda_0) d\tau \right\| \leq \\
 &\leq \int_0^t \| X(\tau, x_\lambda(\tau), \lambda) - X(\tau, x_{\lambda_0}(\tau), \lambda) \| d\tau + \\
 &+ \int_0^t \| X(\tau, x_{\lambda_0}(\tau), \lambda) - X(\tau, \hat{x}(\tau), \lambda) \| d\tau + \\
 &+ \left\| \int_0^t [X(\tau, \hat{x}(\tau), \lambda) - X(\tau, \hat{x}(\tau), \lambda_0)] d\tau \right\| + \\
 &+ \int_0^t \| X(\tau, \hat{x}(\tau), \lambda_0) - X_0(\tau, x_{\lambda_0}(\tau), \lambda_0) \| d\tau = \\
 &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \quad (5.3.9)
 \end{aligned}$$

Так как вектор-функция  $\hat{x}(\tau)$  кусочно-постоянная, то в силу

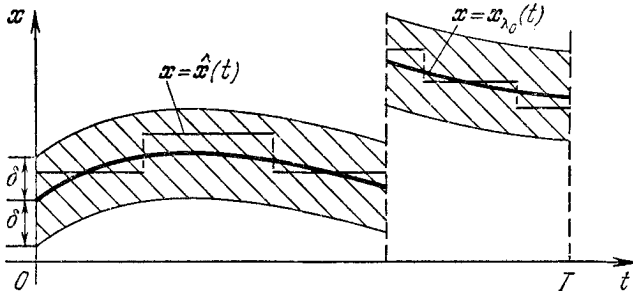


Рис. 51.

формулы (5.3.5) при любом фиксированном  $t \in [0, T]$  окрестность  $U(\lambda_0; t)$  можно выбрать так, чтобы

$$I_3 = \left\| \int_0^t [X(\tau, \hat{x}(\tau), \lambda) - X(\tau, \hat{x}(\tau), \lambda_0)] d\tau \right\| < \varepsilon_1 \quad (5.3.10)$$

при  $\lambda \in U(\lambda_0; t)$ .

Далее, на основании неравенства (5.3.6), учитывая неравенства (5.3.7) и (5.3.8), получаем

$$I_1 = \int_0^t \| X(\tau, x_\lambda(\tau), \lambda) - X(\tau, x_{\lambda_0}(\tau), \lambda) \| d\tau < \varepsilon_1 t \leq \varepsilon_1 T;$$

$$I_2 = \int_0^t \| X(\tau, x_{\lambda_0}(\tau), \lambda) - X(\tau, \hat{x}(\tau), \lambda) \| d\tau < \varepsilon_1 t \leq \varepsilon_1 T$$

и

$$I_4 = \int_0^t \|X(\tau, \hat{\mathbf{x}}(\tau, \lambda_0) - X(\tau, \mathbf{x}_{\lambda_0}(\tau), \lambda_0)\| d\tau < \varepsilon_1 t \leq \varepsilon_1 T.$$

Таким образом, из (5.3.9) и (5.3.10) имеем

$$I < \varepsilon_1(1 + 3T) < \varepsilon,$$

если принять  $\varepsilon_1 < \frac{\varepsilon}{1+3T}$ , где  $\lambda \in U(\lambda_0; t)$ . Следовательно,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \int_0^t X(\tau, \mathbf{x}_\lambda(\tau), \lambda) d\tau = \int_0^t X(\tau, \mathbf{x}_{\lambda_0}(\tau), \lambda_0) d\tau$$

для любого  $t \in [0, T]$ .

#### § 4. Теорема Н. Н. Боголюбова

Пусть в области  $\Omega = \{0 \leq t < \infty, \mathbf{x} \in D \subset \mathbb{E}^n\}$  ( $D$ -область) определена нелинейная система

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \varepsilon \mathbf{X}(t, \mathbf{x}), \quad (5.4.1)$$

зависящая от малого положительного параметра  $\varepsilon$ , где

$$\mathbf{X}(t, \mathbf{x}) \in C_t(\Omega) \cap \text{Lip}_x(\Omega),$$

причем  $\mathbf{X}(t, \mathbf{x})$  равномерно ограничена в  $\Omega$ :

$$\|\mathbf{X}(t, \mathbf{x})\| \leq M \quad (5.4.2)$$

( $\|\mathbf{X}\|$  — евклидова норма).

Теорема Боголюбова (см. [56]). Пусть 1) для каждого  $\mathbf{x} \in D$  существует равномерный по  $\mathbf{x}$  конечный предел

$$\mathbf{Y}(\mathbf{x}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \int_0^N \mathbf{X}(t, \mathbf{x}) dt \in C(D); \quad (5.4.3)$$

2) усредненное уравнение

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \varepsilon \mathbf{Y}(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(0, \varepsilon) = \mathbf{x}_0 \in D, \quad (5.4.4)$$

имеет единственное решение  $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t, \varepsilon) \in D$ , определенное при  $\varepsilon = 1$  на сегменте  $[0, T_1]$ . Тогда для каждого  $\eta > 0$  существует  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\eta) > 0$  такое, что решение  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \varepsilon)$  данного уравнения (5.4.1) и решение усредненного уравнения (5.4.4) с одинаковыми



начальными условиями:  $\mathbf{x}(0, \varepsilon) = \mathbf{y}(0, \varepsilon) = \mathbf{x}_0$  при  $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$ , будут удовлетворять неравенству

$$\|\mathbf{x}(t, \varepsilon) - \mathbf{y}(t, \varepsilon)\| < \eta \quad (5.4.5)$$

на некотором отрезке  $0 \leq t \leq \frac{T}{\varepsilon}$ , где  $0 < T \leq T_1$ .

Доказательство. Пусть  $\rho > 0$  — расстояние начальной точки  $\mathbf{x}_0$  от границы области  $D$ . Тогда в силу неравенства (5.4.2) решение  $\mathbf{x}(t, \varepsilon)$  уравнения (5.4.1) с начальным условием:  $\mathbf{x}(0, \varepsilon) = \mathbf{x}_0$ , будет определено по меньшей мере в промежутке  $0 \leq t \leq \frac{\rho}{M\varepsilon\sqrt{n}}$  (см. [12]). Примем

$$T = \min \left( T_1, \frac{\rho}{M\sqrt{n}} \right).$$

Введем «медленное время»

$$\tau = \varepsilon t.$$

В таком случае уравнения (5.4.1) и (5.4.4) при  $\varepsilon > 0$  можно записать следующим образом:

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \mathbf{X} \left( \frac{\tau}{\varepsilon}, \mathbf{x} \right) \equiv \mathbf{Y}(\tau, \mathbf{x}, \varepsilon) \quad (5.4.6)$$

и

$$\frac{d\mathbf{y}}{d\tau} = \mathbf{Y}(\mathbf{y}). \quad (5.4.7)$$

Если положить

$$\mathbf{Y}(t, \mathbf{x}, 0) = \mathbf{Y}(\mathbf{x}),$$

то функция  $\mathbf{Y}(t, \mathbf{x}, \varepsilon)$  будет в  $\Omega$  интегрально непрерывна по параметру  $\varepsilon$  при  $\varepsilon = 0$ . Действительно, на основании условия (5.4.3) при  $0 \leq t < \infty$  и  $\mathbf{x} \in D$  имеем

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^t \mathbf{Y}(\tau, \mathbf{x}, \varepsilon) d\tau &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^t \mathbf{X} \left( \frac{\tau}{\varepsilon}, \mathbf{x} \right) d\tau = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon \int_0^{\frac{t}{\varepsilon}} \mathbf{X}(\theta, \mathbf{x}) d\theta = t \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{t/\varepsilon} \int_0^{\frac{t}{\varepsilon}} \mathbf{X}(\theta, \mathbf{x}) d\theta = \\ &= t\mathbf{Y}(\mathbf{x}) = \int_0^t \mathbf{Y}(\mathbf{x}) d\tau = \int_0^t \mathbf{Y}(\tau, \mathbf{x}, 0) d\tau. \end{aligned}$$

Записывая уравнения (5.4.6) и (5.4.7) в интегральной форме при  $0 \leq \tau \leq T$  и  $\varepsilon > 0$ , получим

$$\mathbf{x}(\tau, \varepsilon) = \mathbf{x}_0 + \int_0^\tau \mathbf{Y}(\theta, \mathbf{x}(\theta, \varepsilon), \varepsilon) d\theta \quad (5.4.8)$$

и

$$\mathbf{y}(\tau) = \mathbf{x}_0 + \int_0^\tau \mathbf{Y}(\mathbf{y}(\theta)) d\theta. \quad (5.4.9)$$

Отсюда, полагая

$$\mathbf{x}(\tau, 0) \equiv \mathbf{y}(\tau),$$

будем иметь, что уравнение (5.4.8) справедливо при  $\varepsilon \geq 0$  и  $\tau \in [0, T]$ .

Рассмотрим семейство решений  $\{\mathbf{x}(\tau, \varepsilon)\}$ , где  $0 \leq \tau \leq T$  и  $\varepsilon > 0$ . Это семейство равномерно ограничено на  $[0, T]$ , так как в силу неравенства (5.4.2), учитывая, что  $\mathbf{Y}(\theta, \mathbf{x}, \varepsilon) = \mathbf{X}\left(\frac{\theta}{\varepsilon}, \mathbf{x}\right)$  при  $\varepsilon > 0$ , из уравнения (5.4.8) получаем

$$\|\mathbf{x}(\tau, \varepsilon)\| \leq \|\mathbf{x}_0\| + \int_0^\tau \|\mathbf{Y}(\theta, \mathbf{x}(\theta, \varepsilon), \varepsilon)\| d\theta \leq \|\mathbf{x}_0\| + MT.$$

Кроме того, данное семейство является равномерно непрерывным по  $\tau$  на  $[0, T]$  ввиду того, что на основании уравнений (5.4.6) и (5.4.7) производная  $\frac{d\mathbf{x}}{d\tau}$  равномерно ограничена на  $[0, T]$  (см. пример из § 2).

В силу теоремы Арцеля из каждой последовательности  $\mathbf{x}(\tau, \varepsilon_k)$  ( $k=1, 2, \dots$ ), где  $\varepsilon_k \rightarrow +0$ , можно выделить равномерно сходящуюся на  $[0, T]$  подпоследовательность

$$\mathbf{x}(\tau, \varepsilon_{p_k}) \xrightarrow[\tau]{} \tilde{\mathbf{y}}(\tau) \quad (0 \leq \tau \leq T) \quad \text{при } \varepsilon_{p_k} \rightarrow 0. \quad (5.4.10)$$

Очевидно, имеем

$$\mathbf{x}(\tau, \varepsilon_{p_k}) = \mathbf{x}_0 + \int_0^\tau \mathbf{Y}(\theta, \mathbf{x}(\theta, \varepsilon_{p_k}), \varepsilon_{p_k}) d\theta \quad (k=1, 2, \dots).$$

Переходя к пределу при  $k \rightarrow \infty$  в этом равенстве и используя теорему Красносельского — Крейна, получим

$$\tilde{\mathbf{y}}(\tau) = \mathbf{x}_0 + \int_0^\tau \mathbf{Y}(\theta, \tilde{\mathbf{y}}(\theta), 0) d\theta \equiv \mathbf{x}_0 + \int_0^\tau \mathbf{Y}(\tilde{\mathbf{y}}(\theta)) d\theta \quad (0 \leq \tau \leq T).$$

Отсюда

$$\frac{dy}{d\tau} = Y(\tilde{y}(\tau))$$

и  $\tilde{y}(0) = x_0$ . Так как уравнение (5.4.7) в силу условия теоремы при  $0 \leq \tau \leq T$  имеет единственное решение  $y(\tau)$ , удовлетворяющее начальному условию:  $y(0) = x_0$ , то

$$\tilde{y}(\tau) \equiv y(\tau) \text{ при } 0 \leq \tau \leq T.$$

Следовательно, из любой последовательности

$x(\tau, \varepsilon_k)$  ( $k=1, 2, \dots$ ), где  $\varepsilon_k \rightarrow +0$ , можно выбрать подпоследовательность  $x(\tau, \varepsilon_{p_k})$  ( $k=1, 2, \dots$ ), равномерно сходящуюся на  $[0, T]$  к одной и той же предельной вектор-функции  $y(\tau)$ . На основании теоремы § 1 отсюда следует, что семейство решений  $x(\tau, \varepsilon)$  при  $\varepsilon \rightarrow +0$  равномерно на  $[0, T]$  сходится к решению  $y(\tau)$  усредненного уравнения (5.4.7), т. е.

$$\|x(\tau, \varepsilon) - y(\tau)\| < \eta \text{ при } 0 \leq \tau \leq T, \quad 0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0(\eta).$$

Возвращаясь к прежней переменной  $t$ , окончательно получим

$$\|x(t, \varepsilon) - y(t)\| < \eta \text{ при } 0 \leq t < \frac{T}{\varepsilon}, \quad 0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0(\eta),$$

что и требовалось доказать.

## § 5. Принцип сжатых отображений

Пусть  $R = \{x\}$  есть совокупность элементов (точек) произвольной природы (*абстрактное пространство*).

Определение 1. Множество  $R = \{x\}$  называется *метрическим пространством* (см. [51]), если для любой пары точек  $x, y \in R$  определена числовая функция  $\rho(x, y)$  (*расстояние*) со следующими свойствами (аксиомами):

- 1)  $\rho(x, y) \geq 0$ , причем  $\rho(x, y) = 0$  тогда и только тогда, когда  $x = y$ ;
- 2)  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$  (симметрия);
- 3) если  $x, y, z \in R$ , то

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$$

(*неравенство треугольника*).

Пример 1. Совокупность действительных упорядоченных  $n$ -мерных комплексов  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n)$ , где

$$\rho(x, y) = \left[ \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

является метрическим пространством ( $n$ -мерное евклидово пространство  $\mathcal{E}^n$ ).

**Пример 2.** Пусть  $R = \{\varphi(t)\}$  — совокупность ограниченных вектор-функций  $\varphi(t) \in C(a, b)$ ,  $\sup \|\varphi(t)\| < \infty$ , где  $(a, b)$  — конечный или бесконечный промежуток. Для любых  $\varphi, \psi \in R$  положим

$$\rho(\varphi, \psi) = \sup_t \|\varphi(t) - \psi(t)\|,$$

где  $\|\varphi\|$  — одна из рассмотренных выше норм (гл. I, § 4). Тогда пространство  $R$  метрическое.

Действительно, выполнение аксиом 1) и 2) очевидно. Пусть теперь  $\varphi, \psi, \chi \in R$ . Для любого  $t \in (a, b)$  имеем

$$\begin{aligned} \|\varphi(t) - \psi(t)\| &\leq \|\varphi(t) - \chi(t)\| + \|\chi(t) - \psi(t)\| \leq \\ &\leq \sup_t \|\varphi(t) - \chi(t)\| + \sup_t \|\chi(t) - \psi(t)\| \leq \rho(\varphi, \chi) + \rho(\chi, \psi). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\rho(\varphi, \psi) = \sup_t \|\varphi(t) - \psi(t)\| \leq \rho(\varphi, \chi) + \rho(\chi, \psi),$$

и, таким образом, третья аксиома также выполнена.

**Определение 2.** Последовательность  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  точек метрического пространства  $R$  называется *фундаментальной*, если для нее выполнен критерий Коши, т. е. для  $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon)$  такое, что при  $\forall m, n > N$  имеем

$$\rho(x_m, x_n) < \varepsilon. \quad (5.5.1)$$

Очевидно, неравенство (5.5.1) эквивалентно следующему:

$$\rho(x_{n+p}, x_n) < \varepsilon \text{ при } n > N(\varepsilon) \text{ и } p > 0.$$

Пространство  $R$  называется *полным*, если любая фундаментальная последовательность  $\{x_n\}$  его является *сходящейся* в  $R$ , т. е. из условия (5.5.1) следует, что  $\exists \xi \in R$  такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, \xi) = 0.$$

В этом случае пишут  $x_n \rightarrow \xi$  и точку  $\xi$  называют *пределом последовательности*  $\{x_n\}$ .

**Пример 3.** Пространство  $R$  функций  $\varphi \in C(a, b)$  из примера 2 является полным.

Действительно, пусть  $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t), \dots$  — фундаментальная последовательность из  $R$ , т. е.

$$\rho(\varphi_{n+p}, \varphi_n) < \varepsilon \text{ при } n > N(\varepsilon) \text{ и } p > 0.$$

Отсюда

$$\|\varphi_{n+p}(t) - \varphi_n(t)\| < \varepsilon \text{ для } t \in (a, b), \quad (5.5.2)$$

если только  $n > N(\varepsilon)$  и  $p > 0$ . Таким образом, для последовательности вектор-функций  $\{\varphi_n(t)\}$  на  $(a, b)$  выполнен критерий Коши. Следовательно, эта последовательность сходится на  $(a, b)$ , т. е. существует

$$\varphi(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t).$$

Переходя к пределу при  $p \rightarrow \infty$  в неравенстве (5.5.2), получаем

$$\|\varphi(t) - \varphi_n(t)\| \leq \varepsilon \quad (5.5.3)$$

при  $n > N(\varepsilon)$ .

Отсюда следует, что сходимость равномерная:

$$\varphi_n(t) \xrightarrow{t} \varphi(t),$$

и так как вектор-функции  $\varphi_n(t)$  непрерывны на  $(a, b)$ , то  $\varphi(t) \in C(a, b)$ . Кроме того, учитывая, что вектор-функции  $\varphi_n(t)$  ограничены:

$$\|\varphi_n(t)\| \leq c_n \quad (n = 1, 2, \dots),$$

из неравенства (5.5.3) при фиксированном  $n_1 > N(1)$  находим

$$\|\varphi(t)\| \leq \|\varphi_{n_1}(t)\| + \|\varphi(t) - \varphi_{n_1}(t)\| \leq c_{n_1} + 1.$$

Поэтому  $\varphi(t)$  также ограничена и, значит,  $\varphi \in R$ , что и доказывает полноту пространства  $R$ .

**Определение 3.** Пусть любому элементу  $x \in X$  по определенному правилу  $A$  ставится в соответствие элемент  $Ax = y \in Y$ . Тогда говорят, что

$$y = Ax$$

есть *оператор*, определенный на множестве  $X$  со значениями из  $Y$  (*действующий из  $X$  в  $Y$* ).

Множество  $X$  называется *линейным пространством* (см. [51]), если для любых  $x, x' \in X$  определены операции: 1) сложения  $x + x' \in X$  и 2) умножения на скаляр  $\alpha x \in X$  с обычными свойствами. Например, таковым является векторное пространство (гл. I, § 5).

Оператор  $A$  называется *линейным*, если он определен в линейном пространстве  $X$  и имеет значения, принадлежащие также линейному пространству  $Y$ , причем для любых  $x, x' \in X$  имеем

- 1)  $A(x + x') = Ax + Ax'$ ;
- 2)  $A(\alpha x) = \alpha Ax$  ( $\alpha$  — число).

**Пример 4.** Оператор  $\frac{d}{dt}$ , ставящий в соответствие каждой функции  $x(t) \in C^1(a, b)$  ее производную  $y(t) = x'(t) \in C(a, b)$ , называется *оператором дифференцирования*. Легко проверить, что этот оператор линейный.

Пусть  $x \in R$ , где  $R$  — метрическое пространство и  $y = Ax$  — оператор, не обязательно линейный, действующий из  $R$  в  $R$ .

**Определение 4.** Оператор  $A$  называется *непрерывным*, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что из неравенства  $\rho(x', x) < \delta$  ( $x, x' \in R$ ) следует неравенство

$$\rho(Ax', Ax) < \varepsilon.$$

**Определение 5.** Отображение

$$y = Ax$$

называется *сжатым* (или *сжимающим*) в  $R$ , если для любых точек  $x, x' \in R$  выполнено условие:

$$\rho(Ax, Ax') \leq q\rho(x, x'), \quad (5.5.4)$$

где число  $q$  удовлетворяет неравенству  $0 \leq q < 1$ .

*Замечание.* Сжатое отображение  $y = Ax$  непрерывно.

Действительно, для данного  $\varepsilon > 0$ , выбирая  $\delta = \frac{\varepsilon}{q} > 0$  из неравенства (5.5.4), будем иметь: если

$$\rho(x, x') < \delta = \frac{\varepsilon}{q}, \text{ то } \rho(Ax, Ax') \leq q\rho(x, x') < \varepsilon.$$

А это и означает, что  $y = Ax$  непрерывно.

*Теорема (принцип сжатых отображений).* *Всякое сжатое отображение*

$$y = Ax \quad (5.5.5)$$

*в полном метрическом пространстве  $R$  имеет одну и только одну неподвижную точку, т. е. для сжатого отображения  $A$  существует единственная точка  $\xi \in R$  такая, что*

$$A\xi = \xi. \quad (5.5.6)$$

*Доказательство* [51]. Пусть  $x_0 \in R$ . Рассмотрим последовательность

$$x_n = Ax_{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (5.5.7)$$

где  $x_n \in R$ . Из формулы (5.5.6) вытекает, что

$$\rho(x_{n+1}, x_n) = \rho(Ax_n, Ax_{n-1}) \leq q\rho(x_n, x_{n-1}) \leq q^n \rho(x_1, x_0). \quad (5.5.8)$$

Отсюда при любом  $p > 0$  имеем

$$\begin{aligned} \rho(x_{n+p}, x_n) &\leq \rho(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + \rho(x_{n+p-1}, x_{n+p-2}) + \dots + \rho(x_{n+1}, x_n) \leq \\ &\leq q^{n+p-1} \rho(x_1, x_0) + q^{n+p-2} \rho(x_1, x_0) + \dots + q^n \rho(x_1, x_0) = \\ &= \frac{q^n - q^{n+p}}{1 - q} \rho(x_1, x_0) \leq \frac{q^n}{1 - q} \rho(x_1, x_0) < \varepsilon, \end{aligned}$$

если  $n > N(\varepsilon)$ , где  $N$  достаточно велико. Следовательно, последовательность  $\{x_n\}$  фундаментальная, а так как пространство  $R$  полное, то существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi.$$

Переходя к пределу при  $n \rightarrow \infty$  в равенстве (5.5.7) и учитывая непрерывность оператора  $A$ , будем иметь

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1},$$

или

$$\xi = A\xi.$$

Таким образом,  $\xi$  есть неподвижная точка отображения (5.5.5).

Эта неподвижная точка единственная. Действительно, пусть

$$A\xi' = \xi', \quad (5.5.9)$$

где  $\xi' \neq \xi$ . Из равенств (5.5.5) и (5.5.9) получаем

$$\rho(\xi, \xi') = \rho(A\xi, A\xi') \leq q\rho(\xi, \xi').$$

Отсюда

$$1 \leq q,$$

что невозможно.

Теорема доказана.

**Замечание.** В условиях теоремы неподвижная точка  $\xi$  преобразования (5.5.5), т. е. решение операторного уравнения (5.5.6), может быть найдена *методом последовательных приближений* (5.5.7), исходя из произвольного начального значения  $x_0 \in R$ .

## § 6. Сингулярные интегральные уравнения типа Вольтерра

Рассмотрим систему сингулярных интегральных уравнений

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{f}(t) + \int_a^t K(t, \tau) Q(\tau) \mathbf{y}(\tau) d\tau \quad (t \geq t_0), \quad (5.6.1)$$

где

$$\mathbf{y}(t) = \text{colon} [y_1(t), \dots, y_n(t)]$$

— искомый  $n$ -вектор;

$$\mathbf{f}(t) = \text{colon} [f_1(t), \dots, f_n(t)] \in C[t_0, \infty)$$

— известный  $n$ -вектор;  $K(t, \tau) = [K_{jk}(t, \tau)]$ ,  $Q(\tau) = [Q_{jk}(\tau)]$  — непрерывные  $(n \times n)$ -матрицы;

$$\mathbf{a} = \text{colon} (a_1, \dots, a_n)$$

— постоянный  $n$ -вектор с координатами  $t_0 \leq T \leq a_j \leq +\infty$  ( $j=1, \dots, n$ ),  $T$  — некоторое достаточно большое число.

Для краткости положим,

$$j \in I, \quad \text{если } a_j < +\infty,$$

и

$$j \in II, \quad \text{если } a_j = +\infty.$$

Тогда систему (5.6.1) можно записать в следующем виде:

$$y_j(t) = f_j(t) + \int_{a_j}^t \sum_{k,s} K_{jk}(t, \tau) Q_{ks}(\tau) y_s(\tau) d\tau \quad (j \in I), \quad (5.6.2)$$

$$y_j(t) = f_j(t) - \int_t^{\infty} \sum_{k,s} K_{js}(t, \tau) Q_{ks}(\tau) y_s(\tau) d\tau \quad (j \in II).$$

Будем считать переменные  $t$  и  $\tau$  действительными, а матрицы  $K(t, \tau)$  и  $Q(\tau)$ , вообще говоря, комплексными.

**Теорема.** Пусть матрица  $K(t, \tau) = [K_{jk}(t, \tau)]$  имеет непрерывные ограниченные элементы  $K_{jk}(t, \tau)$  в каждой из областей

$$\omega_j = \{t \in [T, \infty), \tau \in [T, t]\} \text{ при } j \in I$$

и

$$\omega_j = \{t \in [T, \infty), \tau \in [t, \infty)\} \text{ при } j \in II$$

(рис. 52), а матрица  $Q(\tau)$  непрерывна и абсолютно интегрируема на  $[t_0, \infty)$ , причем вектор-функция  $f(\tau)$  непрерывна и ограничена на  $[t_0, \infty)$ . Тогда если  $T$  достаточно велико, система интегральных уравнений (5.6.1) при  $t_0 \leq T \leq t < \infty$  допускает единственное непрерывное ограниченное решение  $y(t)$ .

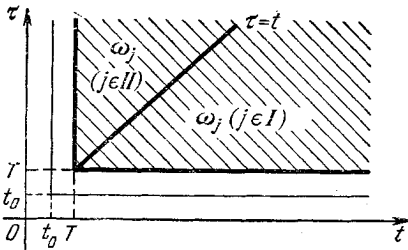


Рис. 52.

Доказательство. Пусть  $R$  — совокупность всех ограниченных вектор-функций  $\Phi(t) \in C[T, \infty)$ , где  $T \geq t_0$ . Расстояние между функциями  $\Phi(t)$ ,  $\Psi(t) \in R$  определим формулой

$$\rho(\Phi, \Psi) = \sup_{T \leq t < \infty} \|\Phi(t) - \Psi(t)\|.$$

Тогда  $R$  будет представлять полное метрическое пространство (§ 5, примеры 2 и 3).

В  $R$  рассмотрим линейный оператор

$$A\Phi(t) = f(t) + \int_a^t K(t, \tau) Q(\tau) \Phi(\tau) d\tau \quad (T \leq t < \infty). \quad (5.6.3)$$

Если считать, что значения  $\tau$  берутся из соответствующей области  $\omega_j$  ( $j \in I, II$ ), то матрица  $K(t, \tau)$  в силу условия теоремы является ограниченной, т. е.

$$\|K(t, \tau)\| \leq c < \infty. \quad (5.6.4)$$



Поэтому для  $\|f\| \leq c_1 < \infty$  и  $\|\varphi\| \leq c_2 < \infty$ , учитывая, что  $[a_j, t] \subset [T, \infty]$ , в силу формулы (5.6.3) и абсолютной интегрируемости матрицы  $Q(\tau)$  имеем

$$\begin{aligned} \|A\varphi(t)\| &\leq \|f(t)\| + \int_T^\infty \|K(t, \tau)\| \|Q(\tau)\| \|\varphi(\tau)\| d\tau \leq \\ &\leq c_1 + cc_2 \int_T^\infty \|Q(\tau)\| d\tau \leq c_3 < \infty. \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться также, что  $A\varphi(t) \in C[T, \infty)$ . Следовательно, если  $\varphi \in R$ , то  $A\varphi \in R$ .

Покажем, что отображение  $A\varphi$  сжатое. В самом деле, для  $\varphi \in R$  и  $\psi \in R$  имеем

$$A\varphi(t) = f(t) + \int_a^t K(t, \tau) Q(\tau) \varphi(\tau) d\tau$$

и

$$A\psi(t) = f(t) + \int_a^t K(t, \tau) Q(\tau) \psi(\tau) d\tau.$$

Отсюда

$$A\varphi(t) - A\psi(t) = \int_a^\infty K(t, \tau) Q(\tau) [\varphi(\tau) - \psi(\tau)] d\tau$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \|A\varphi(t) - A\psi(t)\| &\leq \int_T^\infty \|K(t, \tau)\| \|Q(\tau)\| \|\varphi(\tau) - \psi(\tau)\| d\tau \leq \\ &\leq c \sup_t \|\varphi(t) - \psi(t)\| \int_T^\infty \|Q(\tau)\| d\tau. \end{aligned} \quad (5.6.5)$$

В силу абсолютной интегрируемости матрицы  $Q(\tau)$  число  $T$  можно выбрать столь большим, чтобы имело место неравенство

$$c \int_T^\infty \|Q(\tau)\| d\tau = q < 1. \quad (5.6.6)$$

Тогда из неравенства (5.6.5) получим

$$\sup_t \|A\varphi(t) - A\psi(t)\| \leq q \sup_t \|\varphi(t) - \psi(t)\|,$$

т. е.

$$\rho(A\varphi, A\psi) \leq q\rho(\varphi, \psi), \quad (5.6.7)$$

где  $0 \leq q < 1$ . Таким образом, отображение является сжатым.

Согласно принципу сжатых отображений (§ 5) в  $R$  существует единственное решение  $\mathbf{y}(t)$  ( $T \leq t < \infty$ ) уравнения

$$A\varphi = \varphi,$$

т. е. система интегральных уравнений (5.6.1) допускает единственное непрерывное решение  $\mathbf{y}(t)$ , ограниченное на промежутке  $[T, \infty)$ .

Теорема доказана.

**З а м е ч а н и е.** Решение  $\mathbf{y}(t)$  может быть найдено обычным методом последовательных приближений:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_0(t) &= \mathbf{f}(t), \\ \mathbf{y}_p(t) &= \mathbf{f}(t) + \int_a^t K(t, \tau) Q(\tau) \mathbf{y}_{p-1}(\tau) d\tau \\ &\quad (p = 1, 2, \dots), \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{y}_p(t) \underset{t}{\rightrightarrows} \mathbf{y}(t) \text{ на } [T, \infty).$$

## § 7. Асимптотика $L$ -диагональных систем

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = [\Lambda(t) + Q(t)]x, \quad (5.7.1)$$

где  $x = \text{colop}(x_1, \dots, x_n)$ ,

$$\Lambda(t) = \text{diag}[\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t)] \in C[t_0, \infty)$$

и  $Q(t) \in L[t_0, \infty)$ , т. е.  $Q(t)$  измерима (например, кусочно-непрерывна) и

$$\int_{t_0}^{\infty} \|Q(t)\| dt < \infty, \quad (5.7.2)$$

причем интеграл (5.7.2) понимается или в элементарном смысле, или в смысле интеграла Лебега. В уравнении (5.7.1) искомым вектор  $x$  и матрицы  $\Lambda(t)$  и  $Q(t)$  будем считать, вообще говоря, комплексными.

Будем предполагать, что элементы диагональной матрицы  $\Lambda(t)$  асимптотически разделены, т. е. выполнено условие  $A$ : величина

$$\text{Re}[\lambda_j(t) - \lambda_k(t)]$$

для всех  $j$  и  $k$  не меняет знака на  $T \leq t < \infty$ , где  $T \geq t_0$  — некоторое число, которое можно предполагать произвольно большим.

Это означает, что кривые

$$z_j = \operatorname{Re} \lambda_j(t) \text{ и } z_k = \operatorname{Re} \lambda_k(t) \quad (j \neq k)$$

не пересекаются при  $t \geq T$ , причем касание их не возобраняется (рис. 53). Из условия  $A$  следует, что для каждой пары  $(j, k)$  существует конечный или бесконечный интеграл

$$\int_{t_0}^{\infty} \operatorname{Re} [\lambda_j(t) - \lambda_k(t)] dt. \quad (5.7.3)$$

Система (5.7.1) называется  $L$ -диагональной. Такими системами занимались Шпет [57] и Перрон [58] при  $\Lambda(t) = \operatorname{const}$  и Левинсон [59] при  $\Lambda(t)$  переменной.

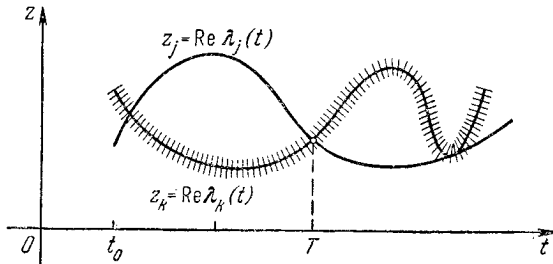


Рис. 53.

Изучим поведение решений  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  системы (5.7.1) при  $t \rightarrow \infty$ , причем в основном будем придерживаться изложения Рапорта [60].

Пусть

$$\mu_s(t) = \int_{t_0}^t \lambda_s(t_1) dt_1 \quad (5.7.4)$$

( $s = 1, \dots, n$ ). Фиксируя индекс  $s$  в системе (5.7.1), произведем замену переменных

$$\mathbf{x} = e^{\mu_s(t)} \mathbf{y}_s. \quad (5.7.5)$$

Имеем

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} \equiv e^{\mu_s(t)} \frac{d\mathbf{y}_s}{dt} + e^{\mu_s(t)} \lambda_s(t) \mathbf{y}_s = \Lambda(t) e^{\mu_s(t)} \mathbf{y}_s + Q(t) e^{\mu_s(t)} \mathbf{y}_s.$$

Отсюда, учитывая, что  $e^{\mu_s(t)}$  — скалярная функция, получаем

$$\frac{d\mathbf{y}_s}{dt} = [\Lambda(t) - \lambda_s(t) E] \mathbf{y}_s + Q(t) \mathbf{y}_s. \quad (5.7.6.)$$

Введем матричную функцию

$$K^{(s)}(t, \tau) = \exp \int_{\tau}^t [\Lambda(t_1) - \lambda_s(t_1) E] dt_1, \quad (5.7.7)$$

являющуюся нормированным при  $t = \tau$  решением однородной системы

$$\dot{K}_t^{(s)}(t, \tau) = [\Lambda(t) - \lambda_s(t) E] K^{(s)}(t, \tau), \quad (5.7.8)$$

удовлетворяющим начальному условию:

$$K^{(s)}(\tau, \tau) = E.$$

Рассмотрим систему сингулярных интегральных уравнений

$$y_s(t) = e_s + \int_a^t K^{(s)}(t, \tau) Q(\tau) y_s(\tau) d\tau, \quad (5.7.9)$$

где

$$e_s = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix},$$

причем координаты вектора  $a$  выбираются следующим образом:

1) если

$$\int_{t_0}^{\infty} \operatorname{Re} [\lambda_j(t) - \lambda_s(t)] dt = -\infty \quad (5.7.10)$$

(коротко,  $j \in I$ ), то полагают  $a_j = T$ , где  $T \geq t_0$  конечно;

2) если же

$$\int_{t_0}^{\infty} \operatorname{Re} [\lambda_j(t) - \lambda_s(t)] dt > -\infty \quad (5.7.11)$$

(коротко,  $j \in II$ ), то принимают  $a_j = \infty$ .

Непрерывное решение  $y_s(t)$  системы интегральных уравнений (5.7.9) удовлетворяет дифференциальному уравнению (5.7.6). Действительно, дифференцируя равенство (5.7.9) по параметру  $t$  и учитывая формулу (5.7.8), будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{dy_s}{dt} &= K^{(s)}(t, t) Q(t) y_s(t) + \\ &+ \int_a^t [\Lambda(t) - \lambda_s(t) E] K^{(s)}(t, \tau) Q(\tau) y_s(\tau) d\tau \equiv \\ &\equiv Q(t) y_s(t) + [\Lambda(t) - \lambda_s(t) E] y_s(t) - e_s. \end{aligned} \quad (5.7.12)$$

Так как

$$[\Lambda(t) - \lambda_s(t) E] e_s = \text{diag} [\lambda_1(t), \dots, \lambda_{s-1}(t), 0, \lambda_{s+1}(t), \dots, \lambda_n(t)] \cdot \text{diag} (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) = 0,$$

то уравнение (5.7.12) совпадает с дифференциальным уравнением (5.7.6).

Докажем, что система интегральных уравнений (5.7.9) удовлетворяет условиям теоремы из § 6. Для этого достаточно показать, что элементы строк матрицы

$$K^{(s)}(t, \tau) = \text{diag} [K_1^{(s)}(t, \tau), \dots, K_n^{(s)}(t, \tau)]$$

ограничены в областях:  $\omega_j = \{T \leq t < \infty, \tau \in [T, t] \text{ при } j \in I \text{ и } \omega_j = \{T \leq t < \infty\}, \tau \in [t, \infty) \text{ при } j \in II\}$ .

Действительно, если  $j \in I$ , то из (5.7.10) имеем

$$\text{Re} [\lambda_j(t) - \lambda_s(t)] \leq 0 \text{ при } t \geq T,$$

причем  $\tau \leq t$ . Следовательно,

$$|K_j^{(s)}(t, \tau)| = \exp \left\{ \int_{\tau}^t \text{Re} [\lambda_j(t_1) - \lambda_s(t_1)] dt_1 \right\} \leq 1.$$

Пусть теперь  $j \in II$ , тогда  $\tau \geq t$ , и, значит,

$$|K_j^{(s)}(t, \tau)| = \exp \left\{ - \int_t^{\tau} \text{Re} [\lambda_j(t_1) - \lambda_s(t_1)] dt_1 \right\}.$$

Если

$$\text{Re} [\lambda_j(t) - \lambda_s(t)] \geq 0 \text{ при } t \geq T,$$

то, очевидно,

$$|K_j^{(s)}(t, \tau)| \leq 1.$$

Если же

$$\text{Re} [\lambda_j(t) - \lambda_s(t)] \leq 0,$$

то в силу неравенства (5.7.11) получаем

$$|K_j^{(s)}(t, \tau)| \leq \exp \left\{ - \int_T^{\infty} \text{Re} [\lambda_j(t_1) - \lambda_s(t_1)] dt_1 \right\} < \infty.$$

Таким образом,

$$|K_j^{(s)}(t, \tau)| \leq c < \infty$$

в каждой из областей  $\omega_j$ .

Следовательно, если  $T$  таково, что выполнено неравенство

$$c \int_T^{\infty} \|Q(\tau)\| d\tau \leq q < 1, \quad (5.7.13)$$

то при  $t \geq T$  существует непрерывное ограниченное решение интегрального уравнения (5.7.9), которое (см. замечание к теореме из § 6) можно, согласно методу последовательных приближений, изобразить в виде абсолютно и равномерно сходящегося ряда

$$y_s(t) = e_s + \sum_{p=1}^{\infty} [y_s^{(p)}(t) - y_s^{(p-1)}(t)],$$

где

$$y_s^{(p)}(t) = e_s + \int_a^t K^{(s)}(t, \tau) Q(\tau) y_s^{(p-1)}(\tau) d\tau \quad (p = 1, 2, \dots)$$

и

$$y_s^{(0)}(t) = e_s.$$

Из уравнения (5.7.9), учитывая, что  $[a_j, t] \subset [T, \infty]$ , имеем оценку:

$$\|y_s(t)\| \leq \|e_s\| + c \int_T^{\infty} \|Q(\tau)\| \|y_s(\tau)\| d\tau;$$

отсюда, используя неравенство (5.7.13), получаем

$$\|y_s(t)\| \leq 1 + q \sup_t \|y_s(t)\|$$

и, поэтому

$$\sup_t \|y_s(t)\| \leq \frac{1}{1-q} \quad (5.7.14)$$

при  $T \leq t < \infty$ .

Докажем, что

$$y_s(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y_s(t) = e_s. \quad (5.7.15)$$

Полагая

$$y_s(t) = \text{colom} [y_{1s}(t), \dots, y_{ns}(t)],$$

из уравнения (5.7.9) получаем

$$y_{js}(t) = \delta_{js} + \int_{a_j}^t \exp \int_{\tau}^t [\lambda_j(t_1) - \lambda_s(t_1)] dt_1 \sum_k Q_{jk}(\tau) y_{ks}(\tau) d\tau, \quad (5.7.16)$$

где  $\delta_{js}$  — символ Кронекера.

Если  $j \in I$ , то, очевидно,  $j \neq s$  и, значит,  $\delta_{js} = 0$ . При  $T \leq t' \leq t$  будем иметь

$$\begin{aligned} y_{js}(t) &= \int_T^{t'} \exp \int_{\tau}^{t'} [\lambda_j(t_1) - \lambda_s(t_1)] dt_1 \cdot \exp \int_{t'}^t [\lambda_j(t_1) - \lambda_s(t_1)] dt_1 \times \\ &\times \sum_k Q_{jk}(\tau) y_{ks}(\tau) d\tau + \int_{t'}^t \exp \int_{\tau}^t [\lambda_j(t_1) - \lambda_s(t_1)] dt \cdot \sum_k Q_{jk}(\tau) y_{ks}(\tau) d\tau = \\ &= \exp \int_{t'}^t [\lambda_j(t_1) - \lambda_s(t_1)] dt_1 \cdot y_{js}(t') + \\ &+ \int_{t'}^t K_j^{(s)}(t, \tau) \sum_k Q_{jk}(\tau) y_{ks}(\tau) d\tau. \quad (5.7.17) \end{aligned}$$

Так как для  $j \in I$ , как указано выше, выполнено неравенство

$$|K_j^{(s)}(t, \tau)| \leq 1,$$

то, выбирая  $t'$  достаточно большим, при  $t \geq t'$  имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_{t'}^t K_j^{(s)}(t, \tau) \cdot \sum_k Q_{jk}(\tau) y_{ks}(\tau) d\tau \right| &\leq \int_{t'}^t \sum_k |Q_{jk}(\tau)| |y_{ks}(\tau)| d\tau \leq \\ &\leq \sup_{t'} |y_{ks}(t)| \cdot \int_{t'}^{\infty} \|Q(\tau)\| d\tau < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Фиксируя  $t'$  и учитывая, что

$$\int_{t'}^t \operatorname{Re} [\lambda_j(t_1) - \lambda_s(t_1)] dt_1 \rightarrow -\infty$$

при  $t \rightarrow \infty$ , получаем

$$\left| \exp \int_{t'}^t [\lambda_j(t_1) - \lambda_s(t_1)] dt_1 \cdot y_{js}(t') \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

если  $t > t''$ .

Следовательно, из формулы (5.7.17) находим

$$|y_{js}(t)| < \varepsilon \text{ при } t > \max(t', t'')$$

и, значит,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_{js}(t) = 0 = \delta_{js}.$$

Если же  $j \in II$ , то на основании формулы (5.7.16), учитывая ограниченность подинтегральной функции при  $t \rightarrow \infty$ , имеем

$$y_{js}(t) = \delta_{js} - \int_t^{\infty} \exp \int_{\tau}^t [\lambda_j(t_1) - \lambda_s(t_1)] dt_1 \sum_k Q_{jk}(\tau) y_{ks}(\tau) d\tau \rightarrow \delta_{js}.$$

Таким образом, равенство (5.7.15) доказано. Следовательно,

$$y_s(t) = e_s + \eta_s(t),$$

где  $\eta_s(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Возвращаясь к переменной  $x$ , в силу формулы (5.7.5) получаем, что  $L$ -диагональная система (5.7.1) имеет систему решений вида

$$x_s(t) = \exp \int_{t_0}^t \lambda_s(t_1) dt_1 \cdot [e_s + \eta_s(t)] \quad (s = 1, \dots, n; t \geq T). \quad (5.7.18)$$

Эта система будет фундаментальной, так как при достаточно большом  $t$ , очевидно, детерминант Вронского

$$W(t) = \det [x_{js}(t)] = \exp \int_{t_0}^t \sum_s \lambda_s(t_1) dt_1 \cdot \det [\delta_{js} + \eta_{js}(t)] \neq 0.$$

Ввиду того, что линейная система (5.7.1) для каждого начального условия  $x_s(T) = c_s$  допускает единственное решение, определенное в промежутке  $[t_0, \infty)$ , фундаментальную систему (5.7.18) можно однозначно продолжить на промежуток  $[t_0, \infty)$ .

*Следствие.* Если для  $L$ -диагональной системы (5.7.1) существуют пределы

$$\alpha_s = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \operatorname{Re} \lambda_s(t_1) dt_1 \quad (s = 1, \dots, n), \quad (5.7.19)$$

то эта система является правильной, причем совокупность чисел  $\alpha_s$  представляет собой ее полный спектр.

Действительно, на основании формулы (5.7.18) будем иметь

$$\chi[x_s(t)] = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \operatorname{Re} \lambda_s(t_1) dt_1 = \alpha_s \quad (s = 1, \dots, n).$$

Кроме того, так как

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \operatorname{Re} \operatorname{Sp} [\Lambda(t_1) + Q(t_1)] dt_1 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \sum_s \operatorname{Re} \lambda_s(t_1) dt_1 + \\ &+ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \operatorname{Re} \operatorname{Sp} Q(t_1) dt_1 = \sum_s \alpha_s + 0 = \sum_{s=1}^n \alpha_s, \end{aligned}$$

то система (5.7.1) правильная (гл. III, §§ 7 и 11) и  $\{\alpha_s\}$  есть ее спектр.



### § 8. Лемма о диагонализации переменной матрицы

*Лемма.* Пусть для квадратной  $(n \times n)$ -матрицы  $A(t) \in C[t_0, \infty)$  существует конечный предел на бесконечности

$$A(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} A(t), \quad (5.8.1)$$

причем характеристические числа предельной матрицы  $A(\infty)$  простые. Тогда при  $t \geq T$ , где  $T$  достаточно велико, существует ограниченная матрица  $C(t) \in C[T, \infty)$ , имеющая ограниченную обратную матрицу  $C^{-1}(t) \in C[T, \infty)$ , с помощью которой матрица  $A(t)$  ( $t \leq t < \infty$ ) приводится к диагональному виду

$$A(t) = C^{-1}(t) \operatorname{diag} [\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t)] C(t).$$

Если, сверх того, матрица  $A(t) \in C^1[t_0, \infty)$  и  $A(t)$  абсолютно интегрируема на  $[t_0, \infty)$ , т. е.  $A(t) \in L[t_0, \infty)$ , то  $C(t)$ ,  $C^{-1}(t) \in C^1[T, \infty)$  и  $\dot{C}(t)$ ,  $\frac{d}{dt}[C^{-1}(t)] \in L[T, \infty)$ .

Доказательство (см. 6). 1) Для матрицы  $A(t)$  рассмотрим ее характеристическое уравнение

$$\Delta(\lambda, t) \equiv \det [E\lambda - A(t)] = 0, \quad (5.8.2)$$

и пусть  $\lambda_k = \lambda_k(t)$  ( $k=1, \dots, n$ ) — корни этого уравнения. Так как собственные числа предельной матрицы  $A(\infty)$  различны, то при  $t \geq T$  функции  $\lambda_k(t)$  также будут различны, т. е. уравнение (5.8.2) в области  $t_0 \leq T \leq t < \infty$  не имеет кратных корней. Дальнейшее рассмотрение мы будем проводить в области  $t \geq T$ . Функции  $\lambda_k(t)$  ( $k=1, \dots, n$ ) будем считать непрерывными ветвями многозначной функции, определяемой уравнением (5.8.2).

Пусть  $C = [c_{jk}(t)]$  — неособенная матрица, приводящая матрицу  $A(t)$  к диагональному виду, т. е.

$$C^{-1}(t) A(t) C(t) = \Lambda(t), \quad (5.8.3)$$

где

$$\Lambda(t) = \operatorname{diag} [\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t)].$$

Так как

$$A(t) C(t) = C(t) \Lambda(t),$$

то элементы матрицы  $C(t)$  определяются из системы уравнений

$$\sum_s a_{js}(t) c_{sk}(t) = c_{jk}(t) \lambda_k(t)$$

или

$$\sum_s [\delta_{js} \lambda_k(t) - a_{js}(t)] c_{sk}(t) = 0 \quad (5.8.4)$$

$$(j=1, \dots, n; k=1, \dots, n),$$

где  $\delta_{js}$  — символ Кронекера.

Если через

$$\mathbf{c}^{(k)} = \text{colon} [c_{1k}(t), \dots, c_{nk}(t)] \quad (k=1, \dots, n)$$

обозначить собственные векторы матрицы  $A(t)$ , то систему (5.8.4) сокращенно можно записать следующим образом:

$$[E\lambda_k(t) - A(t)] \mathbf{c}^{(k)}(t) = 0, \quad (5.8.5)$$

где  $\det [E\lambda_k(t) - A(t)] = \Delta[\lambda_k(t), t] \equiv 0$ . Таким образом, собственные векторы  $\mathbf{c}^{(k)}(t)$  ортогональны к матрице  $E\lambda_k(t) - A(t)$ .

Легко видеть, что каждая из матриц  $E\lambda_k(t) - A(t)$  ( $k=1, \dots, n$ ) при  $T \leq t < \infty$  имеет ранг  $r = n - 1$ .

Действительно, обозначим через  $\Delta_{jk}(\lambda, t)$  алгебраические дополнения характеристического определителя  $\Delta(\lambda, t)$ , полученные в результате вычеркивания  $j$ -й строки и  $k$ -го столбца его. Применяя известное правило дифференцирования определителя, будем иметь

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \det \delta_{jk} \lambda - a_{jk}(t) = \sum_s \Delta_{ss}(\lambda, t).$$

Так как корни  $\lambda_k(t)$  простые, то  $\frac{\partial \Delta}{\partial \lambda} \neq 0$  при  $\lambda = \lambda_k(k) (k=1, \dots, n)$ . Следовательно, для каждого корня  $\lambda_k(t)$  найдется диагональный минор

$$\Delta_{pp}[\lambda_k(t), t] \neq 0 \text{ при } T \leq t < \infty, \quad (5.8.6)$$

где номер  $p$ , вообще говоря, зависит от  $k$ . Число  $p$ , для которого выполнено неравенство (5.8.6), можно выбрать не зависящим от  $t$ . Действительно в силу непрерывности алгебраических дополнений  $\Delta_{jk}(\lambda, t)$  и корней  $\lambda_k(t)$ , если для некоторого  $p$  выполнено неравенство

$$\Delta_{pp}[\lambda_k(\infty), \infty] = \lim_{t \rightarrow \infty} \Delta_{pp}[\lambda_k(t), t] \neq 0,$$

то при этом же  $p$  будут справедливы также неравенства

$$\Delta_{pp}[\lambda_k(t), t] \neq 0 \text{ для } T \leq t < \infty,$$

где  $T$  достаточно велико. Но определитель  $\Delta_{pp}[\lambda_k(t), t]$  является минором  $(n-1)$ -го порядка матрицы  $E\lambda_k(t) - A(t)$ , и, значит, эта матрица имеет ранг  $n-1$  ( $k=1, \dots, n$ ).

Из линейной алгебры известно, что тогда ненулевые решения системы (5.8.5) пропорциональны соответствующим алгебраическим дополнениям:

$$\frac{c_{1k}(t)}{\Delta_{p1}[\lambda_k(t), t]} = \frac{c_{2k}(t)}{\Delta_{p2}[\lambda_k(t), t]} = \dots = \frac{c_{nk}(t)}{\Delta_{pn}[\lambda_k(t), t]},$$

где  $\rho = \rho_k$ . Выбрав равным единице коэффициент пропорциональности в этих отношениях, получим

$$c_{jk}(t) = \Delta_{pj} [\lambda_k(t), t] \quad (5.8.7)$$

( $j=1, \dots, n$ ;  $k=1, \dots, n$ ), причем построенные таким образом векторы  $c^{(k)}$  ( $k=1, \dots, n$ ) линейно независимы при  $T \leq t \leq \infty$ .

Таким образом, в качестве элементов матрицы  $C(t)$ , приводящей матрицу  $A(t)$  к диагональному виду, можно взять целые рациональные функции характеристических корней  $\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t)$  и элементов  $a_{sr}(t)$  матрицы  $A(t)$ :

$$c_{jk}(t) = P_{jk} [\lambda_k(t), a_{sr}(t)] \quad (5.8.8)$$

и, следовательно,

$$C(t) \in C[T, \infty].$$

Пусть  $A(\infty) = [a_{jk}(\infty)]$  и  $\lambda_k(\infty)$  — ее характеристические корни. При  $t \rightarrow \infty$  имеем

$$a_{jk}(t) \rightarrow a_{jk}(\infty)$$

и, следовательно,

$$\lambda_k(t) \rightarrow \lambda_k(\infty) \quad (k=1, \dots, n).$$

Так как корни  $\lambda_k(\infty)$  простые, то при  $t \geq T$ , где  $T$  достаточно велико, корни  $\lambda_k(t)$  будут содержаться внутри кругов  $|\lambda - \lambda_k(\infty)| \leq \rho_k < \infty$  ( $k=1, \dots, n$ ) комплексной плоскости  $\lambda$  (рис. 54), попарно расположенных вне друг друга. Отсюда при  $t \geq T$  имеем

$$|a_{sr}(t)| \leq c_1, \quad |\lambda_k(t)| \leq c_2 \quad (5.8.9)$$

и, следовательно, из формулы (5.8.8) выводим

$$\|C(t)\| \leq c_3, \quad (5.8.10)$$

где через  $c_p$  ( $p=1, 2, 3, \dots$ )

здесь и в дальнейшем обозначены некоторые положительные постоянные. Далее, предельные значения собственных векторов

$$c^{(k)}(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} c^{(k)}(t)$$

являются, очевидно, собственными векторами предельной матрицы  $A(\infty)$ , причем ввиду их линейной независимости имеем

$$|\det C(\infty)| = \text{mod} \begin{vmatrix} c_{11}(\infty) & \dots & c_{1n}(\infty) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1}(\infty) & \dots & c_{nn}(\infty) \end{vmatrix} \geq c_4 > 0.$$

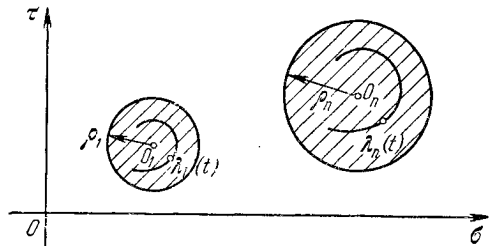


Рис. 54.

Отсюда

$$|\det C(t)| \geq c_8 \text{ при } t \geq T. \quad (5.8.11)$$

Так как

$$C^{-1}(t) = \frac{1}{\det C(t)} (C_{kj}(t)) \in C[T, \infty),$$

то из неравенств (5.8.10) и (5.8.11) получаем

$$\|C^{-1}(t)\| \leq c_6 \text{ при } t \geq T. \quad (5.8.12)$$

2) Пусть теперь  $A(t) \in C^1[t_0, \infty)$ . Так как корни  $\lambda_k(t)$  простые, то существуют непрерывные производные  $\lambda'_k(t)$  ( $k=1, \dots, n$ ), которые можно определить из уравнений

$$\Delta'_\lambda [\lambda_k(t), t] \frac{d\lambda_k}{dt} + \Delta'_t [\lambda_k(t), t] = 0. \quad (5.8.13)$$

Ввиду того, что  $\Delta'_\lambda [\lambda_k(\infty), \infty] \neq 0$ ,

$$|\Delta'_\lambda [\lambda_k(t), t]| \geq c_7 > 0 \text{ при } t \geq T.$$

Кроме того, имеем

$$\begin{aligned} \Delta'_t(\lambda, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \begin{vmatrix} \lambda - a_{11}(t) & -a_{12}(t) & \dots & -a_{1n}(t) \\ -a_{21}(t) & \lambda - a_{22}(t) & \dots & -a_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1}(t) & -a_{n2}(t) & \dots & \lambda - a_{nn}(t) \end{vmatrix} = \\ &= - \sum_{s=1}^n \sum_{r=1}^n a'_{sr}(t) \Delta_{sr}(t). \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая формулу (5.8.8) и неравенства (5.8.9), из формулы (5.8.13) получаем

$$\left| \frac{d\lambda_k}{dt} \right| \leq c_8 \sum_{s,r} |a'_{sr}(t)| \leq c_9 \|A'(t)\|. \quad (5.8.14)$$

Следовательно, если  $A'(t) \in L[t_0, \infty)$ , то

$$\int_T^\infty \left| \frac{d\lambda_k}{dt} \right| dt < \infty, \quad (5.8.15)$$

т. е.  $\lambda'_k(t) \in L[T, \infty)$  ( $k=1, \dots, n$ ).

На основании формулы (5.8.8) при  $t \geq T$  будем иметь

$$|c_{jk}(t)| \leq c_{10} |\lambda'_k(t)| + c_{11} \|A'(t)\| \\ (j, k=1, \dots, n).$$

Поэтому

$$\int_T^{\infty} \|C(t)\| dt < \infty$$

и  $C(t) \in L[T, \infty)$ . Наконец, в силу неравенства (5.8.11), мы получаем также

$$C^{-1}(t) \in C^1[T, \infty) \text{ и } \frac{d}{dt} [C^{-1}(t)] \in L[T, \infty).$$

Лемма доказана.

**Замечание.** Из доказательства следует, что если матрица  $A(t)$  имеет абсолютно интегрируемую на  $[t_0, \infty)$  производную  $\dot{A}(t)$ , то ее характеристические корни  $\lambda_k(t)$  ( $k = 1, \dots, n$ ) обладают также абсолютно интегрируемыми на  $[T, \infty)$  производными  $\dot{\lambda}_k(t)$ .

Ограниченную неособенную матрицу  $C(t) \in C^1[T, \infty)$ , имеющую обратную матрицу  $C^{-1}(t)$  с теми же свойствами для краткости, будем называть *регулярной* на  $[T, \infty)$ .

**Следствие.** *Переменную матрицу  $A(t) \in C^1[t_0, \infty)$ , имеющую предел на бесконечности с простыми собственными значениями, с помощью регулярной матрицы  $C(t)$  в области  $t \geq T \geq t_0$  (где  $T$  достаточно велико) можно привести к диагональному виду.*

*Если матрица  $\dot{A}(t)$  абсолютно интегрируема на  $[t_0, \infty)$ , то матрицы  $\dot{C}(t)$  и  $\frac{d}{dt} [C^{-1}(t)]$  также абсолютно интегрируемы на  $[T, \infty)$ .*

## § 9. Приведение линейной системы к L-диагональному виду

Рассмотрим линейную систему

$$\frac{dx}{dt} = [A(t) + B(t)]x, \quad (5.9.1)$$

где  $A(t) \in C^1[t_0, \infty)$  и  $B(t) \in C[t_0, \infty)$ .

**Теорема.** Пусть 1) матрица  $A(t)$  допускает конечный предел на бесконечности

$$A(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} A(t), \quad (5.9.2)$$

причем предельная матрица  $A(\infty)$  имеет различные собственные значения; 2) производная  $\dot{A}(t)$  и матрица  $B(t)$  абсолютно интегрируемы на  $[t_0, \infty)$ , т. е.

$$\int_{t_0}^{\infty} \|\dot{A}(t)\| dt < \infty, \quad \int_{t_0}^{\infty} \|B(t)\| dt < \infty. \quad (5.9.3)$$

Тогда система (5.9.1) в области  $t \geq T \gg t_0$  с помощью регулярного линейного преобразования

$$x = C(t)y \quad (5.9.4)$$

может быть приведена к  $L$ -диагональному виду

$$\frac{dy}{dt} = [\Lambda(t) + Q(t)]y, \quad (5.9.5)$$

где

$$\Lambda(t) = \text{diag} [\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t)] \in C^1 [T, \infty), \sup_t \|\Lambda(t)\| < \infty$$

и

$$Q(t) \in C [T, \infty) \cap L [T, \infty).$$

Замечание. Если производная  $\dot{A}(t)$  абсолютно интегрируема на  $[t_0, \infty)$ , то существует предел (5.9.2).

Действительно, имеем

$$\|A(t_2) - A(t_1)\| = \left\| \int_{t_1}^{t_2} \dot{A}(t) dt \right\| \leq \int_{t_1}^{t_2} \|\dot{A}(t)\| dt < \varepsilon \text{ при } t_2 > t_1 > T \gg t_0.$$

Отсюда в силу критерия Коши существует

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = A(\infty).$$

Таким образом, условия 1) и 2) не являются вполне независимыми.

Доказательство (см. [60]). Пусть  $C(t)$  — регулярная матрица, приводящая матрицу  $A(t)$  к диагональному виду:

$$C^{-1}(t)A(t)C(t) = \Lambda(t) \quad (T \leq t < \infty). \quad (5.9.6)$$

Такая матрица существует на основании леммы о диагонализации переменной матрицы (см. § 8). Положим

$$x = C(t)y.$$

Из уравнения (5.9.1) имеем

$$C(t) \frac{dy}{dt} + \dot{C}(t)y = [A(t) + B(t)]C(t)y.$$

Отсюда

$$\frac{dy}{dt} = \Lambda(t)y + Q(t)y,$$

где  $\Lambda(t)$  — диагональная матрица (5.9.6) и

$$Q(t) = -C^{-1}(t)\dot{C}(t) + C^{-1}(t)B(t)C(t) \in C [T, \infty). \quad (5.9.7)$$

Так как матрицы  $C(t)$  и  $C^{-1}(t)$  ограничены, то из формулы (5.9.7) вытекает, что

$$\|Q(t)\| \leq c_1 \|\dot{C}(t)\| + c_2 \|B(t)\|,$$

где  $c_1$  и  $c_2$  — положительные постоянные.

Если матрицы  $\dot{A}(t)$  и  $B(t)$  абсолютно интегрируемы на  $[t_0, \infty)$ , то  $\dot{C}(t)$  абсолютно интегрируема на  $[T, \infty)$  (см. § 8) и, следовательно,

$$\int_T^\infty \|Q(t)\| dt \leq c_1 \int_T^\infty \|\dot{C}(t)\| dt + c_2 \int_T^\infty \|B(t)\| dt < \infty.$$

Таким образом,  $Q(t) \in L[T, \infty)$ .

Так как матрица  $A(t)$  ограничена, то из формулы (5.9.6) следует, что  $\Lambda(t)$  также ограничена.

Теорема доказана полностью.

Пример [60]. Рассмотрим скалярное уравнение

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + p(t)x = 0, \quad (5.9.8)$$

где  $p(t) \in C^1[t_0, \infty)$ ,  $\dot{p}(t) \in L[t_0, \infty)$ , причем  $p(t) > 0$ ,  $p(\infty) \neq 0$ .

Уравнение (5.9.8) можно записать в виде системы

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= -\omega^2(t)x, \end{aligned} \right\} \quad (5.9.9)$$

где  $p(t) = \omega^2(t)$ . Рассмотрим характеристическое уравнение

$$\Delta(\lambda, t) \equiv \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ \omega^2(t) & \lambda \end{vmatrix} = 0; \quad (5.9.10)$$

его корни будут

$$\lambda_1(t) = i\omega(t), \quad \lambda_2(t) = -i\omega(t).$$

Построим матрицу

$$C(t) = \begin{bmatrix} c_{11}(t) & c_{12}(t) \\ c_{21}(t) & c_{22}(t) \end{bmatrix},$$

приводящую матрицу системы (5.9.9)

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2(t) & 0 \end{bmatrix}$$

к диагональному виду. Так как собственные векторы

$$c^{(k)}(t) = \begin{bmatrix} c_{1k}(t) \\ c_{2k}(t) \end{bmatrix} \quad (k = 1, 2)$$

ортогональны к матрице  $\Delta [\lambda_k(t), t]$ , то при  $k=1$  имеем

$$\begin{bmatrix} i\omega(t) & -1 \\ \omega^2(t) & i\omega(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11}(t) \\ c_{21}(t) \end{bmatrix} = 0.$$

Отсюда можно принять

$$c_{11}(t) = 1, \quad c_{21}(t) = i\omega(t).$$

Аналогично при  $k=2$  получаем

$$\begin{bmatrix} -i\omega(t) & -1 \\ \omega^2(t) & -i\omega(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{12}(t) \\ c_{22}(t) \end{bmatrix} = 0$$

и, значит, можно положить

$$c_{12}(t) = 1, \quad c_{22}(t) = -i\omega(t).$$

Следовательно, матрица  $C(t)$  имеет вид

$$C(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i\omega(t) & -i\omega(t) \end{bmatrix}.$$

Обычным способом находим обратную матрицу

$$C^{-1}(t) = \frac{i}{2\omega(t)} \begin{bmatrix} -i\omega(t) & -1 \\ -i\omega(t) & 1 \end{bmatrix}.$$

Кроме того,

$$\dot{C}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ i\dot{\omega}(t) & -i\dot{\omega}(t) \end{bmatrix}.$$

Записав систему (5.9.9) в виде

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i\omega(t) & -i\omega(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

положим

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i\omega(t) & -i\omega(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i\omega(t) & -i\omega(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ i\dot{\omega}(t) & -i\dot{\omega}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i\omega(t) & -i\omega(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

или, после упрощений,

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i\omega(t) & 0 \\ 0 & -i\omega(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} - \frac{\dot{\omega}(t)}{2\omega(t)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}. \quad (5.9.11)$$

Система (5.9.11) является  $L$ -диагональной, причем выполнено свойство А:

$$\operatorname{Re} [\lambda_1(t) - \lambda_2(t)] = \operatorname{Re} [2i\omega(t)] = 0.$$

Имеем

$$\frac{\dot{\omega}(t)}{\omega(t)} = \frac{\frac{d}{dt} \sqrt{p(t)}}{\sqrt{p(t)}} = \frac{\dot{p}(t)}{2p(t)}.$$



Так как  $p(t) \geq c > 0$ , то

$$\int_{t_0}^{\infty} \left| \frac{\dot{\omega}(t)}{\omega(t)} \right| dt \leq \frac{1}{2c} \int_{t_0}^{\infty} |\dot{p}(t)| dt < \infty.$$

Следовательно, для фундаментальной матрицы системы (5.9.11) справедлива асимптотическая формула

$$\Xi(t) = \begin{bmatrix} \exp \left[ i \int_{t_0}^t \omega(t_1) dt_1 \right] + \varepsilon_1(t) & \varepsilon_2(t) \\ \varepsilon_3(t) & \exp \left[ -i \int_{t_0}^t \omega(t_1) dt_1 \right] + \varepsilon_4(t) \end{bmatrix},$$

где  $\varepsilon_j(t) \rightarrow 0$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) при  $t \rightarrow \infty$ .

Возвращаясь к прежним переменным  $x$  и  $y$  и учитывая ограниченность функции  $\omega(t)$ , для системы (5.9.9) получим фундаментальную матрицу

$$\begin{aligned} \tilde{X}(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i\omega(t) & -i\omega(t) \end{bmatrix} \Xi(t) = \\ &= \begin{bmatrix} \exp \left[ i \int_{t_0}^t \omega(t_1) dt_1 \right] + \bar{\varepsilon}_1(t) & \exp \left[ -i \int_{t_0}^t \omega(t_1) dt_1 \right] + \bar{\varepsilon}_2(t) \\ i\omega(t) \exp \left[ i \int_{t_0}^t \omega(t_1) dt_1 \right] + \bar{\varepsilon}_3(t) & -i\omega(t) \exp \left[ -i \int_{t_0}^t \omega(t_1) dt_1 \right] + \bar{\varepsilon}_4(t) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

где  $\bar{\varepsilon}_j(t) \rightarrow 0$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) при  $t \rightarrow \infty$ .

Пологая

$$X(t) = \tilde{X}(t) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2i} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2i} \end{bmatrix},$$

получим фундаментальную матрицу вида

$$X(t) = \begin{bmatrix} \cos \int_{t_0}^t \omega(t_1) dt_1 + \eta_1(t) & \sin \int_{t_0}^t \omega(t_1) dt_1 + \eta_2(t) \\ -\omega(t) \sin \int_{t_0}^t \omega(t_1) dt_1 + \eta_3(t) & \omega(t) \cos \int_{t_0}^t \omega(t_1) dt_1 + \eta_4(t) \end{bmatrix},$$

где  $\eta_j(t) \rightarrow 0$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) при  $t \rightarrow \infty$ , причем в силу первого из уравнений (5.9.9) имеем

$$\eta_3(t) = \dot{\eta}_1(t) \text{ и } \eta_4(t) = \dot{\eta}_2(t).$$

Таким образом, уравнение (5.9.8) имеет при  $t \rightarrow \infty$  общее решение асимптотического вида

$$x = c_1 \cos \int_{t_0}^t \sqrt{p(t_1)} dt_1 + c_2 \sin \int_{t_0}^t \sqrt{p(t_1)} dt_1 + \eta(t),$$

где  $c_1$  и  $c_2$  — произвольные постоянные и  $\eta(t)$ ,  $\dot{\eta}(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

## § 10. Теорема Боля

В этом параграфе мы установим некоторые достаточные условия существования ограниченного на всей оси  $I_t = \{-\infty < t < +\infty\}$  решения дифференциальной системы.

Предварительно докажем одну лемму (см. [61]).

Лемма. Пусть

$$\frac{dy}{dt} = Ay + f(t), \quad (5.10.1)$$

где  $y = (y_1, \dots, y_n)$ ,  $A = [a_{jk}]$  — постоянная  $(n \times n)$ -матрица,  $f(t) \in C(-\infty, +\infty)$ , причем  $\operatorname{Re} \lambda_j(A) \neq 0$  ( $j = 1, \dots, n$ ) и

$$\sup_t \|f(t)\| = \Gamma < \infty.$$

Тогда существует матрица  $G(t) \in C^\infty$  ( $0 < |t| < \infty$ ), имеющая следующие свойства:

1)  $G(+0) - G(-0) = E_n$ , где  $E_n$  — единичная  $(n \times n)$ -матрица;  
2)  $\|G(t)\| \leq ce^{-\alpha|t|}$  ( $t \neq 0$ ), где  $c$  и  $\alpha$  — положительные постоянные;

3)  $\dot{G}(t) = AG(t)$  при  $t \neq 0$ ;

$$4) \quad \eta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t-t_1)f(t_1)dt_1, \quad (5.10.2)$$

представляет собой единственное ограниченное на  $I_t$  решение системы (5.10.1).

Доказательство. С помощью неособенной постоянной  $(n \times n)$ -матрицы  $S$  матрицу  $A$  можно привести к следующему виду:

$$A = S^{-1} \operatorname{diag}(P, N) S,$$

где характеристические числа матрицы  $P$  имеют положительные вещественные части:

$$\operatorname{Re} \lambda_j(P) > 0 \quad (j = 1, \dots, m),$$

а характеристические числа матрицы  $N$  имеют отрицательные вещественные части:

$$\operatorname{Re} \lambda_j(N) < 0 \quad (j = m+1, \dots, n). \quad (5.10.3)$$

Положим

$$\begin{aligned} G(t) &= -S^{-1} \operatorname{diag}(e^{Pt}, 0) S \quad \text{при } t < 0, \\ G(t) &= S^{-1} \operatorname{diag}(0, e^{Nt}) S \quad \text{при } t > 0. \end{aligned} \quad (5.10.4)$$

Очевидно, имеем  $G(t) \in C^\infty$  ( $0 < |t| < \infty$ ). Кроме того,

$$G(+0) - G(-0) = E_n$$

и, таким образом, свойство 1) выполнено.

Далее, полагая

$$0 < \alpha_1 < \min_j \lambda_j(P)$$

и

$$0 < \alpha_2 < \min_j [-\lambda_j(N)],$$

получим

$$\|e^{Pt}\| \leq c_1 e^{\alpha_1 t} \quad \text{при } t \leq 0$$

и

$$\|e^{Nt}\| \leq c_2 e^{-\alpha_2 t} \quad \text{при } t \geq 0,$$

где  $c_1$  и  $c_2$  — некоторые положительные постоянные. Отсюда вытекает свойство 2):

$$\|G(t)\| \leq c e^{-\alpha|t|} \quad (t \neq 0), \quad (5.10.5)$$

где  $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$  и  $c$  — положительная постоянная.

Дифференцируя по  $t$  формулу (5.10.3), будем иметь

$$\begin{aligned} \dot{G}(t) &= -S^{-1} \text{diag}(Pe^{Pt}, 0)S = \\ &= -S^{-1} \text{diag}(P, N)S \cdot S^{-1} \text{diag}(e^{Pt}, 0)S = AG(t) \quad \text{при } t < 0. \end{aligned}$$

Аналогично из формулы (5.10.4) получим

$$G(t) = AG(t) \quad \text{при } t > 0.$$

Следовательно, имеет место свойство 3).

Наконец, из неравенства (5.10.5) выводим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \|G(t)\| dt \leq 2c \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} dt = \frac{2c}{\alpha}. \quad (5.10.6)$$

Поэтому интеграл (5.10.2) сходится для любого  $t \in (-\infty, +\infty)$ , причем сходимость равномерна на каждом конечном интервале  $a < t < b$ . Так как

$$\eta(t) = \int_{-\infty}^t G(t-t_1)f(t_1) dt_1 + \int_t^{\infty} G(t-t_1)f(t_1) dt_1,$$

то, формально дифференцируя по параметру  $t$ , будем иметь

$$\begin{aligned} \dot{\eta}(t) &= [G(+0) - G(-0)]f(t) + \\ &+ \int_{-\infty}^t AG(t-t_1)f(t_1) dt_1 + \int_t^{\infty} AG(t-t_1)f(t_1) dt_1 \equiv \\ &\equiv f(t) + A\eta(t) \quad \text{при } -\infty < t < +\infty. \end{aligned}$$

Дифференцирование законно, так как несобственные интегралы, полученные в результате формального дифференцирования, сходятся равномерно на каждом конечном интервале  $(a, b) \in I_t$ .

Итак,  $\eta(t)$  является решением системы (5.10.1). Оценивая  $\eta(t)$  по норме, на основании (5.10.6) будем иметь

$$\|\eta(t)\| \leq \sup_t \|\mathbf{f}(t)\| \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \|G(t-t_1)\| dt_1 \leq \Gamma \cdot \frac{2c}{\alpha} = \Gamma_1 < \infty. \quad (5.10.7)$$

Следовательно, решение  $\eta(t)$  ограничено на действительной оси  $-\infty < t < +\infty$ .

То, что ограниченное решение  $\eta(t)$  единственно, следует из того, что для двух ограниченных на  $I_t$  решений  $\eta(t)$  и  $\eta_1(t)$  их разность

$$\xi(t) = \eta_1(t) - \eta(t)$$

является решением однородной системы

$$\frac{dx}{dt} = Ax,$$

единственным ограниченным на  $I_t$  решением которой является тривиальное решение  $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$ .

Таким образом, свойство 4) также выполнено.

Следствие. Для ограниченного решения  $\eta(t)$  системы (5.10.1) справедлива оценка

$$\sup_t \|\eta(t)\| \leq k \sup_t \|\mathbf{f}(t)\|,$$

где постоянная  $k$  зависит только от матрицы  $A$  (см. (5.10.7)).

Замечание. Если свободный член  $\mathbf{f}(t)$  системы (5.10.1) есть  $\omega$ -периодическая вектор-функция:

$$\mathbf{f}(t + \omega) \equiv \mathbf{f}(t) \quad (\omega > 0),$$

то ограниченное решение  $\eta(t)$  также  $\omega$ -периодично.

Действительно, на основании формулы (5.10.2) имеем

$$\begin{aligned} \eta(t + \omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} G(t + \omega - t_1) \mathbf{f}(t_1) dt_1 = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} G(t - t_1) \mathbf{f}(t_1 + \omega) dt_1 \equiv \eta(t). \end{aligned}$$

Теорема Боля (см. [62]). Пусть дана действительная система

$$\frac{dy}{dt} = Ay + \varphi(t, y), \quad (5.10.8)$$

где  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ ,  $A = [a_{jk}]$  — постоянная  $(n \times n)$ -матрица,  $\Phi(t, \mathbf{y}) \in C_{ty}(I_t \times \|\mathbf{y}\| < \infty)$ .

Если

- 1)  $\operatorname{Re} \lambda_j(A) \neq 0$  ( $j=1, \dots, n$ ), причем  $\operatorname{Re} \lambda_j(A) > 0$  при  $j=1, \dots, m$ ,  $\operatorname{Re} \lambda_j(A) < 0$  при  $j=m+1, \dots, n$  ( $0 \leq m \leq n$ );
- 2)  $\sup_t \|\Phi(t, 0)\| = \Gamma < \infty$ ;
- 3) выполнено условие Липшица

$$\|\Phi(t, \mathbf{y}) - \Phi(t, \mathbf{z})\| \leq N \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\| \quad \text{при } \mathbf{y} \in \mathcal{R}_y^1, \mathbf{z} \in \mathcal{R}_y^1,$$

то при достаточно малой константе Липшица  $N$

1') существует решение  $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}(t)$  системы (5.10.8), определенное и ограниченное на всей оси  $I_t^1$ ;

2') в пространстве  $\mathcal{R}_y^n$  имеются многообразия  $S_m^+$  и  $S_{n-m}^-$ , соответственно, измерений  $m$  и  $n-m$  такие, что решения  $\mathbf{y}(t; 0, \mathbf{y}_0)$  системы (5.10.8) обладают свойствами:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} [\mathbf{y}(t; 0, \mathbf{y}_0) - \boldsymbol{\eta}(t)] = 0, \quad \text{если } \mathbf{y}_0 \in S_m^+, \quad (5.10.9)$$

и

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} [\mathbf{y}(t; 0, \mathbf{y}_0) - \boldsymbol{\eta}(t)] = 0, \quad \text{если } \mathbf{y}_0 \in S_{n-m}^-. \quad (5.10.10)$$

Доказательство. 1) Принимая  $\Phi(t, \mathbf{y})$  за свободный член, по аналогии с формулой (5.10.2), рассмотрим интегральное уравнение

$$\mathbf{y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t_1) \Phi(t_1, \mathbf{y}(t_1)) dt_1, \quad (5.10.11)$$

где  $G(t)$  — функция, определенная в лемме. В силу свойств 1), 2), 3) и 4) функции  $G(t)$  непрерывное ограниченное решение  $\boldsymbol{\eta}(t)$  интегрального уравнения (5.10.11) является также решением дифференциального уравнения (5.10.8).

Пусть

$$c_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \|G(t)\| dt \quad (c_1 < \infty)$$

и

$$\mathbf{y}^{(0)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t-t_1) \Phi(t_1, 0) dt_1.$$

<sup>1)</sup> Случаи  $m=0$  и  $m=n$  не исключаются,

На основании условия 2) имеем

$$\begin{aligned} \| \mathbf{y}^{(0)}(t) \| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \| G(t-t_1) \| \| \varphi(t_1, 0) \| dt_1 \leq \\ &\leq \sup_{t_1} \| \varphi(t_1, 0) \| \int_{-\infty}^{+\infty} \| G(t-t_1) \| dt = \Gamma c_1 = \Gamma_1. \end{aligned}$$

Выберем число  $H$  такое, что

$$H > 2\Gamma_1. \quad (5.10.12)$$

В пространстве  $R$  непрерывных и ограниченных на  $I_t$  вектор-функций  $\mathbf{y}(t)$ , где

$$\sup_t \| \mathbf{y}(t) \| < H,$$

рассмотрим оператор  $T$ , определяемый правой частью интегрального уравнения (5.10.11):

$$T\mathbf{y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t_1) \varphi(t_1, \mathbf{y}(t_1)) dt_1. \quad (5.10.13)$$

Так как при  $\| \mathbf{y} \| < H$  имеем

$$\sup_{t, \mathbf{y}} \| \varphi(t, \mathbf{y}) \| \leq \sup_t \| \varphi(t, 0) \| + N \sup_{\mathbf{y}} \| \mathbf{y} \| < \Gamma + NH,$$

то при  $\mathbf{y}(t) \in R$  интеграл (5.10.13) сходится, причем равномерно на каждом конечном промежутке  $a < t < b$ . Отсюда легко убедиться, что если  $\mathbf{y}(t) \in R$ , то  $T\mathbf{y}(t)$  имеет смысл для любого  $t \in I_t$  и  $T\mathbf{y}(t) \in C(I_t)$ . Далее, при  $\mathbf{y}(t) \in R$  будем иметь

$$T\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}^{(0)}(t) + \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t_1) [\varphi(t_1, \mathbf{y}(t_1)) - \varphi(t_1, 0)] dt_1.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \| T\mathbf{y}(t) \| &\leq \| \mathbf{y}^{(0)}(t) \| + \\ &+ N \sup_t \| \mathbf{y}(t) \| \int_{-\infty}^{\infty} \| G(t_1) \| dt_1 \leq \Gamma_1 + NHc_1. \end{aligned} \quad (5.10.14)$$

Если выбрать константу Липшица  $N$  столь малой, чтобы

$$N < \frac{1}{2c_1}, \quad (5.10.15)$$

то из неравенства (5.10.14), учитывая, что  $\Gamma_1 < \frac{H}{2}$ , получим

$$\sup_t \| T\mathbf{y}(t) \| \leq \Gamma_1 + \frac{H}{2} < H.$$

Таким образом, при  $N$ , удовлетворяющем неравенству (5.10.15), получаем, что если  $\mathbf{y}(t) \in R$ , то  $T\mathbf{y}(t) \in R$ . В дальнейшем мы будем предполагать, что условие (5.10.15) выполнено.

Для функций  $\mathbf{y}(t), \mathbf{z}(t) \in R$  введем расстояние  $\rho(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ , полагая

$$\rho(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \sup_t \|\mathbf{y}(t) - \mathbf{z}(t)\|.$$

Тогда  $R$  будет являться метрическим пространством (см. § 5), причем это пространство полное.

Убедимся теперь, что при условии (5.10.15) отображение  $T\mathbf{y}(t)$  будет сжатым (§ 5). Действительно, если  $\mathbf{y}(t), \mathbf{z}(t) \in R$ , то из формул

$$T\mathbf{y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t_1) \Phi(t_1, \mathbf{y}(t_1)) dt_1$$

и

$$T\mathbf{z}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t_1) \Phi(t_1, \mathbf{z}(t_1)) dt_1,$$

используя условие Липшица 3), получим

$$\begin{aligned} \|T\mathbf{y}(t) - T\mathbf{z}(t)\| &\leq \\ &\leq N \sup_t \|\mathbf{y}(t) - \mathbf{z}(t)\| \int_{-\infty}^{\infty} \|G(t-t_1)\| dt_1 = Nc_1\rho(\mathbf{y}, \mathbf{z}). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\rho(T\mathbf{y}, T\mathbf{z}) \leq q\rho(\mathbf{y}, \mathbf{z}),$$

где

$$q = Nc_1 < \frac{1}{2}$$

в силу неравенства (5.10.15).

Таким образом, выполнены все условия принципа сжатых отображений (§ 5) и, следовательно, существует непрерывное ограниченное на  $I_t$  решение  $\boldsymbol{\eta}(t)$  интегрального уравнения (5.10.11), а значит, и дифференциального уравнения (5.10.8), причем

$$\sup_t \|\boldsymbol{\eta}(t)\| < H.$$

Решение  $\boldsymbol{\eta}(t)$  может быть найдено методом последовательных приближений

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^{(0)}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t_1) \Phi(t_1, \mathbf{0}) dt_1, \\ \mathbf{y}^{(p)}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t_1) \Phi(t_1, \mathbf{y}^{(p-1)}(t_1)) dt_1 \\ &\quad (p = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

2) В системе (5.10.8) положим

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{\eta}(t) + \mathbf{x}.$$

Тогда будем иметь

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x} + \boldsymbol{\psi}(t, \mathbf{x}), \quad (5.10.16)$$

где

$$\boldsymbol{\psi}(t, \mathbf{x}) = \boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\eta}(t) + \mathbf{x}) - \boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\eta}(t)).$$

Очевидно, имеем

$$\boldsymbol{\psi}(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

и

$$\|\boldsymbol{\psi}(t, \mathbf{x}') - \boldsymbol{\psi}(t, \mathbf{x})\| \leq N \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\| \quad (\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathcal{R}_x^r),$$

причем

$$\boldsymbol{\psi}(t, \mathbf{x}) \xrightarrow{\gamma} \mathbf{0} \quad \text{при } \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}.$$

Отсюда на основании теоремы об условной устойчивости (гл. IV, § 22) заключаем о существовании многообразий  $\mathcal{S}_m^+$  и  $\mathcal{S}_{n-m}^-$ , обладающих, соответственно, свойствами (5.10.9) и (5.10.10).

Замечание. Теорема остается в силе, если предположить, что условие Липшица выполнено лишь в области:  $\|\mathbf{y}\| < H$ ,  $\|\mathbf{z}\| < H$ , где постоянная  $H$  удовлетворяет неравенству (5.10.12).

Следствие 1. Если  $\boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{y})$   $\omega$ -периодична по  $t$ , то ограниченное решение  $\boldsymbol{\eta}(t)$  также  $\omega$ -периодично.

Действительно, в этом случае из равенства

$$\boldsymbol{\eta}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t_1) \boldsymbol{\varphi}(t_1, \boldsymbol{\eta}(t_1)) dt_1$$

получаем

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta}(t+\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} G(t+\omega-t_1) \boldsymbol{\varphi}(t_1, \boldsymbol{\eta}(t_1)) dt_1 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t_1) \boldsymbol{\varphi}(t_1+\omega, \boldsymbol{\eta}(t_1+\omega)) dt_1 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t_1) \boldsymbol{\varphi}(t_1, \boldsymbol{\eta}(t_1+\omega)) dt_1. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\eta}(t+\omega) - \boldsymbol{\eta}(t)\| &\leq \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \|G(t-t_1)\| \|\boldsymbol{\varphi}(t_1, \boldsymbol{\eta}(t_1+\omega)) - \boldsymbol{\varphi}(t_1, \boldsymbol{\eta}(t_1))\| dt_1 \leq \\ &\leq N \sup_t \|\boldsymbol{\eta}(t+\omega) - \boldsymbol{\eta}(t)\| c_1, \end{aligned}$$



где

$$c_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \|G(t)\| dt.$$

Следовательно,

$$\sup_t \|\eta(t + \omega) - \eta(t)\| \leq c_1 N \sup_t \|\eta(t + \omega) - \eta(t)\|,$$

а так как  $c_1 N < 1$ , то

$$\sup_t \|\eta(t + \omega) - \eta(t)\| \leq 0,$$

т. е.

$$\eta(t + \omega) \equiv \eta(t),$$

что и требовалось доказать.

**Следствие 2.** Если для всех характеристических чисел  $\lambda_j(A)$  матрицы  $A$  выполнено условие:

$$\operatorname{Re} \lambda_j(A) < 0,$$

то система (5.10.8) конвергентна (гл. IV, § 16).

Действительно, в этом случае ограниченное решение  $\eta(t)$  единственно (ср. гл. IV, § 16, лемма 1) и для любого решения  $y(t; t_0, y_0)$  системы (5.10.8) имеем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t; t_0, y_0) - \eta(t)\| = 0.$$

### Упражнения к главе V

1. Пусть

$$\frac{dx_\omega}{dt} = A_\omega(t) x_\omega \quad (*)$$

— семейство  $\omega$ -периодических ( $\omega > 0$ ) линейных систем и существует предел

$$A = \lim_{\omega \rightarrow +0} \frac{1}{\omega} \int_0^\omega A_\omega(t) dt.$$

Тогда характеристические показатели  $\lambda_j(\omega)$  ( $j = 1, \dots, n$ ) системы (\*) при надлежащем выборе их мнимых частей имеют пределы:

$$\mu_j = \lim_{\omega \rightarrow +0} \lambda_j(\omega) \quad (j = 1, \dots, n),$$

где  $\mu_j = \mu_j(A)$  — характеристические корни предельной матрицы  $A$  (см. [63], [64]).

2. Вывести асимптотические формулы для решений уравнения

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = p(t) x,$$

где  $p(t) \in C^1[t_0, \infty)$ ,  $\dot{p}(t) \in L[t_0, \infty)$ , причем  $p(t) > 0$ ,  $p(\infty) = a^2 > 0$  (см. [60]).

3. Пусть

$$\frac{dx}{dt} = P(t) x$$

( $x = (x_1, \dots, x_n)$  и  $P(t) = [p_{jk}(t)]$ ) — правильная треугольная система ( $p_{jk}(k) = 0$  при  $k > j$ ) с непрерывной ограниченной на  $I_t$  матрицей  $P(t)$ , причем

$$\alpha_j = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t p_{jj}(t_1) dt_1 \neq 0 \quad (j = 1, \dots, n).$$

Доказать, что в таком случае неоднородная система

$$\frac{dy}{dt} = P(t) y + f(t),$$

где  $f(t) \in C(I_t)$  и  $\sup_t \|f(t)\| < \infty$ , имеет единственное ограниченное на  $I_t$  решение.

4. Пусть  $P(t) = [p_{jk}(t)] \in C(I_t^+)$  и  $\sup_t \|P(t)\| < \infty$ . Говорят, что система

$$\frac{dx}{dt} = P(t) x \quad (**)$$

удовлетворяет условиям Перрона [29], если для любой непрерывной и ограниченной на  $I_t^+$  вектор-функции  $f(t)$  соответствующая неоднородная система

$$\frac{dy}{dt} = P(t) y + f(t)$$

имеет решение  $y = y(t)$ ,  $y(t_0) = 0$ , ограниченное на  $I_t^+ = [t_0 \leq t < \infty)$ .

Доказать (см. [65]), что система (\*\*) удовлетворяет условиям Перрона тогда и только тогда, когда для ее матрицы Коши  $K(t, \tau) = X(t) X^{-1}(\tau)$  справедлива оценка:

$$\|K(t, \tau)\| \leq a e^{-\alpha(t-\tau)} \quad (t_0 \leq \tau \leq t),$$

где  $a$  и  $\alpha$  — некоторые положительные постоянные.

### § 1. Почти периодические функции в смысле Бора

Определение 1. Числовое множество  $E = \{\xi\}$  называется *относительно плотным* на действительной оси  $-\infty < x < +\infty$ , если существует число  $l > 0$  такое, что каждый отрезок<sup>1)</sup>  $a \leq x \leq a + l$  длины  $l$  содержит хотя бы один элемент нашего множества, т. е. при любом  $a$  имеем

$$[a, a + l] \cap E \neq \emptyset.$$

Пример. Множество  $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , очевидно, является относительно плотным множеством. Здесь можно принять  $l = 1$ .

Множество  $0, \pm 1^2, \pm 2^2, \dots$  не является относительно плотным, так как

$$\sup_k |(k+1)^2 - k^2| = \infty.$$

Рассмотрим комплекснозначную функцию

$$f(x) = \varphi(x) + i\psi(x) \in C(-\infty, \infty),$$

где  $\varphi(x) = \operatorname{Re} f(x)$ ,  $\psi(x) = \operatorname{Im} f(x)$ .

Определение 2. Число  $\tau = \tau_f(\varepsilon)$  называется *почти периодом* функции  $f(x)$  с точностью до  $\varepsilon$  (короче: ее  $\varepsilon$ -почти периодом или  $\varepsilon$ -смещением), если для любого  $x \in (-\infty, \infty)$  имеет место неравенство

$$|f(x + \tau) - f(x)| < \varepsilon.$$

Очевидно, период функции есть ее почти период для любого  $\varepsilon > 0$ . Нетрудно показать, что 1) 0 есть почти период для любого  $\varepsilon > 0$ ; 2) если  $\tau$  есть  $\varepsilon$ -почти период функции  $f(x)$ , то  $-\tau$  есть также  $\varepsilon$ -почти период этой функции; 3) сумма и разность  $\varepsilon$ -почти периодов этой функции есть также почти период ее с точностью до  $2\varepsilon$ .

---

<sup>1)</sup> В определении 1 вместо замкнутого отрезка можно брать открытый интервал.

Определение 3 (см. [66]). Комплекснозначная функция  $f(x) \in C(-\infty, \infty)$  называется *почти периодической в смысле Бора*<sup>1)</sup>, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует относительно плотное множество почти периодов  $\tau$  функции  $f(x)$  с точностью до  $\varepsilon$ , т. е. существует положительное число  $l = l(\varepsilon)$  такое, что любой отрезок  $[a, a + l]$  содержит по меньшей мере одно число  $\tau$ , для которого выполнено неравенство

$$|f(x + \tau) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad -\infty < x < +\infty. \quad (1.1)$$

Основы теории почти периодических функций были заложены датским математиком Г. Бором [66]. Основные теоремы о почти периодических функциях изложены, например, в [66] и [67].

Из определения следует, что всякая непрерывная периодическая функция, определенная на оси, является почти периодической.

Обратное утверждение не верно, почти периодическая функция может не быть периодической (см. дальше).

З а м е ч а н и е. Две точки

$$x \text{ и } x' = x + \tau,$$

отличающиеся на  $\varepsilon$ -почти период функции  $f(x)$ , назовем  $\varepsilon$ -*конгруэнтными*.

Если функция  $f(x)$  почти периодическая, то для каждой точки  $x \in (-\infty, \infty)$  на любом отрезке  $[a, a + l]$ , где  $l = l(\varepsilon)$ , найдется  $\varepsilon$ -конгруэнтная ей точка  $x' \in [a, a + l]$ .

Действительно, в силу определения почти периодической функции  $f(x)$  на отрезке  $[-x + a, -x + a + l]$  существует ее  $\varepsilon$ -почти период  $\tau$ , т. е.

$$-x + a \leq \tau \leq -x + a + l.$$

Отсюда, полагая  $x' = x + \tau$ , получим

$$a \leq x' \leq a + l.$$

Отметим некоторые элементарные свойства почти периодических функций (сокращенно — п. п. функций).

1. Если  $f(x)$  — п. п. функция, то  $\alpha f(x) + \beta$  ( $\alpha, \beta$  — комплексные числа) и  $f(ax + b)$  ( $a, b$  — действительные числа) также п. п. функции.

2. Если  $f(x)$  — п. п. функция, то  $\operatorname{Re} f(x)$ ,  $\operatorname{Im} f(x)$ ,  $|f(x)|$  и  $\overline{f(x)}$  также почти периодические функции.

<sup>1)</sup> Некоторые авторы здесь придерживаются терминологии «*равномерная почти периодическая функция*» (см. [67]), чтобы отличить почти периодические функции от обобщенных почти периодических функций. Так как в нашем курсе обобщенные почти периодические функции не затрагиваются, то мы сохраним термин «почти периодическая функция».

Например, если  $\tau$  есть  $\varepsilon$ -почти период п. п. функции  $f(x)$ , то для ее модуля  $|f(x)|$ , очевидно, справедливо неравенство

$$||f(x + \tau)| - |f(x)|| \leq |f(x + \tau) - f(x)| < \varepsilon$$

и, следовательно,  $|f(x)|$  есть также п. п. функция.

Укажем более общее свойство.

**Теорема.** Если  $E$  — множество значений почти периодической функции  $f(x)$  и  $F(y)$  — функция, равномерно непрерывная на  $E$ , то функция  $F(f(x))$  — почти периодическая.

**Доказательство.** Пусть  $\varepsilon > 0$  произвольно и  $\delta > 0$  таково, что

$$|F(y') - F(y'')| < \varepsilon \text{ при } |y' - y''| < \delta \\ (y', y'' \in E). \quad (1.2)$$

Тогда, если  $\tau = \tau_f(\delta)$ , то в силу (1.2) имеем

$$|F(f(x + \tau)) - F(f(x))| < \varepsilon \text{ при } -\infty < x < \infty.$$

Таким образом,  $\tau$  есть  $\varepsilon$ -почти период функции  $F(f(x))$ , что и доказывает ее почти периодичность.

## § 2. Основные свойства почти периодических функций

**Теорема 1.** Почти периодическая функция равномерно ограничена на действительной оси.

**Доказательство.** Пусть  $f(x)$  — п. п. функция и  $l_1 = l(1)$  — соответствующее число из определения 3 (§ 1) для  $\varepsilon = 1$ . Так как  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[0, l_1]$ , то

$$\sup_{0 \leq x \leq l_1} |f(x)| = M < \infty.$$

В силу замечания (§ 1) для любой точки  $x \in (-\infty, \infty)$  и  $\varepsilon = 1$  существует  $\varepsilon$ -конгруэнтная ей точка  $x' = x + \tau \in [0, l_1]$ . Отсюда

$$|f(x)| \leq |f(x')| + |f(x) - f(x')| < M + 1 < \infty.$$

Следовательно,  $f(x)$  ограничена на  $(-\infty, \infty)$ .

**Теорема 2.** Почти периодическая функция равномерно непрерывна на действительной оси.

**Доказательство.** Пусть  $f(x)$  — п. п. функция и  $l = l_f\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$ , где  $\varepsilon > 0$ , произвольно.

Рассмотрим отрезок  $I = [-1, l + 1]$  (рис. 55). Так как функция  $f(x)$ , будучи непрерывной на  $(-\infty, \infty)$ , равномерно непрерывна на  $I$ , то существует  $\delta = \delta\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) > 0$  ( $\delta < 1$ ) такое, что для

любых точек  $x_1, x_2 \in I$ , для которых  $|x_1 - x_2| < \delta$ , справедливо неравенство

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.1)$$

Пусть теперь  $x$  и  $y$  — произвольная пара точек из  $(-\infty, \infty)$ , удовлетворяющая условию:

$$|x - y| < \delta.$$

Для точки  $x$  найдется  $\frac{\varepsilon}{3}$ -конгруэнтная точка  $x' = x + \tau \in [0, l]$ .

Тогда, так как  $\delta < l$ , то для  $y$  имеется  $\frac{\varepsilon}{3}$ -конгруэнтная точка  $y' = y + \tau \in I$ .

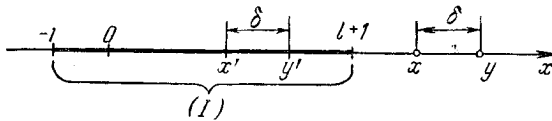


Рис. 55.

Учитывая неравенство (2.1), имеем

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f(x')| + |f(x') - f(y')| + |f(y') - f(y)| < \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Следовательно,  $f(x)$  равномерно непрерывна на  $(-\infty, \infty)$ .

**Следствие 1.** Для каждого  $\varepsilon > 0$  множество  $\varepsilon$ -почти периодов почти периодической функции  $f(x)$  содержит относительно плотно множество отрезков фиксированной длины  $\eta = \eta(\varepsilon)$ , т. е. существует число  $L = L(\varepsilon)$  такое, что на любом отрезке  $[a, a + L]$  имеется подотрезок  $[x, x + \eta]$ , все точки которого  $\xi \in [x, x + \eta]$  являются  $\varepsilon$ -почти периодами функции  $f(x)$ .

Действительно, пусть  $\eta = \delta \left( \frac{\varepsilon}{2} \right)$ , где  $\delta$  определяется из свойства равномерной непрерывности функции  $f(x)$ . Положим

$$L = l \left( \frac{\varepsilon}{2} \right) + \eta,$$

где  $l \left( \frac{\varepsilon}{2} \right)$  — число из определения п. п. функции (§ 1).

Рассмотрим произвольный отрезок  $[a, a + L]$ . Из определения п. п. следует, что существует  $\frac{\varepsilon}{2}$ -почти период  $\tau \in \left[ a + \frac{\eta}{2}, a + L - \frac{\eta}{2} \right]$ . Тогда  $\left[ \tau - \frac{\eta}{2}, \tau + \frac{\eta}{2} \right] \subset [a, a + L]$  (рис. 56). Отсюда при любом

$\xi \in \left[ \tau - \frac{\eta}{2}, \tau + \frac{\eta}{2} \right]$ , учитывая неравенство  $|\xi - \tau| < \delta \left( \frac{\varepsilon}{2} \right)$ , получим

$$|f(x + \xi) - f(x)| \leq |f(x + \xi) - f(x + \tau)| + |f(x + \tau) - f(x)| < < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом, отрезок  $[a, a + \eta]$ , где  $a = \tau - \frac{\eta}{2}$ , целиком состоит из  $\varepsilon$ -почти периодов функции  $f(x)$ .

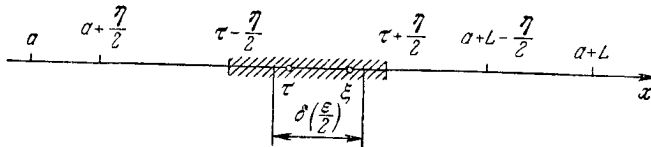


Рис. 56.

**Следствие 2.** Для почти периодической функции  $f(x)$  для каждого  $\varepsilon > 0$  существует относительно плотное множество  $\varepsilon$ -почти периодов  $\tau$ , являющихся целыми кратными числа  $\eta = \eta(\varepsilon)$ .

### § 3. Арифметические действия с почти периодическими функциями

**Лемма 1.** Для двух почти периодических функций при любом  $\varepsilon > 0$  существует относительно плотное множество их общих  $\varepsilon$ -почти периодов.

**Доказательство.** Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  — п. п. функции и  $\delta_1 = \delta_f \left( \frac{\varepsilon}{2} \right)$ ,  $\delta_2 = \delta_g \left( \frac{\varepsilon}{2} \right)$  — числа, характеризующие их равномерную непрерывность (§ 2).

Положим

$$\eta = \min(\delta_1, \delta_2).$$

В силу следствия 2 (§ 2) существуют числа  $l_1 = l_f \left( \frac{\varepsilon}{2} \right)$  и  $l_2 = l_g \left( \frac{\varepsilon}{2} \right)$  такие, что каждый из отрезков  $[a, a + l_1]$  и  $[a, a + l_2]$  будет содержать соответствующие  $\frac{\varepsilon}{2}$ -почти периоды  $\tau_f$  и  $\tau_g$ , кратные числу  $\eta$ . Если положить  $l = \max(l_1, l_2)$ , то на каждом отрезке  $[a, a + l]$  найдется пара  $\frac{\varepsilon}{2}$ -почти периодов  $\tau_f = n'\eta$  и  $\tau_g = n''\eta$ , где  $n'$  и  $n''$  — целые числа и  $|\tau_f - \tau_g| \leq l$ .

Так как  $\tau_f - \tau_g = (n' - n'')\eta = n\eta$ , где  $n$  — целое число, причем  $|n\eta| \leq l$ , то  $n$  может принимать лишь конечное число

значений; пусть это будут величины  $n_1\eta$ ,  $n_2\eta$ , ...,  $n_p\eta$ , и пусть «представителями» их являются пары  $\frac{\varepsilon}{2}$ -почти периодов  $(\tau_f^{(1)}, \tau_g^{(1)})$ ,  $(\tau_f^{(2)}, \tau_g^{(2)})$ , ...,  $(\tau_f^{(p)}, \tau_g^{(p)})$ , т. е.

$$\tau_f^{(s)} - \tau_g^{(s)} = n_s \eta \quad (s = 1, \dots, p).$$

Положим

$$\max_s |\tau_f^{(s)}| = T.$$

Покажем, что каждый отрезок длины  $L = l + 2T$  содержит по меньшей мере один общий  $\varepsilon$ -почти период  $\tau = \tau_f(\varepsilon) = \tau_g(\varepsilon)$  функций  $f(x)$  и  $g(x)$ .

Действительно, пусть  $[a, a + l + 2T]$  есть произвольный отрезок длины  $L$ . Возьмем на отрезке  $[a + T, a + l + T]$  длины  $l$  два  $\frac{\varepsilon}{2}$ -почти периода  $\tau_f = n'\eta$  и  $\tau_g = n''\eta$ , и пусть  $\tau_f - \tau_g = n_s\eta = \tau_f^{(s)} - \tau_g^{(s)}$ .

Отсюда получаем

$$\tau = \tau_f - \tau_f^{(s)} = \tau_g - \tau_g^{(s)}. \quad (3.1)$$

Так как  $\tau_f \in [a + T, a + l + T]$  и  $|\tau_f^{(s)}| \leq T$ , то  $\tau \in [a, a + l + 2T]$ . Нетрудно видеть, что число  $\tau$  является общим  $\varepsilon$ -почти периодом функций  $f(x)$  и  $g(x)$ .

В самом деле, на основании формулы (3.1) имеем

$$\begin{aligned} |f(x + \tau) - f(x)| &\leq |f((x - \tau_f^{(s)}) + \tau_f) - f(x - \tau_f^{(s)})| + \\ &\quad + |f(x - \tau_f^{(s)}) - f((x - \tau_f^{(s)}) + \tau_f^{(s)})| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} |g(x + \tau) - g(x)| &\leq |g((x - \tau_g^{(s)}) + \tau_g) - g(x - \tau_g^{(s)})| + \\ &\quad + |g(x - \tau_g^{(s)}) - g((x - \tau_g^{(s)}) + \tau_g^{(s)})| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

**Замечание.** Лемма 1 легко распространяется на конечное число функций.

**Теорема 1.** Сумма двух почти периодических функций есть функция также почти периодическая.

**Доказательство.** Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  — п. п. функции и, следовательно,  $f(x), g(x) \in C(-\infty, \infty)$ . Отсюда  $f(x) + g(x) \in C(-\infty, \infty)$ . Согласно лемме 1 для функций  $f(x)$  и  $g(x)$  при



каждом  $\varepsilon > 0$  существует относительно плотное множество их общих почти периодов  $\tau = \tau_f\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \tau_g\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ . Отсюда имеем

$$\begin{aligned} |[f(x + \tau) + g(x + \tau)] - [f(x) + g(x)]| &\leq \\ &\leq |f(x + \tau) - f(x)| + |g(x + \tau) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

т. е.  $\tau = \tau_{f+g}(\varepsilon)$ , что и доказывает почти периодичность суммы  $f(x) + g(x)$ .

*Следствие 1. Сумма конечного числа почти периодических функций (или периодических функций с любыми периодами) есть функция почти периодическая.*

*Следствие 2. Линейная комбинация*

$$f(x) = \sum_{k=1}^n c_k f_k(x) \quad (c_k - \text{постоянные})$$

*почти периодических функций  $f_k(x)$  ( $k=1, \dots, n$ ) есть функция почти периодическая.*

В частности, каждый *тригонометрический полином*

$$P(x) = \sum_{k=1}^n c_k e^{i\lambda_k x}$$

( $\lambda_k$  действительны) является п. п. функцией.

*Замечание.* Существуют п. п. функции, не являющиеся периодическими.

Например,  $f(x) = \sin x + \sin(x\sqrt{2})$  есть п. п. функция, не сводящаяся к периодической.

*Теорема 2. Произведение двух почти периодических функций есть функция почти периодическая.*

*Доказательство.* Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  — п. п. функции и  $\{\tau\}$  — относительно плотное множество их общих  $\varepsilon$ -почти периодов:

$$\tau = \tau_f(\varepsilon) = \tau_g(\varepsilon).$$

Замечая, что  $f(x)g(x) \in C(-\infty, \infty)$  и полагая (§ 2)

$$M = \sup_x |f(x)| \quad \text{и} \quad N = \sup_x |g(x)|,$$

будем иметь

$$\begin{aligned} |f(x + \tau)g(x + \tau) - f(x)g(x)| &\leq |g(x + \tau)| |f(x + \tau) - f(x)| + \\ &+ |f(x)| |g(x + \tau) - g(x)| < N\varepsilon + M\varepsilon = (M + N)\varepsilon. \end{aligned}$$

Так как число  $(M + N)\varepsilon$  может быть произвольно малым, то отсюда вытекает почти периодичность произведения  $f(x)g(x)$ .

Следствие 1. Произведение конечного числа почти периодических функций есть функция почти периодическая.

Следствие 2. Целая положительная степень почти периодической функции есть функция почти периодическая.

Лемма 2. Если  $f(x)$  — почти периодическая функция и

$$\inf_{-\infty < x < \infty} |f(x)| = h > 0,$$

то  $\frac{1}{f(x)}$  также почти периодическая функция.

Действительно, если  $\tau = \tau_f(\varepsilon/h^2)$ , то имеем

$$\left| \frac{1}{f(x+\tau)} - \frac{1}{f(x)} \right| = \frac{|f(x+\tau) - f(x)|}{|f(x)||f(x+\tau)|} < \frac{\varepsilon h^2}{h^2} = \varepsilon.$$

Теорема 3. Частное  $\frac{f(x)}{g(x)}$  двух почти периодических функций  $f(x)$  и  $g(x)$ , где

$$\inf_x |g(x)| > 0,$$

есть функция почти периодическая.

Доказательство непосредственно следует из формулы

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)},$$

теоремы 2 и следствия 2.

#### § 4. Равномерно сходящаяся последовательность почти периодических функций

Теорема 1. Если последовательность почти периодических функций  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$  равномерно сходится на всей числовой оси  $-\infty < x < \infty$ , то предельная функция

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

является почти периодической.

Доказательство. Пусть  $\varepsilon > 0$  произвольно мало. В силу равномерной сходимости

$$f_n(x) \xrightarrow{x} f(x) \in C(-\infty, \infty)$$

существует число  $N = N(\varepsilon)$  такое, что

$$|f(x) - f_N(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad (4.1)$$

причем  $f(x) \in C(-\infty, \infty)$ .

Пусть  $\tau = \tau_{f_N} \left( \frac{\varepsilon}{3} \right)$  — почти период функции  $f_N(x)$  с точностью до  $\frac{\varepsilon}{3}$ . Используя неравенство (4.1), имеем

$$\begin{aligned} |f(x + \tau) - f(x)| &\leq |f(x + \tau) - f_N(x + \tau)| + \\ &\quad + |f_N(x + \tau) - f_N(x)| + |f_N(x) - f(x)| < \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая относительную плотность множества чисел  $\tau$ , заключаем, что предельная функция  $f(x)$  почти периодическая.

Следствие 1. Каждая функция

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x),$$

допускающая равномерную аппроксимацию конечными тригонометрическими полиномами:

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{N_n} c_k^{(n)} e^{i\lambda_k^{(n)} x}$$

( $n = 1, 2, \dots$ ), является почти периодической.

Замечание. Справедлива также обратная теорема, т. е. каждая п. п. функция является равномерным пределом некоторой последовательности тригонометрических полиномов (см. § 16).

Следствие 2. Сумма равномерно сходящегося на  $(-\infty, \infty)$  ряда почти периодических функций есть функция почти периодическая.

Теорема 2. Если почти периодическая функция  $f(x)$  имеет равномерно непрерывную на действительной оси  $-\infty < x < \infty$  производную  $f'(x)$ , то эта производная также почти периодическая.

Доказательство. Пусть

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Полагая  $h = \frac{1}{n}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), очевидно, имеем

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right].$$

Функции

$$f_n(x) = n \left[ f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right]$$

( $n = 1, 2, \dots$ ), представляющие линейные комбинации п. п. функций, очевидно, почти периодические. Имеем

$$\begin{aligned} f'(x) - f_n(x) &= n \left[ \int_0^{\frac{1}{n}} f'(x) dt - \int_0^{\frac{1}{n}} f'(x+t) dt \right] = \\ &= n \int_0^{\frac{1}{n}} [f'(x) - f'(x+t)] dt. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Так как функция  $f'(x)$  равномерно непрерывна на  $(-\infty, \infty)$ , то существует  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  такое, что

$$|f'(x+h) - f'(x)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad |h| < \delta.$$

Поэтому из формулы (4.2) при  $n > N = \frac{1}{\delta(\varepsilon)}$  имеем

$$|f'(x) - f_n(x)| \leq n \int_0^{\frac{1}{n}} |f'(x) - f'(x+t)| dt < n \int_0^{\frac{1}{n}} \varepsilon dt = \varepsilon,$$

т. е.

$$f_n(x) \xrightarrow{x} f'(x).$$

Отсюда в силу теоремы 1 функция  $f'(x)$  п. п.

## § 5. Интеграл почти периодической функции

*Теорема. Интеграл*

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$$

*почти периодической функции  $f(x)$  является функцией почти периодической тогда и только тогда, если он ограничен, т. е. если*

$$\sup_{-\infty < x < \infty} |F(x)| < \infty.$$

*Замечание.* Эта теорема была доказана рижским математиком Бодем (см. [68]) для более узкого класса почти периодических функций с конечным базисом частот (так называемых квазипериодических функций) и обобщена Бором (см. [66]) на общий случай п. п. функций.

Доказательство. Так как п. п. функция ограничена (§ 2), то необходимость условия теоремы тривиальна.

Докажем достаточность условия теоремы, причем, очевидно, можно предполагать, что функции  $f(x)$  и  $F(x)$  вещественны,

1) Очевидно,  $F(x) \in C(-\infty, +\infty)$ . Пусть  $F(x)$  ограничена и

$$m = \inf_x F(x), \quad M = \sup_x F(x),$$

причем можно допустить, что  $m < M$ .

Покажем, что для  $F(x)$  на оси  $(-\infty, +\infty)$  существует относительно плотное множество пар точек  $\{x_1, x_2\}$ , реализующих колебание функции

$$\operatorname{osc}_{-\infty < x < +\infty} F(x) = M - m$$

с точностью до  $\varepsilon$ . Действительно, по свойству нижней и верхней

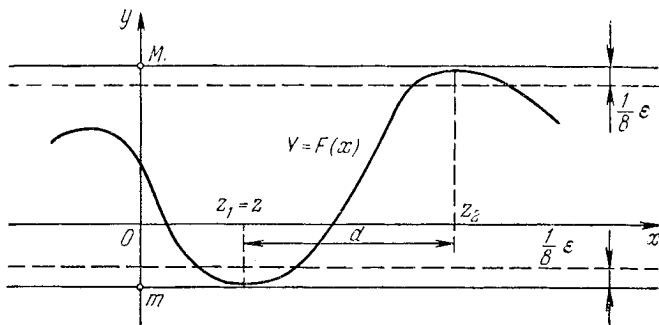


Рис. 57.

граней функции существует пара точек  $(z_1, z_2) \subset (-\infty, \infty)$  такая, что

$$F(z_1) < m + \frac{\varepsilon}{8}, \quad F(z_2) > M - \frac{\varepsilon}{8}, \quad (5.1)$$

где  $\varepsilon > 0$  произвольно (рис. 57), и пусть

$$d = |z_1 - z_2|, \quad z = \min(z_1, z_2).$$

Рассмотрим пару сдвинутых точек

$$x_1 = z_1 + \tau, \quad x_2 = z_2 + \tau, \quad (5.2)$$

где  $\tau = \tau_f\left(\frac{\varepsilon}{4d}\right)$  и  $|x_1 - x_2| = d$ . В силу почти периодичности функции  $f(x)$ , точки  $\tau$ , а следовательно и точки  $x = z + \tau$ , образуют относительно плотное множество, и, следовательно, существует число  $l = l_f\left(\frac{\varepsilon}{4d}\right)$  такое, что всякий отрезок  $[a, a + l]$  будет содержать точку  $x$ , конгруэнтную  $z$ . Поэтому на любом отрезке  $[a, a + L]$  длины  $L = l + d$  будет содержаться пара точек  $\{x_1, x_2\}$

и, таким образом, эти пары точек образуют относительно плотное множество.

Далее, имеем

$$\begin{aligned} F(x_2) - F(x_1) &= \\ &= [F(z_2) + \int_{z_2}^{z_2+\tau} f(t) dt] - [F(z_1) + \int_{z_1}^{z_1+\tau} f(t) dt] = \\ &= F(z_2) - F(z_1) + \int_{z_1}^{z_2} [f(t+\tau) - f(t)] dt. \end{aligned}$$

Отсюда

$$F(x_2) - F(x_1) > M - \frac{\varepsilon}{8} - \left(m + \frac{\varepsilon}{8}\right) - d \cdot \frac{\varepsilon}{4d} = M - m - \frac{\varepsilon}{2},$$

т. е.

$$[M - F(x_2)] + [F(x_1) - m] < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (5.3)$$

Так как числа  $M - F(x_2)$  и  $F(x_1) - m$  неотрицательны, то из неравенства (5.3) получаем

$$M - F(x_2) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad F(x_1) - m < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (5.4)$$

т. е. пара точек  $\{x_1, x_2\}$  реализует колебание функции  $\text{osc } f(x) = M - m$  с точностью до  $\varepsilon$ , причем на каждом отрезке  $[a, a+L]$  длины  $L$ , зависящей только от  $\varepsilon$ , найдется по меньшей мере одна такая пара точек.

2) Пусть теперь  $\tau = \tau_f\left(\frac{\varepsilon}{L}\right)$ . Оценим снизу и сверху разность  $F(x+\tau) - F(x)$ .

Для оценки снизу выберем на отрезке  $\left[x - \frac{L}{2}, x + \frac{L}{2}\right]$  точку  $x_1$ , для которой выполнено второе из неравенств (5.4):

$$F(x_1) < m + \frac{\varepsilon}{2},$$

причем, очевидно,  $|x - x_1| \leq \frac{L}{2}$ . Тогда получим

$$\begin{aligned} F(x+\tau) - F(x) &= \\ &= [F(x_1+\tau) + \int_{x_1+\tau}^{x+\tau} f(t) dt] - [F(x_1) + \int_{x_1}^x f(t) dt] = \\ &= F(x_1+\tau) - F(x_1) + \int_{x_1}^x [f(t+\tau) - f(t)] dt > \\ &> m - \left(m + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \frac{L}{2} \cdot \frac{\varepsilon}{L} = -\varepsilon. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Аналогично для оценки сверху выберем на отрезке  $\left[ x - \frac{L}{2}, x + \frac{L}{2} \right]$  точку  $x_2$ , для которой выполнено первое из неравенств (5.4):

$$F(x_2) > M - \frac{\varepsilon}{2},$$

где  $|x - x_2| \leq \frac{L}{2}$ . Имеем

$$\begin{aligned} F(x + \tau) - F(x) &= \\ &= [F(x_2 + \tau) + \int_{x_2 + \tau}^{x + \tau} f(t) dt] - [F(x_2) + \int_{x_2}^x f(t) dt] = \\ &= F(x_2 + \tau) - F(x_2) + \int_{x_2}^x [f(t + \tau) - f(t)] dt < \\ &< M - \left( M - \frac{\varepsilon}{2} \right) + \frac{L}{2} \cdot \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Из односторонних оценок (5.5) и (5.6) находим

$$|F(x + \tau) - F(x)| < \varepsilon$$

для любого  $x \in (-\infty, \infty)$ .

Таким образом,  $\tau = \tau_F(\varepsilon)$  и функция  $F(x)$  п. п.

Теорема доказана.

Следствие. Если  $f(x)$  — почти периодическая функция и

$$\int_{x_0}^x f(t) dt = ax + \varphi(t),$$

где  $a$  — постоянная,  $\varphi(t)$  — ограниченная функция, то  $\varphi(t)$  — почти периодическая функция.

## § 6. Теорема о среднем значении почти периодической функции

Теорема 1. Для каждой почти периодической функции  $f(x)$  существует конечное среднее значение

$$M\{f\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx.$$

Доказательство (см. [66]). 1) Выведем сначала оценку для смещенного интеграла

$$\int_a^{a+T} f(x) dx.$$

Пусть  $\varepsilon > 0$  произвольно и  $l = l_f\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)$  — длина, соответствующая числу  $\frac{\varepsilon}{4}$ . Пусть, далее,  $\tau = \tau_f\left(\frac{\varepsilon}{4}\right) \in [a, a+l]$  почти период

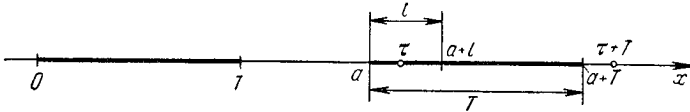


Рис. 58.

функции  $f(x)$  с точностью до  $\frac{\varepsilon}{4}$  (рис. 58). Имеем

$$\begin{aligned} \int_a^{a+T} f(x) dx - \int_0^T f(x) dx &= \\ &= \left[ \int_\tau^{\tau+T} f(x) dx - \int_0^T f(x) dx \right] + \int_{\tau+T}^{a+T} f(x) dx + \int_a^\tau f(x) dx = \\ &= \int_0^T [f(x+\tau) - f(x)] dx - \int_{a+T}^{\tau+T} f(x) dx + \int_a^\tau f(x) dx. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая, что

$$|f(x+\tau) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4}$$

и

$$0 \leq \tau - a \leq l,$$

получаем

$$\begin{aligned} \left| \int_a^{a+T} f(x) dx - \int_0^T f(x) dx \right| &\leq \int_0^T |f(x+\tau) - f(x)| dx + \\ &+ \int_{a+T}^{\tau+T} |f(x)| dx + \int_a^\tau |f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{4} T + 2\Gamma, \quad (6.1) \end{aligned}$$

где  $\Gamma = \sup_x |f(x)|$ .

2) Покажем, что последовательность

$$\frac{1}{n} \int_0^n f(x) dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

имеет предел при  $n \rightarrow \infty$ .



Для этого применим критерий Коши. А именно, для любых натуральных чисел  $n$  и  $m$  имеем

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{n} \int_0^n f(x) dx - \frac{1}{m} \int_0^m f(x) dx \right| = \\ & = \left| \left\{ \frac{1}{n} \int_0^n f(x) dx - \frac{1}{nm} \int_0^{nm} f(x) dx \right\} + \right. \\ & + \left. \left\{ \frac{1}{nm} \int_0^{nm} f(x) dx - \frac{1}{m} \int_0^m f(x) dx \right\} \right| \leq \frac{1}{nm} \left| m \int_0^n f(x) dx - \int_0^{nm} f(x) dx \right| + \\ & + \frac{1}{nm} \left| \int_0^{nm} f(x) dx - n \int_0^m f(x) dx \right| \leq \frac{1}{nm} \sum_{k=1}^m \left| \int_0^n f(x) dx - \int_{(k-1)n}^{kn} f(x) dx \right| + \\ & + \frac{1}{nm} \sum_{k=1}^m \left| \int_{(k-1)m}^{km} f(x) dx - \int_0^m f(x) dx \right|. \end{aligned}$$

Отсюда, используя формулы (6.1), получим

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{n} \int_0^n f(x) dx - \frac{1}{m} \int_0^m f(x) dx \right| \leq \\ & \leq \frac{1}{nm} \cdot m \left( \frac{\varepsilon}{4} n + 2l\Gamma \right) + \frac{1}{nm} \cdot n \left( \frac{\varepsilon}{4} m + 2l\Gamma \right) = \frac{\varepsilon}{2} + 2l\Gamma \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right). \end{aligned}$$

Выбирая теперь  $N$  столь большим, чтобы

$$N > \frac{8l\Gamma}{\varepsilon},$$

при  $n, m > N$  будем иметь

$$\left| \frac{1}{n} \int_0^n f(x) dx - \frac{1}{m} \int_0^m f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Следовательно, критерий Коши выполнен и, таким образом, существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_0^n f(x) dx.$$

3) Теперь нетрудно доказать, что

$$M\{f\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_0^n f(x) dx. \quad (6.2)$$

Действительно, полагая

$$T = n + q,$$

где  $n$  — натуральное число и  $0 \leq q < 1$ , и учитывая ограниченность выражения  $\frac{1}{n} \int_0^n f(x) dx$ , при  $T \rightarrow \infty$  будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx - \frac{1}{n} \int_0^n f(x) dx &= \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{n} \right) \int_0^n f(x) dx + \frac{1}{T} \int_n^T f(x) dx = \\ &= -\frac{q}{T} \cdot \frac{1}{n} \int_0^n f(x) dx + \frac{1}{T} \int_0^q f(n+x) dx = O\left(\frac{1}{T}\right). \end{aligned}$$

Отсюда непосредственно вытекает равенство (6.2).

Теорема о среднем доказана.

**Теорема 2** (усиленная теорема о среднем). *Для всякой почти периодической функции  $f(x)$  равномерно по параметру  $a \in (-\infty, \infty)$  имеет место предельное соотношение*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(x) dx \equiv M\{f(x+a)\} = M\{f(x)\}. \quad (6.3)$$

**Доказательство.** Из формулы (6.1) при любом  $a$  имеем

$$\left| \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(x) dx - \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{2l\Gamma}{T}, \quad (6.4)$$

где  $l = l_f\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)$  и  $\Gamma = \sup_x |f(x)|$ .

Отсюда, в частности, получаем

$$\left| \frac{1}{T} \int_{(v-1)T}^{vT} f(x) dx - \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{2l\Gamma}{T}$$

( $v = 1, 2, \dots$ ).

Следовательно, для среднего арифметического

$$\frac{1}{n} \sum_{v=1}^n \left\{ \frac{1}{T} \int_{(v-1)T}^{vT} f(x) dx - \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx \right\} = \frac{1}{nT} \int_0^{nT} f(x) dx - \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx$$

также будем иметь

$$\left| \frac{1}{nT} \int_0^{nT} f(x) dx - \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{2l\Gamma}{T}.$$

Переходя к пределу в последнем неравенстве при  $n \rightarrow \infty$ , в силу существования среднего значения  $M\{f(x)\}$  находим

$$\left| M\{f(x)\} - \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{2\Gamma}{T}. \quad (6.5)$$

Из неравенств (6.4) и (6.5) выводим

$$\left| \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(x) dx - M\{f(x)\} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{4\Gamma}{T} < \varepsilon, \quad (6.6)$$

если только

$$T > \frac{8\Gamma}{\varepsilon}.$$

А это и значит, что

$$\frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(x) dx \xrightarrow{T \rightarrow \infty} M\{f(x)\} \quad \text{при } T \rightarrow \infty.$$

Следствие 1. При любом  $a = a(T)$  имеем

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{a(T)}^{a(T)+T} f(x) dx = M\{f(x)\}. \quad (6.7)$$

Действительно, из формулы (6.6) находим

$$\left| \frac{1}{T} \int_{a(T)}^{a(T)+T} f(x) dx - M\{f(x)\} \right| < \varepsilon$$

при  $T > \frac{8\Gamma}{\varepsilon}$ . А это, очевидно, эквивалентно формуле (6.6).

Следствие 2. Полагая  $a(T) = -T$  в формуле (6.7), получим

$$M\{f(x)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^0 f(x) dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(x) dx.$$

Среднее значение п. п. функции  $f(x)$  обладает следующими очевидными свойствами:

- 1) если  $f(x) = c = \text{const}$ , то  $M\{c\} = c$ ;
- 2)  $M\{f(x)\} \geq 0$  при  $f(x) \geq 0$ ,  $M\{\overline{f(x)}\} = \overline{M\{f(x)\}}$ ;
- 3)  $M\{f(x+a)\} = M\{f(x)\}$

( $a$  — произвольное действительное число);

- 4)  $M\{f(ax+b)\} = M\{f(x)\}$

( $a \neq 0$  и  $b$  — произвольные действительные числа);

5)  $M\{\alpha f(x) + \beta g(x)\} = \alpha M\{f(x)\} + \beta M\{g(x)\}$ ,  
 в частности,

$$M\{\alpha f(x)\} = \alpha M\{f(x)\}$$

( $f(x)$  и  $g(x)$  — п. п. функции,  $\alpha$  и  $\beta$  — произвольные комплексные числа);

$$6) |M\{f(x)\}| \leq M\{|f(x)|\} \leq \sup_x |f(x)|;$$

7) если  $f_n(x)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) — п. п. функции и

$$f_n(x) \xrightarrow{x} f(x) \text{ на } (-\infty, \infty),$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M\{f_n(x)\} = M\{f(x)\}. \quad (6.8)$$

Действительно, при  $n > N(\varepsilon)$  имеем

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Поэтому

$$|M\{f_n(x)\} - M\{f(x)\}| \leq M\{|f_n(x) - f(x)|\} \leq M\{\varepsilon\} = \varepsilon$$

и, значит, справедлива формула (6.8).

В частности, для равномерно сходящегося на  $(-\infty, \infty)$  ряда  $\sum_n \varphi_n(x)$  п. п. функций  $\varphi_n(x)$  имеем

$$M\left\{\sum_n \varphi_n(x)\right\} = \sum_n M\{\varphi_n(x)\}.$$

Если  $f(x)$  — п. п. функция, то  $|f(x)|$  является также п. п. функцией (см. § 1). Следовательно, существует

$$M\{|f(x)|\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |f(x)| dx.$$

Очевидно,  $M\{|f(x)|\} \geq 0$ , причем  $M\{0\} = 0$ . Докажем, что  $M\{|f(x)|\} = 0$  тогда и только тогда, когда  $f(x) \equiv 0$ . С этой целью докажем следующее предложение.

**Теорема 3.** Если почти периодическая функция  $f(x) \not\equiv 0$ , то

$$M\{|f(x)|\} > 0.$$

**Доказательство.** Пусть

$$|f(x_0)| \geq \alpha > 0.$$

В силу известного свойства п. п. функции (§ 1, замечание) существует число  $l > 0$  такое, что каждый отрезок  $[(k-1)l, kl]$

( $k = 1, 2, \dots$ ) длины  $l$  содержит точку  $\xi_k = x_0 + \tau_k \left(\frac{\alpha}{2}\right)$ , которая  $\frac{\alpha}{2}$ -конгруэнтна точке  $x_0$ , т. е.

$$|f(\xi_k) - f(x_0)| < \frac{\alpha}{2}$$

( $k = 1, 2, \dots$ ). Отсюда

$$\begin{aligned} |f(\xi_k)| &= |f(x_0) - \{f(x_0) - f(\xi_k)\}| \geq \\ &\geq |f(x_0)| - |f(x_0) - f(\xi_k)| > \alpha - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

На основании свойства равномерной непрерывности п. п. функции  $f(x)$  (§ 2, теорема 2) существует  $\delta = \delta\left(\frac{\alpha}{4}\right) > 0$  ( $\delta < \frac{l}{2}$ ) такое, что

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\alpha}{4} \quad \text{при} \quad |x' - x''| \leq \delta.$$

Поэтому на каждом отрезке  $[(k-1)l, kl]$  найдется правый или левый подотрезок  $I_k = [\xi_k, \xi_k + \Delta] \subset [(k-1)l, kl]$ , где  $\Delta = \pm \delta$

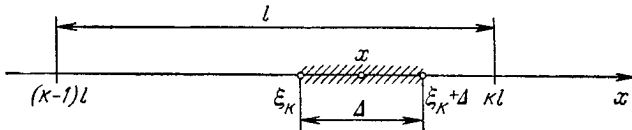


Рис. 59.

(рис. 59), для любой точки которого  $x \in [\xi_k, \xi_k + \Delta]$  справедливо неравенство

$$|f(x) - f(\xi_k)| < \frac{\alpha}{4}.$$

Следовательно,

$$|f(x)| \geq |f(\xi_k)| - |f(\xi_k) - f(x)| > \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{4} = \frac{\alpha}{4}$$

при  $x \in [\xi_k, \xi_k + \Delta]$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{1}{nl} \int_0^{nl} |f(x)| dx &= \frac{1}{nl} \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)l}^{kl} |f(x)| dx \geq \\ &\geq \frac{1}{nl} \cdot \sum_{k=1}^n \int_{I_k} |f(x)| dx > \frac{1}{nl} \cdot n \cdot \frac{\alpha \delta}{4} = \frac{\alpha \delta}{4l}. \end{aligned}$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , будем иметь

$$M \{ |f(x)| \} \geq \frac{\sigma \delta}{4l} > 0,$$

что и требовалось доказать.

Следствие. Для каждой почти периодической функции  $f(x) \not\equiv 0$  выполнено неравенство

$$M \{ |f(x)|^2 \} > 0.$$

Замечание. Отметим еще одно свойство среднего значения, которое нам понадобится в дальнейшем. А именно, если  $f_n(x)$  ( $n=1, 2, \dots$ ) — п. п. функции и

$$f_n(x) \xrightarrow{x} f(x) \text{ при } n \rightarrow \infty, \quad (6.9)$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M \{ |f_n(x)|^2 \} = M \{ |f(x)|^2 \}. \quad (6.10)$$

Действительно, из условия (6.9) получаем, что  $f(x)$  — п. п. функция (§ 4) и

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ при } n > N_\varepsilon \quad (0 < \varepsilon \leq 1).$$

Отсюда находим

$$|f_n(x)| < |f(x)| + \varepsilon \leq \sup_x |f(x)| + 1 = \Gamma_1 \text{ при } n > N_1.$$

Следовательно, при  $n > N_\varepsilon$  имеем

$$\begin{aligned} ||f_n(x)|^2 - |f(x)|^2| &= \\ &= ||f_n(x)| - |f(x)|| \cdot (|f_n(x)| + |f(x)|) \leq \\ &\leq |f_n(x) - f(x)| \cdot 2\Gamma_1 < 2\Gamma_1 \cdot \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$|f_n(x)|^2 \xrightarrow{x} |f(x)|^2 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

А так как  $|f_n(x)|^2$  и  $|f(x)|^2$  — п. п. функции, то на основании свойства 7) справедливо соотношение (6.10).

Полезно отметить, что если  $f(x)$  и  $g(x)$  — п. п. функции, то среднее значение их произведения удовлетворяет обобщенному неравенству Коши — Буняковского:

$$|M \{ f(x)g(x) \}|^2 \leq M \{ |f(x)|^2 \} M \{ |g(x)|^2 \}. \quad (6.11)$$

Действительно, при любом  $T > 0$  имеем

$$\left| \frac{1}{T} \int_0^T f(x)g(x) dx \right|^2 \leq \frac{1}{T} \int_0^T |f(x)|^2 dx \frac{1}{T} \int_0^T |g(x)|^2 dx.$$

Отсюда, переходя к пределу при  $T \rightarrow \infty$ , получим неравенство (6.11).

## § 7. Пространство почти периодических функций

Определение 1. Совокупность  $\Pi$  всех п. п. функций  $f(x)$ , где  $x \in (-\infty, \infty)$ , будем называть *пространством* п. п. функций.

Если  $f(x), g(x) \in \Pi$  и  $\alpha, \beta$  — любые комплексные числа, то  $\alpha f(x) + \beta g(x) \in \Pi$ . Поэтому пространство  $\Pi$  линейное.

Если  $f(x), g(x) \in \Pi$ , то сопряженная функция  $\overline{g(x)} \in \Pi$  и  $f(x)\overline{g(x)} \in \Pi$  (§ 2). Следовательно, существует среднее значение

$$M\{f(x)\overline{g(x)}\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T f(x)\overline{g(x)} dx.$$

Определение 2. Под *скалярным произведением* функции  $f(x), g(x) \in \Pi$  понимается число

$$(f, g) = M\{f(x)\overline{g(x)}\}. \quad (7.1)$$

Из формулы (7.1) следует, что для скалярного произведения  $(f, g)$  выполнены обычные свойства:

1)  $(f, f) = M\{|f(x)|^2\} \geq 0$ , причем  $(f, f) = 0$  тогда и только тогда, когда  $f(x) \equiv 0$ ;

2)  $(g, f) = \overline{(f, g)}$ ;

3)  $(\alpha f, g) = \alpha(f, g)$ ,  $(f, \alpha g) = \overline{\alpha}(f, g)$  ( $\alpha$  — комплексное число);

4)  $(f_1 + f_2, g) = (f_1, g) + (f_2, g)$ ,  $(f, g_1 + g_2) = (f, g_1) + (f, g_2)$  ( $f_j, g_j \in \Pi$ ,  $j = 1, 2$ ).

Определение 3. Под *нормой* функции  $f(x) \in \Pi$  понимается неотрицательное число

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)} = [M\{|f(x)|^2\}]^{\frac{1}{2}}. \quad (7.2)$$

Введенная норма (определение 3) обладает всеми обычными свойствами нормы:

1) для  $\forall f(x) \in \Pi$  имеем  $\|f(x)\| \geq 0$ , причем  $\|f(x)\| = 0$  тогда и только тогда, когда  $f(x) \equiv 0$  (в силу теоремы 3 из § 6);

2)  $\|\alpha f(x)\| = |\alpha| \|f(x)\|$ , в частности,  $\|-f(x)\| = \|f(x)\|$ ;

3) для  $\forall f(x), g(x) \in \Pi$  справедливо неравенство

$$\|f(x) + g(x)\| \leq \|f(x)\| + \|g(x)\|. \quad (7.3)$$

Действительно, при любом  $T$  имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T |f(x) + g(x)|^2 dx &= \frac{1}{T} \int_0^T [f(x) + g(x)] [\overline{f(x)} + \overline{g(x)}] dx = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T |f(x)|^2 dx + \frac{1}{T} \int_0^T |g(x)|^2 dx + \frac{2}{T} \int_0^T \operatorname{Re} [f(x)\overline{g(x)}]. \end{aligned}$$

Так как

$$|\operatorname{Re} [f(x) \overline{g(x)}]| \leq |f(x) \overline{g(x)}| \leq |f(x)| |g(x)|,$$

то в силу неравенства Коши — Буняковского (см. [51]) находим

$$\left\{ \int_0^T \operatorname{Re} [f(x) \overline{g(x)}] dx \right\}^2 \leq \int_0^T |f(x)|^2 dx \int_0^T |g(x)|^2 dx.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{T} \int_0^T |f(x) + g(x)|^2 dx \leq \left\{ \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T |f(x)|^2 dx} + \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T |g(x)|^2 dx} \right\}^2.$$

Переходя к пределу при  $T \rightarrow \infty$  в последнем неравенстве, очевидно, получим неравенство (7.3).

Если  $f(x), g(x) \in \Pi$ , то, как обычно, вводим *расстояние*  $\rho(f, g)$ , полагая

$$\rho(f, g) = \|f(x) - g(x)\| \equiv \sqrt{M\{|f(x) - g(x)|^2\}}.$$

Из свойств нормы следует, что если  $f(x), g(x), h(x) \in \Pi$ , то

1)  $\rho(f, g) \geq 0$ , причем  $\rho(f, g) = 0$  тогда и только тогда, когда  $f(x) \equiv g(x)$ ;

2)  $\rho(f, g) = \rho(g, f)$  (симметрия);

3)  $\rho(f, g) \leq \rho(f, h) + \rho(h, g)$  (*неравенство треугольника*).

Следовательно, пространство п. п. функций  $\Pi$  представляет собой *линейное метрическое пространство* (см. гл. V, § 5).

Определение 4. Две функции  $f(x), g(x) \in \Pi$  называются *ортogonalными*, если

$$(f, g) \equiv M\{f(x) \overline{g(x)}\} = 0.$$

Функция  $f(x) \in \Pi$  называется *нормированной*, если  $\|f(x)\| = 1$ , т. е.

$$(f, f) = 1.$$

Рассмотрим континуальную систему *чистых колебаний*  $e_\lambda = e^{i\lambda x}$ , где  $\lambda$  — произвольное действительное число ( $-\infty < \lambda < \infty$ ). Очевидно,

$$|e^{i\lambda x}| = |\cos \lambda x + i \sin \lambda x| = 1,$$

причем при  $\lambda \neq 0$  функция  $e^{i\lambda x}$  имеет период

$$T_\lambda = \frac{2\pi}{|\lambda|}.$$



Лемма. Совокупность чистых колебаний  $\{e^{i\lambda x}\}$  образует ортогональную и нормированную систему, короче, ортонормированную систему, в пространстве почти периодических функций  $\Pi$ , т. е.

$$(e^{i\lambda x}, e^{i\mu x}) = \delta_{\lambda\mu}, \quad (7.4)$$

где  $\delta_{\lambda\mu}$  — символ Кронекера:

$$\delta_{\lambda\mu} = \begin{cases} 0, & \lambda \neq \mu; \\ 1, & \lambda = \mu. \end{cases}$$

Доказательство. Имеем

$$(e^{i\lambda x}, e^{i\mu x}) = M \{e^{i\lambda x} e^{-i\mu x}\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{i(\lambda - \mu)x} dx. \quad (7.5)$$

Так как

$$\int_0^T e^{i(\lambda - \mu)x} dx = \begin{cases} \frac{e^{i(\lambda - \mu)T} - 1}{i(\lambda - \mu)}, & \text{если } \lambda \neq \mu; \\ T, & \text{если } \lambda = \mu, \end{cases}$$

то из формулы (7.5) вытекает соотношение (7.4).

## § 8. Неравенство Бесселя

Пусть  $f(x) \in \Pi$  и  $\{e^{i\lambda x}\}$  — совокупность чистых колебаний ( $\lambda$  действительно). Тогда произведение  $f(x)e^{-i\lambda x} \in \Pi$ . Следовательно, для каждой п. п. функции  $f(x)$  существует спектральная функция

$$a(\lambda) = (f(x), e^{i\lambda x}) = M \{f(x) e^{-i\lambda x}\}. \quad (8.1)$$

В случае векторного пространства под проекцией (числовой) вектора  $x$  на орт  $e$  понимается число

$$\text{пр}_e x = (x, e).$$

Поэтому если п. п. функции рассматривать как радиусы-векторы функционального пространства  $\Pi$ , то  $a(\lambda)$  представляет собой числовую «проекцию» функции  $f(x)$  на орт  $e_\lambda = e^{i\lambda x}$  (рис. 60). При этом векторная ортогональная проекция функции  $f(x)$  на орт  $e_\lambda$ , очевидно, есть  $a(\lambda) e^{i\lambda x}$ .

Лемма. Если функция  $f(x)$  почти периодическая, то для любого конечного набора  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$  различных действительных чисел справедливо неравенство Бесселя:

$$\sum_{n=1}^N |a(\lambda_n)|^2 \leq M \{ |f(x)|^2 \}. \quad (8.2)$$

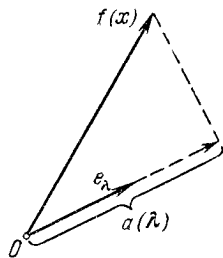


Рис. 60.

Доказательство. Полагая для краткости  $a_n = a(\lambda_n)$ ,  $e_n = e^{i\lambda_n x}$ , рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} \Delta_N &= \rho^2 \left( f(x), \sum_{n=1}^N a_n l_n \right) = \left( f(x) - \sum_{n=1}^N a_n e_n, f(x) - \sum_{m=1}^N a_m e_m \right) = \\ &= (f(x), f(x)) - \sum_{n=1}^N a_n (e_n, f(x)) - \sum_{m=1}^N \bar{a}_m (f(x), e_m) + \\ &\quad + \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N a_n \bar{a}_m (e_n, e_m). \end{aligned} \quad (8.3)$$

В силу формулы (8.1) имеем

$$\begin{aligned} (e_n, f(x)) &= \overline{(f(x), e_n)} = \bar{a}_n, \\ (f(x), e_m) &= a_m; \end{aligned}$$

кроме того, так как чистые колебания  $\{e^{i\lambda_n x}\}$  образуют ортонормированную систему в пространстве  $\Pi$ , то

$$(e_n, e_m) = \delta_{nm},$$

где  $\delta_{nm}$  — символ Кронекера. Поэтому из формулы (8.3) получаем

$$\begin{aligned} \Delta_N &= M \left\{ \left| f(x) - \sum_{n=1}^N a_n e_n \right|^2 \right\} = \\ &= M \left\{ |f(x)|^2 - \sum_{n=1}^N |a_n|^2 - \sum_{m=1}^N |a_m|^2 + \sum_{m=1}^N |a_m|^2 \right\} = \\ &= M \left\{ |f(x)|^2 - \sum_{n=1}^N |a_n|^2 \right\} \geq 0. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Следовательно,

$$\sum_{n=1}^N |a_n|^2 \leq M \left\{ |f(x)|^2 \right\}. \quad (8.5)$$

Следствие. *Неравенство Бесселя остается верным для счетной совокупности действительных чисел  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$*

В самом деле, из формулы (8.5) получаем, что для любой последовательности действительных чисел  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$  ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |a(\lambda_n)|^2$$

сходится, причем при  $N \rightarrow \infty$  имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \leq M \left\{ |f(x)|^2 \right\}.$$

### § 9. Понятие о ряде Фурье почти периодической функции

Лемма. Для каждой почти периодической функции  $f(x)$  ее спектральная функция

$$a(\lambda) = M \{f(x) e^{-i\lambda x}\} \quad (9.1)$$

отлична от нуля лишь для конечного или счетного множества значений аргумента  $\lambda$ .

Доказательство. Пусть  $\Lambda = \{\lambda: a(\lambda) \neq 0\}$ . Очевидно,

$$\Lambda = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{ \lambda: \frac{1}{k} \leq |a(\lambda)| < \frac{1}{k-1} \right\}.$$

Рассмотрим те значения  $\lambda$ , для которых

$$|a(\lambda)| \geq \frac{1}{k}$$

( $k=1, 2, \dots$ ). В силу неравенства Бесселя (§ 8), если это множество не пусто, то оно содержит лишь конечное число элементов. А именно, если  $|a(\lambda_s)| \geq \frac{1}{k}$  ( $s=1, \dots, N$ ), то

$$\frac{N}{k^2} \leq \sum_{s=1}^N |a(\lambda_s)|^2 \leq M \{|f(x)|^2\}.$$

Отсюда

$$N \leq k^2 M \{|f(x)|^2\} < \infty.$$

Таким образом,  $\Lambda$  является объединением счетного множества конечных множеств и, следовательно, мощность его не более чем счетна.

Итак,

$$a(\lambda) = 0,$$

за исключением, быть может, конечной или счетной последовательности значений  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  (рис. 61).

Определение 1. Те значения  $\lambda$ , для которых  $a(\lambda) \neq 0$ , представляющие собой конечную или счетную последовательность действительных чисел  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ , называются *показателями Фурье* соответствующей п. п. функции  $f(x)$ , а числа

$$a(\lambda_n) = A_n$$

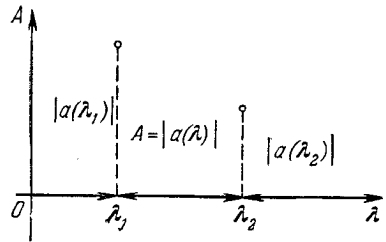


Рис. 61.

— ее коэффициентами Фурье. На основании формулы (9.1) имеем

$$A_n = M \{ f(x) e^{-i\lambda_n x} \}. \quad (9.2)$$

Совокупность всех показателей Фурье п. п. функции будем называть ее *спектром*.

Определение 2. *Рядом Фурье* п. п. функции  $f(x)$  называется конечный или бесконечный тригонометрический ряд

$$f(x) \approx \sum_n A_n e^{i\lambda_n x}, \quad (9.3)$$

где  $\{\lambda_n\}$  — спектр функции  $f(x)$  и  $A_n$ , определяемые формулой (9.2) ( $n = 1, 2, \dots$ ), — коэффициенты Фурье. Порядок членов ряда Фурье п. п. функции, вообще говоря, произволен и зависит от упорядочения ее спектра  $\{\lambda_n\}$ . Заметим, что для п. п. функции  $f(x) \equiv 0$  (и только для такой, как будет показано ниже (§ 14)) спектр функции представляет собой пустое множество и ее ряд Фурье формально не определен. Обобщая понятие ряда Фурье п. п. функции, разрешим дополнять сумму (9.3) любым количеством нулевых членов вида  $0 \cdot e^{i\lambda x}$  и тогда будем считать, что п. п. функции  $f(x) \equiv 0$ , с пустым спектром, соответствует нулевой ряд Фурье

$$0 \approx \sum_0 0 \cdot e^{i\lambda_n x},$$

где счетная совокупность  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  произвольна.

Ряд Фурье п. п. функции  $f(x)$  иногда выгодно записывать в виде континуальной суммы:

$$f(x) \approx \sum_\lambda a(\lambda) e^{i\lambda x} \quad (-\infty < \lambda < \infty), \quad (9.4)$$

без явного выделения показателей Фурье  $\lambda_n$ , где  $a(\lambda)$  определяется формулой (9.1). Здесь подразумевается, что  $a(\lambda) = 0$  для  $\lambda$ , не равного показателю Фурье функции,  $f(x)$ ; с этой, более общей точки зрения числа  $a(\lambda)$  будем также называть коэффициентами Фурье п. п. функции  $f(x)$ . Свободный член ряда Фурье представляет собой среднее значение функции, т. е.  $a(0) = M \{ f(x) \}$ .

Заметим, что члены ряда Фурье (9.4) являются векторными ортогональными проекциями п. п. функции  $f(x)$  на соответствующие орты  $e^{i\lambda x}$ .

Замечание. Для непрерывной чисто периодической функции  $f(x)$  периода  $T$  ряд Фурье (9.3) совпадает с ее обычным рядом Фурье:

$$f(x) \approx \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{\frac{2n\pi xi}{T}},$$

где

$$\alpha_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-\frac{2n\pi xi}{T}} dx$$

( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), если, конечно, не учитывать порядок членов ряда и пропуск членов ряда с нулевыми коэффициентами.

Действительно, для любого целого  $m$  имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{mT} \int_0^{mT} f(x) e^{i\lambda x} dx &= \frac{1}{mT} \sum_{\nu=1}^m \int_{(\nu-1)T}^{\nu T} f(x) e^{i\lambda x} dx = \\ &= \frac{1}{mT} \sum_{\nu=1}^m e^{-i\lambda(\nu-1)T} \int_0^T f(x) e^{i\lambda x} dx = \\ &= \left\{ \frac{1}{m} \sum_{\nu=1}^m e^{-i\lambda(\nu-1)T} \right\} \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{i\lambda x} dx. \end{aligned}$$

Отсюда, если  $\lambda = \frac{2n\pi}{T}$  ( $n$  — целое), то

$$\frac{1}{m} \sum_{\nu=1}^m e^{-i\lambda(\nu-1)T} = 1,$$

и поэтому

$$M \{ f(x) e^{i\lambda x} \} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{mT} \int_0^{mT} f(x) e^{i\lambda x} dx = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{i\lambda x} dx = \alpha_n.$$

Если же  $\lambda \neq \frac{2n\pi}{T}$ , то  $e^{-i\lambda T} \neq 1$ . Следовательно,

$$\frac{1}{m} \sum_{\nu=1}^m e^{-i\lambda(\nu-1)T} = \frac{1 - e^{-im\lambda T}}{m(1 - e^{-i\lambda T})} \rightarrow 0$$

при  $m \rightarrow \infty$ , и таким образом,

$$M \{ f(x) e^{i\lambda x} \} = 0.$$

**Теорема 1.** Для каждой почти периодической функции  $f(x)$  сумма квадратов модулей ее коэффициентов Фурье  $A_n$  образует сходящийся ряд, причем справедливо неравенство Бесселя:

$$\sum_n |A_n|^2 \leq M \{ |f(x)|^2 \}. \quad (9.5)$$

Теорема непосредственно вытекает из доказанного раньше неравенства Бесселя (§ 10).

Следствие. Коэффициенты  $A_n$  ряда Фурье почти периодической функции  $f(x)$  стремятся к нулю при  $n \rightarrow \infty$ , т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} M \{f(x)e^{-i\lambda_n x}\} = 0.$$

Замечание. Как будет доказано выше, в формуле (9.5) всегда имеет место знак равенства.

Теорема 2. *Равномерно сходящийся на оси  $-\infty < x < \infty$  тригонометрический ряд*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{i\lambda_n x} \quad (9.6)$$

является рядом Фурье своей суммы  $f(x)$ .

Доказательство. Отметим, прежде всего, что сумма  $f(x)$  равномерно сходящегося ряда есть п. п. функция (§ 4, теорема 1). Далее, так как для равномерно сходящегося ряда п. п. функций знак среднего и знак суммирования перестановочны, то

$$\begin{aligned} M \{f(x)e^{-i\lambda x}\} &= M \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{i(\lambda_n - \lambda)x} \right\} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n M \{e^{i(\lambda_n - \lambda)x}\} = \begin{cases} c_n, & \text{если } \lambda = \lambda_n; \\ 0, & \text{если } \lambda \neq \lambda_n. \end{cases} \end{aligned}$$

Следовательно, числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  образуют спектр функции  $f(x)$ , а  $c_n (n=1, 2, \dots)$  являются ее соответствующими коэффициентами Фурье. Таким образом, ряд (9.6) есть ряд Фурье функции  $f(x)$ .

Следствие 1. Если

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < \infty,$$

то тригонометрический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{i\lambda_n x}$$

есть ряд Фурье своей суммы.

Следствие 2. *Существуют почти периодические функции с произвольным счетным спектром.*

Действительно, пусть  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  — произвольное счетное множество вещественных чисел. Тогда сумма равномерно сходящегося ряда

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{i\lambda_n x},$$

где  $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < \infty$ , будет представлять собой п. п. функцию с данным спектром  $\{\lambda_n\}$ .

Заметим, что структура спектра  $\Lambda = \{\lambda_n\}$  п. п. функции может быть весьма сложной. Например, могут существовать конечные точки сгущения спектра, спектр может быть всюду плотным на действительной оси и т. п. Этим объясняется трудность изучения ряда Фурье п. п. функции по сравнению с чисто периодической функцией  $F(x)$  данного периода  $T = 2l$ , имеющей ряд Фурье:

$$F(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{i n \pi x}{l}},$$

спектр которого представляет арифметическую прогрессию

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{l} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

## § 10. Формальные операции над рядами Фурье почти периодических функций

Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  — п. п. функции, т. е.  $f(x), g(x) \in \Pi$ . Рассмотрим их ряды Фурье:

$$f(x) \sim \sum_n A_n e^{i\lambda_n x} \equiv \sum_{\lambda} a(\lambda) e^{i\lambda x}$$

и

$$g(x) \sim \sum_n B_n e^{i\mu_n x} \equiv \sum_{\lambda} b(\lambda) e^{i\lambda x}.$$

Тогда справедливы следующие соотношения:

$$1) \alpha f(x) + \beta g(x) \sim \sum_{\lambda} [\alpha a(\lambda) + \beta b(\lambda)] e^{i\lambda x}$$

( $\alpha, \beta$  — произвольные комплексные числа);

$$2) f(x+h) \sim \sum_{\lambda} a(\lambda) e^{i\lambda h} e^{i\lambda x}$$

( $h$  — произвольное действительное число);

$$3) e^{i\mu x} f(x) \sim \sum_{\lambda} a(\lambda) e^{i(\lambda+\mu)x}$$

( $\mu$  — произвольное действительное число);

$$4) \overline{f(x)} \sim \sum_{\lambda} \overline{a(\lambda)} e^{-i\lambda x}.$$

Соотношения 1) — 4) легко вытекают из общих свойств среднего значения п. п. функции (§ 6).

Пусть  $f(x)$ ,  $f'(x) \in \Pi$  (см. § 4). Для производной  $f'(x)$  построим ее ряд Фурье:

$$f'(x) \approx \sum_{\lambda} a_1(\lambda) e^{i\lambda x}.$$

Интегрируя по частям, будем иметь

$$\begin{aligned} a_1(\lambda) &= M \{f'(x) e^{-i\lambda x}\} = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{T} f(x) e^{-i\lambda x} \right] \Big|_0^T + i\lambda M \{f(x) e^{-i\lambda x}\} = i\lambda a(\lambda), \end{aligned}$$

где  $a(\lambda)$  — коэффициент Фурье функции  $f(x)$ .

Следовательно,

$$f'(x) \approx \sum_{\lambda} i\lambda a(\lambda) e^{i\lambda x} \quad (10.1)$$

и, таким образом, ряд Фурье производной п. п. функции в случае ее почти периодичности получается формальным почленным дифференцированием ряда Фурье самой функции:

$$f(x) \approx \sum_{\lambda} a(\lambda) e^{i\lambda x}. \quad (10.2)$$

В частности, спектр производной  $f'(x)$  совпадает со спектром функции  $f(x)$ , за исключением точки  $\lambda = 0$ .

Пусть  $f(x)$  — п. п. функция и

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt \in \Pi,$$

т. е. функция  $F(x)$  является ограниченной (§ 7). Положим

$$F(x) \approx \sum_{\lambda} c(\lambda) e^{i\lambda x}.$$

Так как  $F'(x) = f(x)$ , то на основании формул (10.1) и (10.2) имеем

$$i\lambda c(\lambda) = a(\lambda).$$

Отсюда необходимо должно быть

$$a(0) = 0$$

и

$$c(\lambda) = \frac{a(\lambda)}{i\lambda} \quad \text{при } \lambda \neq 0.$$



Следовательно,

$$F(x) \sim c(0) + \sum_{\lambda} \frac{a(\lambda)}{i\lambda} e^{i\lambda x},$$

где  $c(0) = M \left\{ \int_0^x f(t) dt \right\}$ .

Таким образом, если для п. п. функции  $f(x)$  ее среднее значение

$$a(0) = M \{f(x)\} = 0$$

и интеграл  $F(x)$  ограничен (§ 7), то ряд Фурье интеграла этой функции получается путем формального почленного интегрирования ряда Фурье самой функции. В частности, спектр интеграла  $F(x)$  совпадает со спектром функции  $f(x)$  (не считая  $\lambda=0$ ).

З а м е ч а н и е. Условие

$$M \{f(x)\} = 0$$

необходимо для почти периодичности интеграла  $F(x)$ . Однако, как показывает приведенный ниже пример, оно не является достаточным для почти периодичности этого интеграла.

П р и м е р. Функция

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{inx}$$

почти периодическая, причем так как свободный член ее равен нулю, то  $M \{f(x)\} = 0$ . Однако ее интеграл

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

не является п. п. функцией.

Действительно, если бы интеграл  $F(x) \in \Pi$ , то для его ряда Фурье мы бы имели

$$F(x) \sim c + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{i} e^{inx},$$

что невозможно, так как коэффициенты  $A_n = \frac{1}{i}$  этого ряда не стремятся к нулю при  $n \rightarrow \infty$  (см. § 9, теорема 1, следствие).

## § 11. Свертка почти периодической функции

Пусть  $f(x) \in \Pi$ , тогда при любом фиксированном  $x \in (-\infty, \infty)$  функция

$$\varphi_x(t) = f(x+t) \overline{f(t)},$$

где  $\overline{f(t)}$  — функция, сопряженная  $f(t)$ , является почти периодической. Следовательно, существует

$$F(x) = M_t \{ \varphi_x(t) \} = M_t \{ f(x+t) \overline{f(t)} \},$$

т. е.

$$F(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x+t) \overline{f(t)} dt. \quad (11.1)$$

Функция  $F(x)$  называется *сверткой* функции  $f(x)$ .

Рассмотрим «неполную свертку».

$$F_T(x) = \frac{1}{T} \int_0^T f(x+t) \overline{f(t)} dt \quad (T > 0). \quad (11.2)$$

Лемма 1. Для каждого  $T > 0$  неполная свертка  $F_T(x)$  почти периодической функции  $f(x)$  почти периодична по  $x$ , причем

$$F_T(x) \xrightarrow{x} F(x) \quad \text{при } T \rightarrow \infty, \quad (11.3)$$

где

$$F(x) = M_t \{ f(x+t) \overline{f(t)} \}.$$

Доказательство. 1) Докажем сначала, что  $F_T(x)$  равномерно непрерывна по  $x$  на  $(-\infty, \infty)$ . Действительно, пусть

$$\Gamma = \sup_t |f(t)|$$

и  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  таково, что

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon \quad \text{при } |x' - x''| < \delta.$$

Тогда при  $|h| < \delta$  на основании формулы (11.2) имеем

$$\begin{aligned} |F_T(x+h) - F_T(x)| &\leq \\ &\leq \frac{1}{T} \int_0^T |f(x+h+t) - f(x+t)| |\overline{f(t)}| dt \leq \varepsilon \Gamma \cdot \frac{1}{T} \int_0^T dt = \varepsilon \Gamma, \end{aligned} \quad (11.4)$$

что и доказывает равномерную непрерывность функции  $F_T(x)$ .

Из неравенства (11.4) вытекает, что каждый  $\frac{\varepsilon}{\Gamma}$ -почти период функции  $f(x)$  является  $\varepsilon$ -почти периодом функции  $F_T(x)$ . Следовательно,  $F_T(x)$  — почти периодическая функция.

2) Для каждого  $x \in (-\infty, \infty)$  имеем

$$\varphi_x(t) = f(x+t) \overline{f(t)}$$

и

$$|\varphi_x(t)| = |f(x+t)| |\overline{f(t)}| \leq \Gamma^2.$$

Пусть  $\tau$  — любой  $\frac{\varepsilon}{2\Gamma}$ -почти период функции  $f(x)$ . Тогда

$$\begin{aligned} |\varphi_x(t + \tau) - \varphi_x(t)| &\leq |f(x + t + \tau) \overline{f(t + \tau)} - f(x + t) \overline{f(t)}| \leq \\ &\leq |f(x + t + \tau) - f(x + t)| |\overline{f(t + \tau)}| + |f(x + t)| |\overline{f(t + \tau)} - \overline{f(t)}| < \\ &< \frac{\varepsilon}{2\Gamma} \cdot \Gamma + \Gamma \cdot \frac{\varepsilon}{2\Gamma} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, каждый почти период  $\tau = \tau_f \left( \frac{\varepsilon}{2\Gamma} \right)$  функции  $f(x)$  является  $\varepsilon$ -почти периодом функции  $\varphi_x(t)$ . Следовательно, для почти периодического семейства  $\{\varphi_x(t)\}$  существует положительное число  $l(\varepsilon)$  такое, что любой отрезок  $[a, a + l(\varepsilon)]$  длины  $l(\varepsilon)$  содержит по меньшей мере один  $\varepsilon$ -почти период для каждой функции  $\varphi_x(t)$  ( $-\infty < x < \infty$ ). На основании усиленной теоремы о среднем (§ 6, неравенство (6.6)) для каждой п. п. функции  $\varphi_x(t)$  будем иметь

$$\left| \frac{1}{T} \int_0^T f(x+t) \overline{f(t)} dt - M_t \{f(x+t) \overline{f(t)}\} \right| = |F_T(x) - F(x)| < \varepsilon$$

при

$$T > \frac{8l(\varepsilon)\Gamma}{\varepsilon},$$

что равносильно соотношению (11.3).

*Лемма 2. Если  $f(x)$  почти периодична, то для почти периодической функции*

$$\varphi_x(t) = f(x+t) \overline{f(t)}$$

*средние по  $x$  и по  $t$  перестановочны, т. е.*

$$M_x \{M_t \{f(x+t) \overline{f(t)}\}\} = M_t \{M_x \{f(x+t) \overline{f(t)}\}\}. \quad (11.5)$$

*Доказательство.* Прежде всего, свертка

$$F(x) = M_t \{f(x+t) \overline{f(t)}\}$$

как равномерный предел п. п. функций  $F_T(x)$  есть функция почти периодическая. Следовательно, существует

$$M_x \{M_t \{f(x+t) \overline{f(t)}\}\}.$$

Далее, на основании усиленной теоремы о среднем (§ 8), имеем

$$M_x \{f(x+t) \overline{f(t)}\} = \overline{f(t)} M_x \{f(x+t)\} = \overline{f(t)} M_x \{f(x)\}.$$

Поэтому  $M_x \{f(x+t) \overline{f(t)}\}$  почти периодична по  $t$  и существует

$$M_t \{M_x \{f(x+t) \overline{f(t)}\}\}.$$

Докажем теперь, что выполнено равенство (11.5). Так как функция  $f(x+t) \overline{f(t)}$  непрерывна по совокупности переменных  $x$  и  $t$ , то при любых конечных  $T > 0$  и  $X > 0$  имеем

$$\frac{1}{X} \int_0^X dx \cdot \frac{1}{T} \int_0^T f(x+t) \overline{f(t)} dt = \frac{1}{T} \int_0^T dt \frac{1}{X} \int_0^X f(x+t) \overline{f(t)} dx. \quad (11.6)$$

Но

$$\begin{aligned} \frac{1}{X} \int_0^X f(x+t) \overline{f(t)} dx &= \overline{f(t)} \cdot \frac{1}{X} \int_t^{X+t} f(x) dx \xrightarrow{t} \\ &\xrightarrow{t} \overline{f(t)} M_x \{f(x)\} = M_x \{f(x+t) \overline{f(t)}\} \end{aligned}$$

при  $X \rightarrow \infty$ . Следовательно, в левой части равенства (11.6) можно совершить предельный переход при  $X \rightarrow \infty$  под знаком интеграла, и мы получим

$$\lim_{X \rightarrow \infty} \frac{1}{X} \int_0^X dx \cdot \frac{1}{T} \int_0^T f(x+t) \overline{f(t)} dt = \frac{1}{T} \int_0^T dt \cdot \lim_{X \rightarrow \infty} \frac{1}{X} \int_0^X f(x+t) \overline{f(t)} dt$$

или

$$M_x \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T f(x+t) \overline{f(t)} dt \right\} = \frac{1}{T} \int_0^T M_x \{f(x+t) \overline{f(t)}\} dt. \quad (11.7)$$

Так как в силу леммы 1

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(x+t) \overline{f(t)} dt \xrightarrow{x} M_t \{f(x+t) \overline{f(t)}\} \quad \text{при } T \rightarrow \infty,$$

то, переходя к пределу при  $T \rightarrow \infty$  в соотношении (11.7), на основании свойства 7) среднего значения (§ 8) окончательно будем иметь

$$M_x \{M_t \{f(x+t) \overline{f(t)}\}\} = M_t \{M_x \{f(x+t) \overline{f(t)}\}\},$$

что и требовалось доказать.

**Теорема.** Для всякой почти периодической функции  $f(x)$  ее свертка  $F(x)$  есть функция почти периодическая, причем

$$M\{F(x)\} = |M\{f(x)\}|^2. \quad (11.8)$$

**Доказательство** (см. [66]). То, что свертка

$$F(x) = M_t \{f(x+t) \overline{f(t)}\}$$

есть функция почти периодическая, следует из того (как уже было упомянуто в лемме 2), что свертка является равномерным пределом п. п. неполных сверток  $F_T(x)$  (лемма 1). Впрочем, почти периодичность свертки легко доказать также непосредственно.

Далее, используя перестановочность средних  $M_x$  и  $M_t$  (лемма 2) и усиленную теорему о среднем (§ 8), имеем

$$\begin{aligned} M_x \{F(x)\} &= M_x \{M_t \{f(x+t) \overline{f(t)}\}\} = M_t \{M_x \{f(x+t) \overline{f(t)}\}\} = \\ &= M_t \{\overline{f(t)} M_x \{f(x+t)\}\} = M_t \{\overline{f(t)} M_x \{f(x)\}\} = \\ &= M_x \{f(x)\} \cdot \overline{M_t \{f(t)\}} = |M_x \{f(x)\}|^2. \end{aligned}$$

**Следствие.** Если для почти периодической функции  $f(x)$  ряд Фурье есть

$$f(x) \approx \sum_{\lambda} a(\lambda) e^{i\lambda x},$$

то ее свертка  $F(x)$  имеет следующий ряд Фурье:

$$F(x) \approx \sum_{\lambda} |a(\lambda)|^2 e^{i\lambda x}. \quad (11.9)$$

Действительно, так как

$$a(\lambda) = M_x \{f(x) e^{-i\lambda x}\},$$

то

$$\begin{aligned} M_x \{F(x) e^{-i\lambda x}\} &= M_x \{M_t \{f(x+t) \overline{f(t)}\} e^{i\lambda x}\} = \\ &= M_t \{\overline{f(t)} e^{i\lambda t} M_x \{f(x+t) e^{-i\lambda(x+t)}\}\} = M_t \{\overline{f(t)} e^{i\lambda t} \cdot M_x \{f(x) e^{-i\lambda x}\}\} = \\ &= a(\lambda) \cdot \overline{a(\lambda)} = |a(\lambda)|^2. \end{aligned}$$

З а м е ч а н и е. Аналогично доказывается, что если  $f(x)$  и  $g(x)$  — п. п. функции, то их свертка

$$\Phi(t) = M \int_t \{f(x+t) \overline{g(t)}\}$$

есть функция почти периодическая.

## § 12. Теорема единственности

Как известно, две непрерывные периодические функции, имеющие одинаковые ряды Фурье, совпадают между собой, т. е. такие функции однозначно определяются своими коэффициентами Фурье. Докажем, что эта теорема единственности верна также для почти периодических функций. Так как для разности п. п. функций их коэффициенты Фурье равны разностям соответствующих коэффициентов Фурье данных функций, то теорему единственности можно сформулировать в следующем виде: *не существует отличной от тождественного нуля почти периодической функции, все коэффициенты Фурье которой равны нулю.*

Теорема единственности нетривиальна, и доказательство ее довольно сложно. Мы приведем здесь незначительно видоизмененное доказательство Бора — де ла Валле-Пуссена (см. [69]). Предварительно понадобится несколько лемм.

Пусть  $f(x)$  — п. п. функция и

$$a(\lambda) = M \{f(x) e^{-i\lambda x}\} \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-i\lambda x} dx \quad (12.1)$$

— ее коэффициенты Фурье. Положим

$$a_T(\lambda) = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-i\lambda x} dx \quad (0 < T \leq \infty), \quad (12.2)$$

где  $a_\infty(\lambda) = a(\lambda)$ .

Лемма 1. *Функция  $a_T(\lambda)$  равномерно мала при  $T > T_0 > 0$  и  $|\lambda| \rightarrow \infty$ , т. е. для всяких  $\varepsilon > 0$  и  $T_0 > 0$  существует  $\Lambda = \Lambda(\varepsilon, T_0) > 0$  такое, что*

$$|a_T(\lambda)| = \left| \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-i\lambda x} dx \right| \leq \varepsilon \quad (12.3)$$

при  $T_0 < T \leq \infty$  и  $|\lambda| > \Lambda$ .

Доказательство. Выполняя замену переменной

$$x = x' + \frac{\pi}{\lambda} \quad (\lambda \neq 0)$$

в интеграле (12.2), будем иметь

$$\begin{aligned} a_T(\lambda) &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{\pi}{\lambda}}^{T-\frac{\pi}{\lambda}} f\left(x' + \frac{\pi}{\lambda}\right) e^{-i\lambda\left(x' + \frac{\pi}{\lambda}\right)} dx' = \\ &= -\frac{1}{T} \int_{-\frac{\pi}{\lambda}}^{T-\frac{\pi}{\lambda}} f\left(x + \frac{\pi}{\lambda}\right) e^{-i\lambda x} dx. \end{aligned} \quad (12.4)$$

Складывая равенства (12.2) и (12.4), находим (рис. 62)

$$\begin{aligned} 2a_T(\lambda) &= -\frac{1}{T} \int_0^T \left[ f\left(x + \frac{\pi}{\lambda}\right) - f(x) \right] e^{-i\lambda x} dx + \\ &+ \frac{1}{T} \int_{T-\frac{\pi}{\lambda}}^T f\left(x + \frac{\pi}{\lambda}\right) e^{-i\lambda x} dx - \frac{1}{T} \int_{-\frac{\pi}{\lambda}}^0 f\left(x + \frac{\pi}{\lambda}\right) e^{-i\lambda x} dx. \end{aligned} \quad (12.5)$$

Пусть

$$\Gamma = \sup_x |f(x)|$$

и  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  — число, характеризующее равномерную непрерыв-



Рис. 62.

ность функции  $f(x)$ . Тогда из равенства (12.5) при  $|\lambda| > \frac{\pi}{\delta}$  и  $T > T_0$  имеем

$$\begin{aligned} |a_T(\lambda)| &\leq \frac{1}{2} \left\{ \int_0^T \left| f\left(x + \frac{\pi}{\lambda}\right) - f(x) \right| dx + \right. \\ &+ \frac{1}{T} \int_{T-\frac{\pi}{\lambda}}^T \left| f\left(x + \frac{\pi}{\lambda}\right) \right| dx + \left. \int_{-\frac{\pi}{\lambda}}^0 \left| f\left(x + \frac{\pi}{\lambda}\right) \right| dx \right\} < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{T_0} \cdot \Gamma \cdot \frac{\pi}{|\lambda|} < \varepsilon, \end{aligned} \quad (12.6)$$

если  $|\lambda| > \max\left(\frac{\pi}{\delta}, \frac{2\Gamma\pi}{T_0\varepsilon}\right) = \Lambda$ .

Следствие. Из (12.6) при  $T \rightarrow \infty$  получаем

$$|a_\infty(\lambda)| = |a(\lambda)| \leq \varepsilon \text{ при } |\lambda| > \Lambda.$$

Лемма 2. Пусть все коэффициенты Фурье почти периодической функции  $f(x)$  равны нулю, т. е.

$$a(\lambda) = M\{f(x)e^{-i\lambda x}\} = 0$$

при  $-\infty < \lambda < \infty$ . Тогда для всякого  $\varepsilon > 0$  существует  $T_0 = T_0(\varepsilon) > 0$  такое, что

$$|a_T(\lambda)| = \left| \frac{1}{T} \int_0^T f(x)e^{-i\lambda x} dx \right| < \varepsilon \quad (12.7)$$

при  $T > T_0$  и  $\lambda \in (-\infty, \infty)$ .

Доказательство. В силу леммы 1 для заданного  $\varepsilon > 0$  можно выбрать число  $\Lambda$  так, чтобы

$$|a_T(\lambda)| < \varepsilon \text{ при } T \geq 1 \text{ и } |\lambda| > \Lambda. \quad (12.8)$$

Поэтому для больших  $|\lambda|$  неравенство (12.7) выполнено.

Пусть теперь  $|\lambda| \leq \Lambda$ . Так как

$$a(\lambda) = \lim_{T \rightarrow \infty} a_T(\lambda) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x)e^{-i\lambda x} dx = 0,$$

то на основании усиленной теоремы о среднем (§ 6) для всякого фиксированного  $\lambda \in [-\Lambda, \Lambda]$  существует  $T_*(\lambda) \geq 1$  такое, что

$$\left| \frac{1}{T} \int_a^{T+a} f(x)e^{-i\lambda x} dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ при } T \geq T_*(\lambda),$$

где  $a \in (-\infty, \infty)$  произвольно. Для точки  $\lambda$  рассмотрим ее окрестность

$$I_\lambda = \left\{ |\lambda' - \lambda| < \frac{\varepsilon}{4\Gamma_*(\lambda)} \right\},$$

где  $\Gamma = \sup_x |f(x)|$ .

Заметим, что для любых действительных  $\alpha$  и  $\beta$  имеем

$$|e^{-i\alpha} - e^{-i\beta}| = \left| \int_\beta^\alpha \frac{d}{dx} (e^{-ix}) dx \right| \leq \left| \int_\beta^\alpha \left| \frac{d}{dx} (e^{-ix}) \right| dx \right| = |\alpha - \beta|.$$



Поэтому, если  $\lambda' \in I_\lambda$ , то для каждого  $H \in [T_\varepsilon(\lambda), 2T_\varepsilon(\lambda)]$  получаем

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{H} \int_a^{H+a} f(x) e^{-\lambda' x} dx \right| &= \left| \frac{1}{H} \int_a^{H+a} f(x) e^{-i\lambda x} \cdot e^{-i(\lambda' - \lambda)x} dx \right| \leq \\ &\leq \left| \frac{1}{H} \int_a^{H+a} f(x) e^{-i\lambda x} \cdot e^{-(\lambda' - \lambda)a} dx \right| + \\ &+ \left| \frac{1}{H} \int_a^{H+a} f(x) e^{-i\lambda x} [e^{-i(\lambda' - \lambda)x} - e^{-i(\lambda' - \lambda)a}] dx \right| < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{H} \Gamma |\lambda' - \lambda| |x - a| \cdot H \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \Gamma \cdot \frac{\varepsilon}{4\Gamma T_\varepsilon(\lambda)} \cdot H \leq \varepsilon, \end{aligned} \quad (12.9)$$

так как

$$1 \leq \frac{H}{T_\varepsilon(\lambda)} \leq 2.$$

Пусть теперь  $T > T_\varepsilon(\lambda)$  и  $k \geq 0$  — целое число, удовлетворяющее условию:

$$2^k T_\varepsilon(\lambda) \leq T < 2^{k+1} T_\varepsilon(\lambda).$$

Тогда, полагая  $H = \frac{T}{n}$ , где  $n = 2^k$ , будем иметь

$$T_\varepsilon(\lambda) \leq H < 2T_\varepsilon(\lambda).$$

Отсюда, представляя  $a_T(\lambda')$  в виде среднего арифметического, в силу неравенства (12.9) получим

$$\begin{aligned} |a_T(\lambda')| &= \left| \frac{1}{nH} \int_0^{nH} f(x) e^{-i\lambda' x} dx \right| = \frac{1}{n} \left| \sum_{\nu=1}^n \int_{(\nu-1)H}^{\nu H} f(x) e^{-i\lambda' x} dx \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n \left| \int_{(\nu-1)H}^{\nu H} f(x) e^{-i\lambda' x} dx \right| < \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n \varepsilon = \varepsilon, \end{aligned} \quad (12.10)$$

если только  $\lambda' \in I_\lambda$ . Таким образом, для каждого  $\lambda \in [-\Lambda, \Lambda]$  существует окрестность  $I_\lambda$ , для любой точки которой  $\lambda' \in I_\lambda$  при  $T > T_\varepsilon(\lambda)$  выполнено неравенство (12.10). Система  $\{I_\lambda\}$  покрывает отрезок  $[-\Lambda, \Lambda]$ . В силу леммы Гейне — Бореля можно выбрать конечную систему  $I_{\lambda_1}, I_{\lambda_2}, \dots, I_{\lambda_N}$ , также покрывающую отрезок  $[-\Lambda, \Lambda]$ . Полагая

$$T_0(\varepsilon) = \max_{k=1, \dots, N} T_\varepsilon(\lambda_k) \geq 1, \quad (12.11)$$

находим, что для любой точки  $\lambda \in [-\Lambda, \Lambda]$  выполнено неравенство

$$|a_T(\lambda)| = \left| \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-i\lambda x} dx \right| < \varepsilon \quad (12.12)$$

при  $T > T_0(\varepsilon)$ .

Отсюда с учетом неравенства (12.8) получаем полное доказательство леммы.

**Теорема единственности.** *Если все коэффициенты Фурье почти периодической функции  $f(x)$  равны нулю, то эта функция тождественно равна нулю, т. е. из условия*

$$a(\lambda) = M \{f(x) e^{-i\lambda x}\} = 0 \quad (12.13)$$

$$(-\infty < \lambda < \infty)$$

следует, что

$$f(x) \equiv 0 \text{ при } -\infty < x < +\infty.$$

Иными словами, п. п. функция  $f(x)$ , ортогональная ко всем чистым колебаниям  $e_\lambda = e^{i\lambda x}$  ( $-\infty < \lambda < \infty$ ), тождественно равна нулю.

**Доказательство.** Предположим противное, что  $f(x) \not\equiv 0$ , т. е.

$$\sup_x |f(x)| = \Gamma > 0.$$

Рассмотрим свертку (§ 11)

$$F(x) = M_t \{f(x+t) \overline{f(t)}\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{T} \int_0^T f(x+t) \overline{f(t)} dt \right],$$

которая также является п. п. функцией.

Имеем

$$M_x \{|F(x)|^2\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |F(x)|^2 dx = a > 0, \quad (12.14)$$

так как если  $\alpha = 0$ , то (§ 9, лемма 1)  $F(x) \equiv 0$  и, значит,

$$F(0) = M \int_t^T |f(t)|^2 dt = 0,$$

отсюда  $f(x) \equiv 0$ , что противоречит предположению.

Из формулы (12.14) получаем

$$\frac{1}{T} \int_0^T |F(x)|^2 dx \geq \frac{\alpha}{2} \quad \text{при } T \geq T_0 > 0.$$

Так как (§ 11, лемма 1)

$$F_T(x) = \frac{1}{T} \int_0^T f(x+t) \overline{f(t)} dx \xrightarrow{x} F(x)$$

при  $T \rightarrow \infty$  и  $F(x)$  ограничена, то

$$|F_T(x)|^2 \xrightarrow{x} |F(x)|^2 \quad \text{при } T \rightarrow \infty,$$

и, следовательно, число  $T_0$  можно выбрать столь большим, чтобы при  $T > T_0$  имело место неравенство

$$\frac{1}{T} \int_0^T |F_T(x)|^2 dx \geq \frac{\alpha}{4}.$$

Рассмотрим функцию

$$\Phi_T(x) = \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{f}_T(x+t) \overline{\tilde{f}(t)} dt,$$

где

$$\tilde{f}_T(x) = f(x) \quad \text{при } 0 < x < 2T$$

и  $\tilde{f}_T(x+2T) \equiv \tilde{f}_T(x)$  (рис. 63).

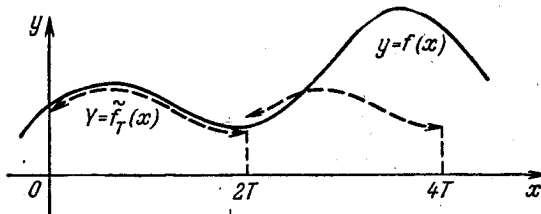


Рис. 63.

Легко видеть, что функция  $\Phi_T(x)$  непрерывна и  $2T$ -периодична. Полагая

$$\mu = \frac{m\pi}{T} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

для  $2T$ -периодической функции  $\Phi_T(x)$ , получим ее обычный ряд Фурье:

$$\Phi_T(x) \sim \sum_{\mu} c_T(\mu) e^{-i\mu x}.$$

Вводя обозначения

$$\alpha_T(\mu) = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-i\mu x} dx,$$

$$\beta_T(\mu) = \frac{1}{2T} \int_0^{2T} f(x) e^{-i\mu x} dx$$

и используя  $2T$ -периодичность функции  $\Phi_T(x)$ , для ее коэффициентов Фурье  $c_T(\mu)$  получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} c_T(\mu) &= \frac{1}{2T} \int_0^{2T} \Phi_T(x) e^{-i\mu x} dx = \\ &= \frac{1}{2T^2} \int_0^{2T} dx \int_0^T \tilde{f}_T(x+T) \overline{\tilde{f}(t)} e^{-i\mu x} dt = \\ &= \frac{1}{2T^2} \int_0^T \overline{\tilde{f}(t)} e^{i\mu t} dt \int_0^{2T} \tilde{f}_T(x+t) e^{-i\mu(x+t)} dx = \\ &= \frac{1}{2T^2} \int_0^T \overline{\tilde{f}(t)} e^{i\mu t} dt \int_t^{2T+t} \tilde{f}_T(x) e^{-i\mu x} dx = \\ &= \frac{1}{2T^2} \int_0^T \overline{\tilde{f}(t)} e^{i\mu t} dt \int_0^{2T} f(x) e^{-i\mu x} dx = \overline{\alpha_T(\mu)} \cdot \beta_T(\mu). \end{aligned}$$

Для непрерывной периодической функции  $\Phi_T(x)$  имеет место известное равенство Парсеваля:

$$\frac{1}{2T} \int_0^{2T} |\Phi_T(x)|^2 dx = \sum_{\mu} |c_T(\mu)|^2 = \sum_{\mu} |\alpha_T(\mu)|^2 |\beta_T(\mu)|^2.$$

Так как согласно условию теоремы функция  $f(x)$  почти периодическая с нулевыми коэффициентами Фурье, то в силу леммы 2 при достаточно большом  $T$  равномерно по  $\mu$  справедлива оценка:

$$|\alpha_T(\mu)| < \varepsilon \quad (T > T_0),$$

где  $\varepsilon > 0$  произвольно мало. Далее, так как  $\beta_T(\mu)$  представляет собой коэффициенты Фурье ограниченной кусочно-непрерывной  $2T$ -периодической функции  $\tilde{f}_T(x)$ , то выполнено неравенство Бесселя:

$$\sum_{\mu} |\beta_T(\mu)|^2 \leq \frac{1}{2T} \int_0^{2T} |f_T(x)|^2 dx \leq \Gamma^2.$$

Поэтому

$$\sum_{\mu} |\alpha_T(\mu)|^2 |\beta_T(\mu)|^2 < \varepsilon^2 \sum_{\mu} |\beta_T(\mu)|^2 \leq \varepsilon^2 \Gamma^2$$

и, значит,

$$\frac{1}{2T} \int_0^{2T} |\Phi_T(x)|^2 dx < \varepsilon^2 \Gamma^2.$$

Отсюда и подавно

$$\frac{1}{2T} \int_0^T |\Phi_T(x)|^2 dx < \varepsilon^2 \Gamma^2 \text{ при } T > T_0. \quad (12.16)$$

С другой стороны, при  $0 < x < T$  и  $0 < t < T$  имеем  $0 < x+t < 2T$  и, следовательно,

$$\Phi_T(x) = \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{f}_T(x+t) \overline{f(t)} dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(x+t) \overline{f(t)} dt = F_T(x).$$

Отсюда на основании неравенства (12.15) получаем

$$\frac{1}{2T} \int_0^T |\Phi_T(x)|^2 dx = \frac{1}{2T} \int_0^T |F_T(x)|^2 dx \geq \frac{\alpha}{8} \text{ при } T > T_0. \quad (12.17)$$

Неравенства (12.16) и (12.17) противоречивы, если выбрать  $\varepsilon$  достаточно малым. Таким образом, теорема единственности доказана.

*Следствие.* Две почти периодические функции, имеющие одинаковые ряды Фурье, совпадают между собой.

*Замечание.* Если  $f(x)$  не п. п. функция, то функциональное уравнение

$$M \{f(x) e^{-i\lambda x}\} = 0 \quad (-\infty < \lambda < +\infty)$$

может допускать нетривиальные решения. Например, если  $f(x)$  абсолютно интегрируема на  $[0, \infty)$ , т. е.

$$\int_0^{\infty} |f(x)| dx < \infty,$$

то для всякого действительного  $\lambda$ , очевидно, имеем

$$M \{f(x) e^{-i\lambda x}\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-i\lambda x} dx = 0.$$

Отметим один важный вывод из теоремы единственности.

**Теорема.** Если для почти периодической функции  $f(x)$  ее ряд Фурье

$$f(x) \sim \sum_n A_n e^{i\lambda_n x} \quad (12.18)$$

сходится равномерно, то сумма его равна данной функции, т. е.

$$f(x) = \sum_n A_n e^{i\lambda_n x}. \quad (12.19)$$

**Доказательство.** Как известно (§ 9, теорема 2), равномерно сходящийся тригонометрический ряд (12.18) является рядом Фурье своей суммы  $S(x)$ , т. е.

$$S(x) \sim \sum_n A_n e^{i\lambda_n x}.$$

Таким образом, функции  $f(x)$  и  $S(x)$  имеют одинаковые ряды Фурье и, следовательно, в силу теоремы единственности они совпадают. Отсюда вытекает формула (12.19).

**Следствие.** Если для почти периодической функции  $f(x)$  ее ряд Фурье

$$f(x) \sim \sum_n A_n e^{i\lambda_n x}$$

сходится абсолютно, т. е.

$$\sum_n |A_n| < \infty,$$

то справедливо разложение

$$f(x) = \sum_n A_n e^{i\lambda_n x}.$$

### § 13. Равенство Парсеваля

**Теорема 1.** Для всякой почти периодической функции  $f(x)$  с рядом Фурье

$$f(x) \sim \sum_n A_n e^{i\lambda_n x}$$

имеет место равенство Парсеваля:

$$\sum_n |A_n|^2 = M \{|f(x)|^2\}. \quad (13.1)$$

Доказательство. Рассмотрим свертку (§ 11)

$$F(x) = M_t \{ f(x+t) \overline{f(t)} \} \sim \sum_n |A_n|^2 e^{i\lambda_n x}.$$

Так как на основании неравенства Бесселя (§ 8) имеем

$$\sum_n |A_n|^2 \leq M \{ |f(x)|^2 \} < \infty,$$

то ряд Фурье свертки  $F(x)$  сходится равномерно и, следовательно, имеет место равенство

$$M_t \{ f(x+t) \overline{f(t)} \} = \sum_n |A_n|^2 e^{i\lambda_n x}.$$

Полагая здесь  $x=0$ , очевидно, получим равенство Парсеваля (13.1).

Замечание. Если модули коэффициентов Фурье  $a(\lambda)$  рассматривать как величины проекций п. п. функции  $f(x)$  на орты  $e_\lambda = e^{i\lambda x}$ , то равенство Парсеваля представляет теорему Пифагора в пространстве п. п. функций  $\Pi$ .

Определение. Говорят, что последовательность п. п. функций  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$  сходится в среднем к предельной п. п. функции  $f(x)$ , если

$$M \{ |f_n(x) - f(x)|^2 \} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Аналогично ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

сходится в среднем к  $F(x)$ , если последовательность частных сумм

$$S_n(x) = \sum_{\nu=1}^n f_\nu(x)$$

сходится в среднем к  $F(x)$ .

Теорема 2. Для всякой почти периодической функции  $f(x)$  ее ряд Фурье сходится в среднем к  $f(x)$  (при любом порядке слагаемых).

Доказательство. Для отрезка ряда Фурье

$$\sum_{\nu=1}^n A_\nu e^{i\lambda_\nu x}$$

согласно (8.4) и (13.1) имеем

$$M \left\{ \left| f(x) - \sum_{\nu=1}^n A_\nu e^{i\lambda_\nu x} \right|^2 \right\} = M \{ |f(x)|^2 \} - \sum_{\nu=1}^n |A_\nu|^2 < \epsilon,$$

если  $n > N(\epsilon)$ . А это и значит, что ряд Фурье функции  $f(x)$  сходится в среднем к  $f(x)$ .

### § 14. Теорема аппроксимации

Как было доказано выше (§ 2), предел равномерно сходящейся последовательности тригонометрических полиномов есть функция почти периодическая. Справедливо и обратное положение, что всякую п. п. функцию  $f(x)$  можно рассматривать как предел равномерно сходящейся последовательности тригонометрических полиномов, т. е. п. п. функции допускают равномерную аппроксимацию тригонометрическими полиномами с любой степенью точности. Оригинальное доказательство этой теоремы аппроксимации Бора, опирающееся лишь на определение п. п. функции, было дано Н. Н. Боголюбовым (см. [70]). Мы здесь приведем доказательство Н. Винера (см. [71], [67]), основанное на применении равенства Парсевалля (§ 13).

Теорема аппроксимации. *Если  $f(x)$  — почти периодическая функция, то для всякого  $\varepsilon > 0$  существует конечный тригонометрический полином*

$$P_\varepsilon(x) = \sum_{n=1}^{N(\varepsilon)} c_n(\varepsilon) e^{i\lambda_n x},$$

удовлетворяющий неравенству

$$\sup_x |f(x) - P_\varepsilon(x)| \leq \varepsilon,$$

где в качестве  $\lambda_n$  могут быть взяты показатели Фурье функции  $f(x)$ .

Доказательство. Пусть

$$g(x) = \sup_t |f(x+t) - f(t)|.$$

Функция  $g(x)$  — почти периодическая.

В самом деле, учитывая, что

$$|\sup_t \varphi(t) - \sup_t \psi(t)| \leq \sup_t |\varphi(t) - \psi(t)|,$$

при любом действительном  $h$  имеем

$$\begin{aligned} |g(x+h) - g(x)| &= \left| \sup_t |f(x+h+t) - f(t)| - \right. \\ &\quad \left. - \sup_t |f(x+t) - f(t)| \right| \leq \\ &\leq \sup_t \left| |f(x+h+t) - f(t)| - |f(x+t) - f(t)| \right| \leq \\ &\leq \sup_t |f(x+h+t) - f(x+t)|, \end{aligned}$$

т. е.

$$|g(x+h) - g(x)| \leq g(h). \quad (14.1)$$



Отсюда, так как функция  $f(x)$  ограничена и равномерно непрерывна на  $(-\infty, \infty)$ , то  $g(h) \rightarrow g(0) = 0$  при  $h \rightarrow 0$  и, следовательно,  $g(x)$  также ограничена и равномерно непрерывна на  $(-\infty, \infty)$ . Кроме того, из неравенства (14.1) вытекает, что всякий  $\varepsilon$ -почти период функции  $f(x)$  является  $\varepsilon$ -почти периодом функции  $g(x)$  и, таким образом, эта функция почти периодическая.

Пусть  $\varepsilon > 0$  произвольно. Рассмотрим функцию

$$\varphi(y) = \begin{cases} 1 - \frac{2y}{\varepsilon} & \text{при } 0 \leq y \leq \frac{\varepsilon}{2}, \\ 0 & \text{при } y > \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

(рис. 64).

Так как функция  $\varphi(y)$  равномерно непрерывна на  $[0, \infty)$ , то сложная функция  $\varphi(g(x))$  является почти периодической (см. § 1). Функция  $\varphi(g(x))$  неотрицательна, и так как  $\varphi(g(0)) = \varphi(0) = 1$ , то  $\varphi(g(x)) \not\equiv 0$ . Поэтому ее среднее значение

$$M_x \{ \varphi(g(x)) \} = \mu > 0.$$

Положим

$$\psi(x) = \frac{1}{\mu} \varphi(g(x));$$

тогда, очевидно,  $\psi(x)$  — п. п. функция и

$$M_x \{ \psi(x) \} = \frac{1}{\mu} M_x \{ \varphi(g(x)) \} = 1. \quad (14.2)$$

Рассмотрим функцию

$$f_\varepsilon(x) = M_t \{ f(t) \psi(x-t) \}.$$

Используя равенство (14.2), имеем

$$\begin{aligned} |f(x) - f_\varepsilon(x)| &= |f(x) M_t \{ \psi(x-t) \} - \\ &- M_t \{ f(t) \psi(x-t) \}| = |M_t \{ [f(x) - f(t)] \psi(x-t) \}| \leq \\ &\leq M_t \{ |f(x) - f(t)| \cdot \psi(x-t) \}. \quad (14.3) \end{aligned}$$

Но согласно определению функция  $\psi(x-t) = \frac{1}{\mu} \varphi(g(x-t))$  ова, что если  $\psi(x-t) \neq 0$ , то

$$\begin{aligned} x-t &= \sup_u |f(x-t+u) - f(u)| = \\ &= \sup_u |f(x+u) - f(t+u)| < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Отсюда при  $u=0$  будем иметь

$$|f(x) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким образом, из неравенства (14.3) получаем

$$|f(x) - f_\varepsilon(x)| < \frac{\varepsilon}{2} M \{ \psi(x-t) \} = \frac{\varepsilon}{2}. \quad (14.4)$$

Для п. п. функции  $f(x)$  рассмотрим ее ряд Фурье

$$f(x) \infty \sum_n A_n e^{i\lambda_n x}.$$

Обозначая через  $\eta$  произвольно малое положительное число, на основании неравенства Бесселя (§ 8) выберем  $N = N(\eta)$  так, чтобы

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |A_n|^2 < \eta.$$

Пусть

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^N A_n e^{i\lambda_n x}$$

и

$$f(x) = S_N(x) + R_N(x).$$

Так как

$$R_N(x) \infty \sum_{n=N+1}^{\infty} A_n e^{i\lambda_n x},$$

то, используя равенство Парсеваля, получим

$$M \{ |R_N(x)|^2 \} = \sum_{n=N+1}^{\infty} |A_n|^2 < \eta. \quad (14.5)$$

Положим

$$P_\varepsilon(x) = M_t \{ S_N(t) \psi(x-t) \} \equiv \sum_{n=1}^N A_n M_t \{ \psi(t) e^{-i\lambda_n t} \} \cdot e^{i\lambda_n x}.$$

Очевидно,  $P_\varepsilon(t)$  есть тригонометрический полином, причем  $\lambda_n$  — показатели Фурье функции  $f(x)$ .

Имеем

$$\begin{aligned} f_\varepsilon(x) - P_\varepsilon(x) &= M_t \{ f(t) \psi(x-t) \} - M_t \{ S_N(t) \psi(x-t) \} = \\ &= M_t \{ R_N(t) \psi(x-t) \}. \end{aligned}$$

Отсюда, применяя известное неравенство Коши—Буняковского (§ 8) и используя неравенство (14.5), получаем

$$|f_\varepsilon(x) - P_\varepsilon(x)| \leq \sqrt{M_t \{|R_N(t)|^2\}} \sqrt{M_t \{\psi^2(x-t)\}} < \\ < \sqrt{\eta} \sqrt{M_t \{\psi^2(t)\}} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (14.6)$$

если выбрать

$$\eta < \frac{\varepsilon^2}{4 M_t \{\psi^2(t)\}}.$$

Из неравенств (14.4) и (14.6) находим

$$|f(x) - P_\varepsilon(x)| < \varepsilon \text{ при } -\infty < x < +\infty.$$

Теорема аппроксимации доказана.

## § 15. Теорема компактности Бохнера

**Определение.** Функция  $f(x) \in C(-\infty, \infty)$  называется *нормальной*, если из каждой бесконечной последовательности ее сдвигов  $\{f(x+h_n)\}$  ( $h_n \in (-\infty, \infty)$ ) можно выделить равномерно сходящуюся на всей действительной оси подпоследовательность. Иными словами, функция  $f(x)$  нормальная, если семейство функции  $\{f(x+h)\}$  ( $-\infty < h < \infty$ ) компактно в смысле равномерной сходимости.

Всякая нормальная функция  $f(x)$ , очевидно, ограничена. Действительно, если существует последовательность  $\{x_n\}$  такая, что  $|f(x_n)| \rightarrow \infty$ , то из последовательности  $\{f(x+h_n)\}$  нельзя выбрать сходящуюся при  $x=0$ , а следовательно и на  $(-\infty, \infty)$ , подпоследовательность.

Пользуясь понятием нормальности, Бохнер (см. [72]) дал другое определение п. п. функции, полезное для приложений.

**Теорема Бохнера.** *Непрерывная функция является почти периодической тогда и только тогда, когда она нормальная.*

**Доказательство** (см. [67]). 1) Докажем сначала необходимость этого условия, т. е. мы предположим, что функция  $f(x)$  почти периодическая, и докажем, что она нормальная.

Рассмотрим произвольную последовательность

$$f(x+h_1), f(x+h_2), \dots, f(x+h_n), \dots,$$

где  $h_n$  ( $n=1, 2, \dots$ ) — действительные числа. Так как функция  $f(x)$  ограничена (§ 7), то эта последовательность также ограничена. На числовой оси  $-\infty < x < \infty$  возьмем счетное всюду

плотное множество точек  $x_1, x_2, \dots$  (например, множество рациональных чисел). Из ограниченной числовой последовательности

$$f(x_1 + h_1), f(x_1 + h_2), \dots, f(x_1 + h_n), \dots$$

выберем сходящуюся подпоследовательность

$$f(x_1 + h_{11}), f(x_1 + h_{12}), \dots, f(x_1 + h_{1n}), \dots$$

Далее, из ограниченной числовой последовательности

$$f(x_2 + h_{11}), f(x_2 + h_{12}), \dots, f(x_2 + h_{1n}), \dots$$

выберем сходящуюся подпоследовательность

$$f(x_2 + h_{21}), f(x_2 + h_{22}), \dots, f(x_2 + h_{2n}), \dots$$

Этот процесс продолжаем неограниченно. Тогда диагональная функциональная последовательность

$$f(x + h_{11}), f(x + h_{22}), \dots, f(x + h_{nn}), \dots \quad (15.1)$$

будет сходиться в каждой точке  $x_m$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) нашего всюду плотного множества.

Действительно, согласно построению члены последовательности

$$f(x_m + h_{11}), f(x_m + h_{22}), \dots, f(x_m + h_{nn}), \dots \quad (15.2)$$

при  $n \geq m$  входят в состав сходящейся последовательности

$$f(x_m + h_{m1}), f(x_m + h_{m2}), \dots, f(x_m + h_{mn}), \dots$$

и, значит, последовательность (15.2) сходится.

Докажем, что диагональная последовательность (15.1) сходится равномерно на всей действительной оси  $(-\infty, \infty)$ . Пусть  $\varepsilon > 0$  произвольно. Согласно определению п. п. функции существует число  $l = l\left(\frac{\varepsilon}{5}\right)$  такое, что каждый отрезок  $[a, a + l]$  длины  $l$  содержит хотя бы один почти-период  $\tau = \tau_f\left(\frac{\varepsilon}{5}\right)$ . Далее, пусть  $\delta = \delta\left(\frac{\varepsilon}{5}\right)$  — положительное число, определяемое на основе равномерной непрерывности функции  $f(x)$ . На отрезке  $[0, l]$  из точек всюду плотного множества  $\{x_m\}$  построим конечную  $\delta$ -сеть:

$$\xi_1 = x_{m_1}, \xi_2 = x_{m_2}, \dots, \xi_s = x_{m_s},$$

где

$$0 < \xi_{j+1} - \xi_j < \delta \quad (j = 1, 2, \dots, s-1; \xi_1 < \delta, \xi_s > l - \delta).$$

Так как диагональная последовательность (15.1) сходится в точках  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$  и число их конечно, то равномерно для совокупности этих точек выполнен критерий Коши, т. е. существует  $N = N\left(\frac{\varepsilon}{5}\right)$  такое, что

$$|f(\xi_j + h_{pp}) - f(\xi_j + h_{qq})| < \frac{\varepsilon}{5} \quad (j=1, 2, \dots, s),$$

если только  $p, q > N$ .

Пусть теперь  $x$  — любая точка из  $(-\infty, \infty)$  и  $x' \in [0, l]$  есть  $\frac{\varepsilon}{5}$ -конгруэнтная ей точка (§ 1), т. е.  $x' = x + \tau\left(\frac{\varepsilon}{5}\right)$ : Обозначая через  $\xi_k$  ( $k \in [1, s]$ ) ближайшую к  $x'$  точку  $\delta$ -сети, при  $p, q > N$  будем иметь

$$\begin{aligned} |f(x + h_{pp}) - f(x + h_{qq})| &\leq |f(x + h_{pp}) - f(x' + h_{pp})| + \\ &+ |f(x' + h_{pp}) - f(\xi_k + h_{pp})| + |f(\xi_k + h_{pp}) - f(\xi_k + h_{qq})| + \\ &+ |f(\xi_k + h_{qq}) - f(x' + h_{qq})| + \\ &+ |f(x' + h_{qq}) - f(x + h_{qq})| < \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Так как число  $N$  не зависит от  $\varepsilon$ , то отсюда следует, что последовательность  $\{f(x + h_{nn})\}$  равномерно сходится на  $(-\infty, \infty)$  и, таким образом,  $f(x)$  есть нормальная функция.

Заметим, что предельная функция

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x + h_{nn}),$$

очевидно (§ 4), является почти периодической.

2) Докажем теперь достаточность условий теоремы, т. е. предположим, что  $f(x) \in C(-\infty, \infty)$  и является нормальной; требуется доказать, что  $f(x)$  — п. п. функция.

Предположим противное. Пусть  $f(x)$  не есть п. п. функция. Тогда существует  $\varepsilon_0 > 0$ , для которого нельзя подобрать соответствующую длину  $l(\varepsilon_0)$ , т. е. для любого  $l > 0$  найдется отрезок  $[h-l, h+l]$  длины  $2l$  такой, что для каждой точки  $\xi \in [h-l, h+l]$  имеем

$$\sup_x |f(x + \xi) - f(x)| \geq \varepsilon_0. \quad (15.3)$$

Для краткости такие отрезки будем называть «особыми». Построим последовательность особых отрезков  $[h_n - l_n, h_n + l_n]$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) таких, что

$$l_n \geq \max_{m < n} |h_m|$$

( $n=2, 3, \dots$ ), где  $l_1$  произвольно. Так как при  $m < n$  имеем

$$|h_n - (h_n - h_m)| = |h_m| \leq l_n,$$

то

$$h_n - h_m \in [h_n - l_n, h_n + l_n],$$

если  $m < n$ .

Рассмотрим функциональную последовательность

$$f(x + h_1), f(x + h_2), \dots, f(x + h_n), \dots,$$

где  $h_1, h_2, \dots, h_n, \dots$  — центры наших особых отрезков. Для любой ее подпоследовательности

$$f(x + h_{p_1}), f(x + h_{p_2}), \dots, f(x + h_{p_n}), \dots$$

при  $p_m < p_n$  имеем

$$\sup_x |f(x + h_{p_n}) - f(x + h_{p_m})| =$$

$$= \sup_x |f(x + h_{p_n} - h_{p_m}) - f(x)| \geq \varepsilon_0,$$

так как  $h_{p_n} - h_{p_m}$  принадлежит особому отрезку

$$[h_{p_n} - l_{p_n}, h_{p_n} + l_{p_n}].$$

Следовательно, подпоследовательность  $\{f(x + h_{p_n})\}$  не сходится равномерно на  $(-\infty, \infty)$  и, значит, функция  $f(x)$ , вопреки предположению, не является нормальной функцией. Полученное противоречие и доказывает достаточность условия теоремы.

Замечание. Так как нормальность функции является необходимым и достаточным условием почти периодичности ее, то это свойство можно принять за определение п. п. функции. Пользуясь свойством нормальности, получаем простое доказательство почти периодичности суммы или произведения конечного числа п. п. функций.

## § 16. Почти периодические матрицы

Определение 1. Матрица

$$F(x) = (f_{jk}(x)) \quad (-\infty < x < \infty) \quad (16.1)$$

называется *почти периодической*, если все элементы ее  $f_{jk}(x)$  являются п. п. функциями.

Используя норму матрицы (гл. I, § 4), можно дать другое определение п. п. матрицы.

Лемма. Матрица  $F(x)$  является почти периодической тогда и только тогда, когда для любого  $\varepsilon > 0$  существует относительно

плотное множество чисел  $\tau$  ( $\varepsilon$ -почти периоды матрицы) таких, что

$$\|F(x + \tau) - F(x)\| < \varepsilon \quad (16.2)$$

при  $-\infty < x < \infty$  (где под нормой понимается I, II или III норма матрицы, гл. I, § 4).

Доказательство. 1) Докажем сначала необходимость условия (16.2), причем доказательство будем проводить для III нормы матрицы:

$$\|F(x)\| = \sqrt{\sum_{j, k} |f_{jk}(x)|^2}. \quad (16.3)$$

Доказательства для остальных норм аналогичны.

Пусть матрица  $F(x)$  типа  $n \times m$  и  $\varepsilon > 0$  произвольно. Для конечной совокупности п. п. функций  $f_{jk}(x)$  существует относительно плотное множество  $\{\tau\}$  общих  $\frac{\varepsilon}{\sqrt{nm}}$ -почти периодов (§ 3, лемма 1), т. е.

$$|f_{jk}(x + \tau) - f_{jk}(x)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{nm}}$$

для  $\forall j, k$  и  $-\infty < x < \infty$ .

Отсюда

$$\begin{aligned} \|F(x + \tau) - F(x)\| &= \\ &= \sqrt{\sum_{j, k} |f_{jk}(x + \tau) - f_{jk}(x)|^2} < \sqrt{nm \cdot \frac{\varepsilon^2}{nm}} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, неравенство (16.2) выполнено.

2) Докажем достаточность условия. Предположим, что для некоторого относительно плотного множества  $\{\tau\}$ , зависящего от произвольного числа  $\varepsilon > 0$ , имеет место неравенство (16.2). Тогда

$$|f_{jk}(x + \tau) - f_{jk}(x)| \leq \|F(x + \tau) - F(x)\| < \varepsilon$$

для любых  $j$  и  $k$ . Следовательно, все функции  $f_{jk}(x)$  почти периодические и, значит, матрица  $F(x)$  также почти периодическая.

Лемма доказана.

Из определения 1 легко следует, что если матрицы  $F(x)$  и  $G(x)$  почти периодические, то матрицы  $AF(x)$ ,  $F(x)A$  ( $A$  — постоянная матрица),  $F(x) + G(x)$ ,  $F(x)G(x)$ ,  $F^T(x)$ ,  $F^*(x)$   $\|F(x)\|$  — также почти периодические.

Естественно также для п. п. матрицы  $F(x)$  устанавливается понятие ряда Фурье

$$F(x) \sim \sum_{\lambda} A(\lambda) e^{i\lambda x},$$

где

$$A(\lambda) = M\{F(x) e^{-i\lambda x}\}.$$

Для непрерывной матрицы легко обобщается понятие *нормальности*.

**Определение 2.** Матрица  $F(x) \in C(-\infty, \infty)$  называется *нормальной*, если из любой последовательности  $F(x+h_1)$ ,  $F(x+h_2)$ , ...,  $F(x+h_k)$ , ...

$$(h_k \in (-\infty, \infty); \quad k=1, 2, \dots)$$

можно выбрать подпоследовательность

$$F(x+h_{p_1}), \quad F(x+h_{p_2}), \quad \dots, \quad F(x+h_{p_k}), \quad \dots,$$

равномерно сходящуюся на всей действительной оси, т. е. существует матрица  $\Phi(x)$  такая, что

$$\|F(x+h_{p_k}) - \Phi(x)\| < \varepsilon$$

при  $k > N(\varepsilon)$  и  $-\infty < x < \infty$ , причем, очевидно,  $\Phi(x) \in C(-\infty, \infty)$ .

Обобщенная теорема Бохнера (см. [73]). Для почти периодичности непрерывной матрицы  $F(x)$  необходимо и достаточно, чтобы она была нормальной.

**Доказательство.** 1) Пусть  $(n \times m)$ -матрица

$$F(x) = (f_{jk}(x))$$

почти периодическая и

$$\{F(x+h_p)\} = \{(f_{jk}(x+h_p))\} \quad (p=1, 2, \dots)$$

— произвольная последовательность ее сдвигов вдоль действительной оси. Так как все функции  $f_{jk}(x)$  почти периодические, то в силу теоремы Бохнера (§ 17) из последовательности  $\{f_{11}(x+h_p)\}$  можно выделить равномерно сходящуюся последовательность  $\{f_{11}(x+h_{11,p})\}$ .

Далее, из последовательности  $\{f_{12}(x+h_{11,p})\}$  выделяем равномерно сходящуюся подпоследовательность  $\{f_{12}(x+h_{12,p})\}$ , причем, очевидно, подпоследовательность  $\{f_{11}(x+h_{12,p})\}$  также равномерно сходится. Так как число функций  $f_{jk}(x)$  конечно, то, продолжая этот процесс, мы в конце концов получим подпоследовательность  $h_p^* = h_{nm,p}$  ( $p=1, 2, \dots$ ), для которой все подпоследовательности

$$\{f_{jk}(x+h_p^*)\} \quad (j=1, \dots, n; \quad k=1, \dots, m; \quad p=1, 2, \dots)$$

равномерно сходятся на оси  $(-\infty, \infty)$ .

Следовательно, существует  $(n \times m)$ -матрица  $\Phi(x)$  такая, что

$$F(x+h_p^*) \xrightarrow{x} \Phi(x) \quad \text{при } p \rightarrow \infty,$$

причем предельная матрица  $\Phi(x)$  почти периодическая.



2) Пусть теперь матрица  $F(x) = [f_{jk}(x)]$  нормальная. Тогда из теоремы Бохнера непосредственно вытекает, что все функции  $f_{jk}(x)$  почти периодические. Отсюда на основании определения 1 получаем, что матрица  $F(x)$  также почти периодическая.

В дальнейшем нам придется иметь дело с семейством почти периодических по  $x$  матриц  $F(x, y)$ , зависящих от параметра  $y$ .

Определение 3. Матрица  $F(x, y)$  называется *почти периодической по  $x$  равномерно относительно параметра  $y \in Y$* , если для каждого  $\varepsilon > 0$  существует относительно плотное множество общих, не зависящих от  $y$ ,  $\varepsilon$ -почти периодов  $\tau = \tau_F(\varepsilon)$  семейства  $\{F(x, y)\}$ , т. е. при всех  $x \in (-\infty, \infty)$  и любом  $y \in Y$  имеем

$$\|F(x + \tau, y) - F(x, y)\| < \varepsilon.$$

### § 17. Линейная система с постоянной матрицей и свободным почти периодическим членом

Рассмотрим систему

$$\frac{dy}{dt} = Ay + f(t), \quad (17.1)$$

где  $y$  —  $(n \times 1)$ -вектор,  $A = [a_{jk}]$  — постоянная  $(n \times n)$ -матрица и  $f(t)$  — почти периодический  $(n \times 1)$ -вектор.

Мы будем изучать свойства решений  $\eta(t)$ , ограниченных на всей действительной оси, т. е. таких, что

$$\sup_t \|\eta(t)\| = M < \infty. \quad (17.2)$$

Лемма. Если скалярное уравнение

$$\frac{dy}{dt} = \lambda y + f(t), \quad (17.3)$$

где  $\lambda = \mu + i\nu$  — комплексное число и  $f(t)$  — п. п. функция, имеет ограниченное решение

$$y = \eta(t),$$

то это решение почти периодическое.

Доказательство (см. [73]). Общее решение уравнения (17.3) имеет вид

$$y(t) = e^{\lambda t} \left[ c + \int_0^t e^{-\lambda s} f(s) ds \right], \quad (17.4)$$

где  $c$  — произвольная постоянная,

1) Пусть  $\alpha = \operatorname{Re} \lambda > 0$ . Тогда  $\|e^{\lambda t}\| = e^{\alpha t} \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow \infty$ . Из формулы (17.4) вытекает, что для того, чтобы  $y(t)$  было ограниченным, необходимо, чтобы

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[ c + \int_0^t e^{-\lambda s} f(s) ds \right] = c + \int_0^{\infty} e^{-\lambda s} f(s) ds = 0.$$

Отсюда

$$c = - \int_0^{\infty} e^{-\lambda s} f(s) ds, \quad (17.5)$$

причем, так как

$$|e^{-\lambda s} f(s)| \leq \Gamma e^{-\alpha s} \quad (s \geq 0),$$

где

$$\Gamma = \sup_s |f(s)|,$$

то интеграл (17.5) сходится. Поэтому ограниченное решение существует и имеет вид

$$\eta(t) = - \int_t^{\infty} e^{\lambda(t-s)} f(s) ds,$$

причем

$$|\eta(t)| \leq \int_t^{\infty} |e^{\lambda(t-s)}| |f(s)| ds \leq \Gamma \int_0^{\infty} e^{\alpha(t-s)} ds = \frac{\Gamma}{\alpha}.$$

Если  $\tau = \tau_f(\varepsilon)$  есть  $\varepsilon$ -почти период функции  $f(t)$ , то имеем

$$\eta(t + \tau) = - \int_{t+\tau}^{\infty} e^{\lambda(t+\tau-s)} f(s) ds = - \int_0^{\infty} e^{\lambda(t-s)} f(s + \tau) ds;$$

отсюда

$$\begin{aligned} |\eta(t + \tau) - \eta(t)| &= \\ &= \left| \int_t^{\infty} e^{\lambda(t-s)} [f(s + \tau) - f(s)] ds \right| \leq \\ &\leq \sup_s |f(s + \tau) - f(s)| \cdot \int_t^{\infty} e^{\alpha(t-s)} ds < \frac{\varepsilon}{\alpha}. \end{aligned}$$

Следовательно, функция  $\eta(t)$  почти периодическая.

2) Пусть  $\alpha = \operatorname{Re} \lambda < 0$ . Тогда  $|e^{\lambda t}| = e^{\alpha t} \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow -\infty$ . Аналогично случаю 1) получаем, что ограниченное решение имеет вид

$$\eta(t) = \int_{-\infty}^t e^{\lambda(t-s)} f(s) ds$$

$$\left( |\eta(t)| \leq \frac{T}{|\alpha|} \right)$$

и является почти периодическим.

3) Пусть  $\alpha = \operatorname{Re} \lambda = 0$ ,  $\lambda = i\nu$  и существует ограниченное решение

$$\eta(t) = e^{i\nu t} \left[ c_0 + \int_0^t e^{-i\nu s} f(s) ds \right].$$

Тогда

$$\int_0^t e^{-i\nu s} f(s) ds$$

ограничен и, следовательно, представляет собой п. п. функцию (§ 7). Таким образом, в этом случае все решения

$$y(t) = e^{i\nu t} \left[ c + \int_0^t e^{-i\nu s} f(s) ds \right] \quad (|c| < \infty)$$

ограничены и почти периодические.

**З а м е ч а н и е.** Если однородное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x \quad (17.6)$$

не имеет нетривиальных ограниченных на  $(-\infty, \infty)$  решений, т. е.  $\operatorname{Re} \lambda \neq 0$ , то неоднородное уравнение (17.3) допускает единственное ограниченное и почти периодическое решение.

Если же однородное уравнение (17.6) имеет нетривиальные ограниченные решения, т. е.  $\operatorname{Re} \lambda = 0$ , то неоднородное уравнение (17.3) или не имеет ограниченных на  $(-\infty, \infty)$  решений, или существует бесконечное множество ограниченных и почти периодических решений.

**Обобщенная теорема Бора — Нейгебауэра.** *Всякое ограниченное решение линейной дифференциальной системы (17.1) с постоянной матрицей и почти периодическим свободным членом является почти периодическим<sup>1)</sup>.*

<sup>1)</sup> Эта теорема обобщает аналогичный результат Бора и Нейгебауэра [74], полученный ими для линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и почти периодическим свободным членом.



то на основании леммы функция  $z_2^{(0)}(t)$  также почти периодическая. Продолжая это рассуждение, находим, что все функции  $z_k^{(0)}(t)$  ( $k=1, \dots, n$ ) являются почти периодическими, а следовательно, решения  $z^{(0)}(t)$  и  $\eta(t)$  также почти периодические.

Теорема доказана.

Следствие. Если корни  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  характеристического уравнения

$$\det(A - \mu E) = 0$$

не имеют нулевых вещественных частей:

$$\operatorname{Re} \mu_j \neq 0 \quad (j=1, \dots, n),$$

то система (17.1) допускает единственное почти периодическое решение (см. гл. IV, § 10).

В этом случае, предполагая, что

$$f(t) \sim \sum_{\lambda} b(\lambda) e^{i\lambda t},$$

нетрудно построить ряд Фурье ограниченного п. п. решения

$$\eta(t) \sim \sum_{\lambda} c(\lambda) e^{i\lambda t}.$$

Формально подставляя (§ 10) эти ряды в систему (17.1), будем иметь

$$\sum_{\lambda} i\lambda c(\lambda) e^{i\lambda t} = \sum_{\lambda} A c(\lambda) e^{i\lambda t} + \sum_{\lambda} b(\lambda) e^{i\lambda t}.$$

Отсюда

$$c(\lambda) = -(A - i\lambda E)^{-1} b(\lambda) \quad (\det(A - i\lambda E) \neq 0)$$

и, следовательно,

$$\eta(t) \sim \sum_{\lambda} (i\lambda E - A)^{-1} b(\lambda) e^{i\lambda t}.$$

## § 18. Квазилинейная почти периодическая система

Рассмотрим квазилинейную систему

$$\frac{dy}{dt} = Ay + f(t) + \mu \varphi(t, y), \quad (18.1)$$

где  $y = (y_1, \dots, y_n)$ ;  $A = [a_{jk}]$  — постоянная  $(n \times n)$ -матрица;  $f(t) \in C(I_t)$  и  $\varphi(t, y) \in C(I_t \times \mathcal{R}_y^n)$  —  $(n \times 1)$ -векторы;  $\mu$  — малый скалярный параметр, причем выполнено условие Липшица

$$\|\varphi(t, z) - \varphi(t, y)\| \leq N \|z - y\| \quad (18.2)$$

( $y \in \mathcal{R}_y^n$ ,  $z \in \mathcal{R}_y^n$ ,  $N$  — постоянная).

Теорема Бирюк [75]. Если

1)  $\operatorname{Re} \lambda_j(A) \neq 0$ ;

2)  $f(t)$  — почти периодична по  $t$ ;

3)  $\Phi(t, y)$  — почти периодична по  $t$  равномерно по  $y$  на каждом компакте  $Y$ ,

то при  $|\mu| < \mu_0$ , где  $\mu_0$  достаточно мало, система (18.1) допускает почти периодическое решение  $\eta = \eta(t, \mu)$ .

Доказательство. В силу теоремы Боля (гл. V, § 10) система (18.1) при  $|\mu| \leq \mu_1$  имеет равномерно ограниченное на оси  $I_t$  решение  $\eta = \eta(t, \mu)$ , удовлетворяющее интегральному уравнению

$$\eta(t, \mu) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t_1) [f(t_1) + \mu \Phi(t_1, \eta(t_1, \mu))] dt_1, \quad (18.3)$$

где матрица  $G(t)$  такова, что

$$\|G(t)\| \leq ce^{-\alpha|t|} \quad (18.4)$$

( $c$  и  $\alpha$  — положительные постоянные).

Пусть

$$\|\eta(t, \mu)\| < b < \infty \text{ при } t \in I_t \text{ и } |\mu| \leq \mu_1.$$

Покажем, что при достаточно малом  $|\mu|$  вектор-функция  $\eta(t, \mu)$  почти периодична по  $t$ . Пусть  $\tau = \tau_f(\varepsilon)$  — общий почти период вектор-функции  $f(t)$  и семейства  $\Phi(t, y)$  ( $\|y\| \leq b$ ). Из формулы (18.3) при  $|\mu| \leq \mu_1$  имеем

$$\begin{aligned} \eta(t+\tau, \mu) &= \int_{-\infty}^{\infty} G(t+\tau-t_1) [f(t_1) + \mu \Phi(t_1, \eta(t_1, \mu))] dt_1 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t_1) [f(t_1+\tau) + \mu \Phi(t_1+\tau, \eta(t_1+\tau, \mu))] dt_1. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом (18.2) и (18.4) получим

$$\begin{aligned} \|\eta(t+\tau, \mu) - \eta(t, \mu)\| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \|G(t-t_1)\| \{ \|f(t_1+\tau) - f(t_1)\| + \\ &+ |\mu| \{ \|\Phi(t_1+\tau, \eta(t_1+\tau, \mu)) - \Phi(t_1, \eta(t_1+\tau, \mu))\| + \\ &+ \|\Phi(t_1, \eta(t_1+\tau, \mu)) - \Phi(t_1, \eta(t_1, \mu))\| \} \} dt_1 \leq \\ &\leq \{ \sup_t \|f(t+\tau) - f(t)\| + |\mu| [ \sup_{t,y} \|\Phi(t+\tau, y) - \Phi(t, y)\| + \\ &+ N \sup_t \|\eta(t+\tau, \mu) - \eta(t, \mu)\| \} \int_{-\infty}^{\infty} \|G(t)\| dt < \\ &< \{ \varepsilon + |\mu| \varepsilon + N |\mu| \sup_t \|\eta(t+\tau, \mu) - \eta(t, \mu)\| \} c_1, \end{aligned}$$

где

$$c_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \|G(t)\| dt \leq \frac{2c}{a}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \sup_t \|\eta(t + \tau, \mu) - \eta(t, \mu)\| &\leq \\ &\leq (1 + |\mu|) c_1 \varepsilon + c_1 N |\mu| \sup_t \|\eta(t + \tau, \mu) - \eta(t, \mu)\| \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\sup_t \|\eta(t + \tau, \mu) - \eta(t, \mu)\| \leq \frac{(1 + |\mu|) c_1}{1 - c_1 N |\mu|} \varepsilon,$$

если только

$$|\mu| < \min\left(\frac{1}{c_1 N}, \mu_1\right) = \mu_0.$$

Таким образом, при достаточно малом  $|\mu|$  решение  $\eta(t, \mu)$  почти периодическое.

**Замечание.** Почти периодическое решение  $\eta(t, \mu)$  системы (18.1) может быть найдено методом последовательных приближений:

$$\eta(t, \mu) = \lim_{p \rightarrow \infty} \eta_p(t, \mu),$$

где

$$\eta_0(t, \mu) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t - t_1) f(t_1) dt_1 \equiv y_0(t)$$

— единственное почти периодическое решение системы

$$\frac{dy}{dt} = Ay + f(t)$$

и

$$\begin{aligned} \eta_{p+1}(t, \mu) &= \int_{-\infty}^{\infty} G(t - t_1) [f(t_1) + \mu \varphi(t_1, \eta_p(t_1, \mu))] dt_1 \\ &(p = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Так как

$$\eta_p(t, \mu) \xrightarrow{p} \eta(t, \mu) \quad \text{при } |\mu| < \mu_0,$$

то решение  $\eta(t, \mu)$  непрерывно по  $\mu$  в окрестности точки  $\mu = 0$  и

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \eta(t, \mu) = y_0(t).$$

### § 19. $H$ -класс почти периодической системы

Рассмотрим нелинейную дифференциальную систему

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (S_t),$$

где  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{E}_x^n$  — искомый действительный  $(n \times 1)$ -вектор,  $t \in I_t = \{-\infty, \infty\}$  и  $f(t, x)$  — данный  $(n \times 1)$ -вектор.

Предположим, что

1)  $f(t, x) \in C(I_t \times A_x)$ ,

где  $A_x$  — область действительного евклидова пространства  $\mathcal{E}_x^n$ , причем  $f(t, x)$  равномерно непрерывна по  $x$  на каждом замкнутом подмножестве  $I_t \times \bar{B}_x$ , где

$\bar{B}_x \subset A_x$  — компакт (т. е. ограниченное замкнутое множество) (рис. 65);

2)  $f(t, x)$  почти периодична по  $t$  равномерно по  $x$  на любом  $\bar{B}_x \subset A_x$ .

В этом случае в силу теоремы существования [11] для любых начальных данных  $t_0 \in I_t$  и  $x_0 \in A_x$  будет существовать решение  $x = x(t)$  системы  $S_t$  такое, что  $x(t_0) = x_0$  (вообще говоря, не единственное).

Из условия 1) и 2) вытекает, что  $f(t, x)$  ограничена на каждом

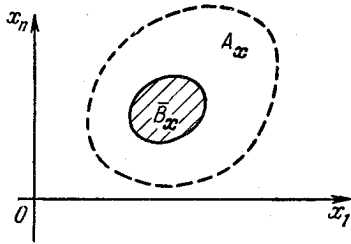


Рис. 65.

множестве  $I_t \times \bar{B}_x$ . Действительно, пусть  $\varepsilon > 0$  фиксировано и  $\delta = \delta(\varepsilon)$  — соответствующее положительное число, определяемое на основе равномерной непрерывности по  $x$  вектор-функции  $f(t, x)$  на  $I_t \times \bar{B}_x$ . Для каждой точки  $x \in \bar{B}_x$  построим сферу  $S_\delta(x)$ . Из бесконечного покрытия  $\bigcup_{x \in \bar{B}_x} S_\delta(x) \supset \bar{B}_x$  выберем конечное под-

покрытие

$$\bigcup_{k=1}^N S_\delta(x_k) \supset \bar{B}_x.$$

Так как вектор-функции  $f(t, x_k)$  ( $k=1, \dots, N$ ) почти периодические по  $t$ , то они ограничены (§ 2), и пусть

$$\Gamma_\varepsilon = \max_k \|f(t, x_k)\|.$$

Для любой точки  $x \in \bar{B}_x$  найдется сфера  $S_\delta(x_k) \supset x$ . Поэтому

$$\|f(t, x)\| \leq \|f(t, x_k)\| + \|f(t, x) - f(t, x_k)\| < \Gamma_\varepsilon + \varepsilon,$$

т. е.  $f(t, x)$  ограничена на  $I_t \times \bar{B}_x$ .

Пусть  $\{h_p\}$  — произвольная последовательность действительных чисел. Так как вектор-функция  $f(t, x)$  почти периодична по  $t$ ,



то в силу обобщенной теоремы Бохнера (§ 16) для каждого  $x \in A_x$  существует подпоследовательность  $\{h_q\}$  ( $q = q(p)$ ) такая, что последовательность  $\{f(t+h_q, x)\}$  сходится равномерно по  $t$  на оси  $-\infty < t < \infty$ . В силу условий 1) и 2) на множестве  $C = I_t \times \bar{B}_x$  число  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  для равномерной непрерывности по  $t$  вектор-функции  $f(t, x)$  можно выбрать не зависящим от точки  $(t, x)$ , а длина  $l = l(\varepsilon) > 0$  для почти периодической вектор-функции  $f(t, x_0)$  ( $x_0 \in \bar{B}_x$ ) может быть взята не зависящей от точки  $x_0$ . Поэтому, выбирая на множестве  $C$  всюду плотное множество точек  $(t_r, x_r)$  ( $r = 1, 2, \dots$ ), по аналогии с доказательством обобщенной теоремы Бохнера (§ 16) легко доказать, что существует последовательность  $\{h_r\}$ , для которой последовательность  $\{f(t+h_r, x)\}$  сходится при  $r \rightarrow \infty$  равномерно по совокупности переменных  $(t, x)$  на  $C = I_t \times \bar{B}_x$ , где  $\bar{B}_x$  — данный компакт.

Более того, полагая

$$A_x = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bar{B}_x^{(k)}, \quad \bar{B}_x^{(k)} \subset \bar{B}_x^{(k+1)} \quad (k = 1, 2, \dots),$$

где  $\bar{B}_x^{(k)}$  — компакты, и используя диагональный процесс, можно построить последовательность  $\{f(t+h_s, x)\}$  ( $s = 1, 2, \dots$ ), которая будет сходиться равномерно на любом замкнутом множестве  $I_t \times \bar{B}_x$ , где  $\bar{B}_x$  — компакт. В этом случае предельная функция

$$g(x, t) = \lim_{s \rightarrow \infty} f(t+h_s, x)$$

будет равномерно непрерывна по  $x$  на каждом множестве  $I_t \times \bar{B}_x$  и почти периодична по  $t$  равномерно по  $x$  на этом множестве и, следовательно, непрерывна по совокупности переменных  $(t, x)$  на  $I_t \times A_x$ .

Пусть

$$\frac{dx}{dt} = f(t+h_p, x) \quad (p = 1, 2, \dots), \quad (S_{t+h_p})$$

где

$$f(t+h_p, x) \xrightarrow[t, x]{p \rightarrow \infty} g(t, x) \quad \text{при} \quad p \rightarrow \infty \\ (t \in I_t, x \in \bar{B}_x \subset A_x).$$

В таком случае будем говорить, что система  $S_{t+h_p}$  при  $p \rightarrow \infty$  сходится к системе

$$\frac{dx}{dt} = g(t, x), \quad (S_{t+h})$$

где  $h$  обозначает последовательность  $\{h_1, h_2, \dots\}$ , что условно записывается следующим образом:

$$S_{t+h} = \lim_{p \rightarrow \infty} S_{t+h_p} \quad (19.1)$$

Близость систем  $(S_{t+h_p})$  и  $(S_{t+h})$  в точке  $(t, \mathbf{x})$  будем оценивать абсолютной величиной

$$|S_{t+h} - S_{t+h_p}| = \|g(t, \mathbf{x}) - f(t+h_p, \mathbf{x})\|,$$

обладающей обычными свойствами. Заметим, что в силу предыдущих рассуждений сходимость

$$S_{t+h_p} \rightarrow S_{t+h} \quad \text{при} \quad p \rightarrow \infty$$

можно предполагать равномерной по совокупности переменных  $(t, \mathbf{x})$  на каждом множестве  $I_t \times \bar{B}_x$ , где  $\bar{B}_x$  — компакт.

Для краткости будем называть системы  $(S_{t+h})$  *присоединенными* к системе  $(S_t)$ . Заметим, что каждая присоединенная система, очевидно, является почти периодической и для нее справедливы условия 1) и 2).

Определение (см. [76], [73]). Совокупность всех присоединенных систем  $S_{t+h}$ , соответствующих всем последовательностям  $\{h_p\}$ , для которых существуют равномерные пределы (19.1), будем называть *H-классом* почти периодической системы  $S_t$ , т. е.

$$H(S_t) = \{S_{t+h}\},$$

а всякую систему  $S_{t+h} \in H(S_t)$  будем называть *представителем* H-класса.

Таким образом, H-класс системы  $S_t$  является замыканием всех смещенных систем  $S_{t+h_p}$ .

Заметим, что в H-класс системы  $S_t$  входят все системы вида

$$\frac{dy}{dt} = f(t+a, y) \quad (a = \text{const}),$$

так как в качестве последовательности  $\{h_p\}$  можно выбрать сходящуюся последовательность  $a, a, \dots$

Отметим основное свойство H-класса почти периодической системы  $S_t$ .

Лемма. H-класс почти периодической системы  $S_t$  определяется любым своим представителем  $S_{t+h}$ , т. е.

$$H(S_t) \equiv H(S_{t+h}).$$

**Доказательство.** Пусть

$$\tilde{S}_t \equiv S_{t+h} = \lim_{p \rightarrow \infty} S_{t+h_p}$$

и

$$\tilde{S}_{t+k} \in H(\tilde{S}_t),$$

т. е.

$$\tilde{S}_{t+k} = \lim_{q \rightarrow \infty} \tilde{S}_{t+k_q}.$$

Имеем

$$|\tilde{S}_t - S_{t+h_p}| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (19.2)$$

при  $\rho > N_1$ ,  $(t, \mathbf{x}) \in I_t \times \bar{B}_x$  и

$$|\tilde{S}_{t+k} - \tilde{S}_{t+k_p}| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (19.3)$$

при  $\rho > N_2$ ,  $(t, \mathbf{x}) \in I_t \times \bar{B}_x$ .

Заменяя в неравенстве (19.2)  $t$  на  $t+k_p$ , будем иметь

$$|\tilde{S}_{t+k_p} - S_{t+h_p+k_p}| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (19.4)$$

при  $\rho > N_1$ ,  $(t, \mathbf{x}) \in I_t \times \bar{B}_x$ .

Из неравенств (19.3) и (19.4) при  $\rho > \max(N_1, N_2)$ ,  $(t, \mathbf{x}) \in I_t \times \bar{B}_x$  получаем

$$|\tilde{S}_{t+k} - S_{t+h_p+k_p}| < \varepsilon,$$

т. е.

$$\tilde{S}_{t+k} = \lim_{p \rightarrow \infty} S_{t+(h_p+k_p)}$$

и, значит,

$$\tilde{S}_{t+k} \in H(S_t).$$

Таким образом,

$$H(\tilde{S}_t) \equiv H(S_{t+h}) \subset H(S_t).$$

Аналогично показывается, что

$$H(S_t) \subset H(S_{t+h}).$$

Следовательно,

$$H(S_t) \equiv H(S_{t+h}).$$

## § 20. Ограниченные решения почти периодических систем

Рассмотрим почти периодическую систему  $S_t$  со свойствами 1) и 2).

Пусть  $\xi = \xi(t)$  — ограниченное решение системы  $S_t$ , определенное в максимальном интервале  $\alpha < t < \beta$  и для всех  $t \in (\alpha, \beta)$ , принадлежащее некоторому компакту  $K_x \subset A_x$ . Тогда из известной теоремы существования решений системы дифференциальных уравнений вытекает, что решение  $\xi(t)$  бесконечно продолжаемо

влево и вправо, т. е. существует в бесконечном интервале  $(-\infty, \infty)$ , причём

$$\sup_t \|\xi(t)\| = c < \infty.$$

**Определение.** Следуя Америо [76], ограниченное решение  $\xi(t) \in \bar{B}_x (t \in I_t)$  почти периодической системы  $S_t$  называется *разделённым* (separated) в данной области  $I_t \times \bar{B}_x$ , если или оно единственно в  $\bar{B}_x$ , или для всякого другого ограниченного решения  $\eta(t) \in \bar{B}_x$  при  $t \in I_t$  выполнено неравенство

$$\inf_t \|\xi(t) - \eta(t)\| \geq \rho > 0, \quad (20.1)$$

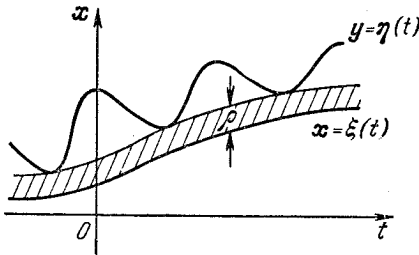


Рис. 66.

где  $\rho$  — положительная постоянная, зависящая только от  $\xi(t)$  (рис. 66). В дальнейшем мы будем придерживаться изложения Кордуняну [73].

**Лемма 1.** Если все ограниченные решения  $\xi(t) \in \bar{B}_x$  почти периодической системы  $S_t$  разделены в  $I_t \times \bar{B}_x$ , где  $\bar{B}_x$  — компакт, то в области  $I_t \times \bar{B}_x$  существует лишь конечное число ограниченных решений.

**Доказательство.** Пусть  $\{\xi(t)\}$  — множество всех ограниченных решений в  $I_t \times \bar{B}_x$ . Так как  $\bar{B}_x$  — компакт, то множество функций  $\{\xi(t)\}$  равномерно ограничено, т. е.

$$\sup_{t, \xi} \|\xi(t)\| \leq c_1 < \infty.$$

Кроме того, имеем

$$\dot{\xi}(t) = f(t, \xi(t)),$$

где  $f(t, x)$  ограничена в  $I_t \times \bar{B}_x$  (§ 19), и, значит,

$$\sup_{t, \xi} \|f(t, \xi(t))\| \leq c_2 < \infty.$$

Отсюда

$$\|\xi(t') - \xi(t)\| = \left\| \int_t^{t'} f(t, \xi(t)) dt \right\| \leq \int_t^{t'} \|f(t, \xi(t))\| |dt| \leq c_2 |t' - t|.$$

Следовательно, множество функций  $\{\xi(t)\}$  равномерно непрерывно.

Если множество  $\{\xi(t)\}$  бесконечно, то в силу теоремы Арцеля (гл. V, § 2) существует последовательность ограниченных решений  $\xi_p(t) \in I_t \times \bar{B}_x$  ( $p = 1, 2, \dots$ ) такая, что

$$\xi_p(t) \xrightarrow{t} \xi^*(t) \quad \text{при} \quad p \rightarrow \infty$$

равномерно на каждом ограниченном интервале  $\alpha < t < \beta$ , причем предельная вектор-функция  $\xi^*(t)$  на основании непрерывной зависимости решений от параметра есть ограниченное решение системы  $S_t$  в  $I_t \times \bar{B}_x$ .

Так как

$$\inf_{t, p} \|\xi^*(t) - \xi_p(t)\| = 0,$$

то решение  $\xi^*(t)$  не является разделенным в  $I_t \times \bar{B}_x$ .

Лемма доказана.

*Лемма 2. Если почти периодическая система  $S_t$  допускает ограниченное решение  $\xi(t) \in \bar{B}_x$  при  $t \in I_t$ , где  $\bar{B}_x$  — компакт, то любая присоединенная система  $S_{t+h}$  также имеет ограниченные решения  $\eta(t) \in \bar{B}_x$  при  $t \in I_t$ .*

*Доказательство.* Пусть правая часть системы  $S_{t+h}$  есть

$$g(t, x) = \lim_{p \rightarrow \infty} f(t + h_p, x),$$

где

$$f(t + h_p, x) \xrightarrow{t, x} g(t, x) \quad \text{при} \quad p \rightarrow \infty$$

и  $(t, x) \in I_t \times \bar{B}_x$ . Рассмотрим последовательность вектор-функций

$$\eta_p(t) = \xi(t + h_p) \quad (p = 1, 2, \dots),$$

где, очевидно,

$$\eta_p(t) \in \bar{B}_x \quad \text{при} \quad t \in I_t,$$

причем

$$\dot{\eta}_p(t) = f(t + h_p, \eta_p) \quad (p = 1, 2, \dots).$$

Эта последовательность равномерно ограничена и равностепенно непрерывна. Следовательно, существует предел некоторой ее подпоследовательности

$$\eta(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} \eta_{\alpha_p}(t).$$

Очевидно,  $\eta(t)$  является ограниченным решением системы  $S_{t+h}$  и  $\eta(t) \in \bar{B}_x$  при  $t \in I_t$ .

*Лемма 3. Если почти периодическая система  $S_t$  допускает положительно ограниченное решение  $\xi(t) \in \bar{B}_x$  при  $t \geq t_0$ , где  $\bar{B}_x$  — некоторый компакт, то каждая присоединенная система  $S_{t+h}$  имеет ограниченное решение  $\eta(t) \in \bar{B}_x$  при  $t \in I_t$ .*

Доказательство. Рассмотрим множество вектор-функций

$$\xi_p(t) = \xi(t+p) \quad (p=1, 2, \dots).$$

Очевидно,  $\xi_p(t)$  есть решение системы

$$\dot{\xi}_p(t) = f(t+p, \xi_p) \quad (p=1, 2, \dots),$$

определенное в промежутке  $[t_0 - p, \infty)$ , причем  $\xi_p(t) \in \bar{B}_x$  при  $t \geq t_0 - p$ . Поэтому для любого промежутка  $[T, \infty)$  существует подпоследовательность  $\{h_p\}$ , для которой последовательности  $\{\xi_{h_p}(t)\}$  и  $\{f(t+h_p, \mathbf{x})\}$  являются сходящимися при  $p \rightarrow \infty$  равномерно по  $t$  и  $\mathbf{x}$  в каждой области  $[T, T'] \times \bar{B}_x$  ( $T' > T$ ). Полагая  $T = -1, -2, \dots$ , диагональным процессом построим последовательность  $\{\xi_{h_p}(t)\}$  такую, что на всей оси  $-\infty < t < \infty$  имеем

$$\xi_{h_p}(t) \rightarrow \tilde{\xi}(t) \quad \text{при} \quad p \rightarrow \infty$$

равномерно на каждом ограниченном интервале  $(\alpha, \beta) \in I_t$ , причем

$$f(t+h_p, \mathbf{x}) \xrightarrow[t, \mathbf{x}]{p \rightarrow \infty} \tilde{f}(t, \mathbf{x})$$

и  $(t, \mathbf{x}) \in I_t \times \bar{B}_x$ .

Отсюда  $\tilde{\xi}(t) \in \bar{B}_x$  при  $t \in I_t$  и  $\tilde{\xi}(t)$  является ограниченным решением системы

$$\frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{dt} = \tilde{f}(t, \tilde{\mathbf{x}}), \quad (\tilde{S}_t)$$

входящей в  $H$ -класс системы  $S_t$ . А так как (§ 19, лемма)  $H$ -класс системы  $S_t$  совпадает с  $H$ -классом системы  $\tilde{S}_t$ , то в силу леммы 2 всякая присоединенная система  $S_{t+h}$  также будет иметь ограниченное решение  $\eta(t) \in \bar{B}_x$  при  $t \in I_t$ .

Лемма 4. Если почти периодическая система  $S_t$  имеет ограниченное решение  $\xi(t) \in \bar{B}_x$  при  $t \in I_t$  и все ограниченные решения  $\eta(t) \in \bar{B}_x$  при  $t \in I_t$  присоединенных систем  $S_{t+h} \in H(S_t)$  являются разделенными в  $I_t \times \bar{B}_x$  ( $\bar{B}_x$  — компакт), то они равномерно разделены в  $I_t \times \bar{B}_x$ , т. е. существует число  $\rho > 0$ , общее для всего класса  $H(S_t)$  и такое, что для любых двух различных ограниченных решений  $\eta'(t) \in I_t \times \bar{B}_x$  и  $\eta''(t) \in I_t \times \bar{B}_x$  произвольной системы  $S_{t+h}$  выполнено неравенство

$$\inf_t \|\eta'(t) - \eta''(t)\| \geq \rho > 0.$$

Доказательство. В силу леммы 1 система  $S_t$  имеет конечное число ограниченных решений  $\xi_1(t), \dots, \xi_N(t)$ , содержащихся при  $t \in I_t$  в компакте  $\bar{B}_x$ , причем

$$\inf_{t, r \neq s} \|\xi_r(t) - \xi_s(t)\| = \rho > 0.$$

Рассмотрим ограниченные решения  $\{\eta(t)\}$  произвольной системы  $S_{t+h}$  такие, что  $\eta(t) \in I_t \times \bar{B}_x$ . В силу леммы 2 эти решения существуют, а так как они по условию леммы являются разделенными, то число их  $N_1$  конечно. Так как  $S_{t+h} \in H(S_t)$ , то для некоторой последовательности  $\{h_p\}$  существуют пределы

$$\eta_q(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} \xi_q(t + h_p) \quad (q = 1, \dots, N) \quad (20.2)$$

равномерно на каждом конечном интервале  $\alpha < t < \beta$ . Вектор-функции  $\eta_q(t)$  ( $q = 1, \dots, N$ ) являются ограниченными решениями присоединенной системы  $S_{t+h}$ , содержащимися при  $t \in I_t$  в компакте  $\bar{B}_x$ . Очевидно, при  $r \neq s$  имеем

$$\inf_t \|\xi_r(t + h_p) - \xi_s(t + h_p)\| = \inf_t \|\xi_r(t) - \xi_s(t)\| \geq \rho > 0$$

и, следовательно,

$$\inf_{t, r \neq s} \|\eta_r(t) - \eta_s(t)\| = \rho > 0. \quad (20.3)$$

Таким образом, ограниченные решения  $\eta_q(t)$  ( $q = 1, \dots, N$ ) попарно различны и, значит,  $N_1 \geq N$ . Так как (§ 19)  $S_t \in H(S_{t+h})$ , то аналогично имеем  $N \geq N_1$ ; отсюда  $N_1 = N$ , т. е. число ограниченных решений  $\eta(t)$ , целиком содержащихся в компакте  $\bar{B}_x$ , для всех присоединенных систем  $S_{t+h}$  одно и то же, причем все эти решения могут быть получены по формуле (20.2). Отсюда на основании неравенства (20.3) вытекает справедливость леммы.

**Замечание.** Если ограниченные решения почти периодической системы  $S_t$  разделены в области  $I_t \times \bar{B}_x$ , то отсюда еще не следует, что в этой области являются разделенными и ограниченные решения всех присоединенных систем  $S_{t+h}$ .

**Пример** (см. [77], [67]). Рассмотрим скалярное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(t)x, \quad (20.4)$$

где

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \sin \frac{t}{2k+1}. \quad (20.5)$$

Так как ряд (20.5) равномерно сходится на всей действительной оси  $-\infty < t < \infty$ , то  $f(t)$  — почти периодическая функция (§ 4), Интегрируя уравнение (20.4), будем иметь

$$x(t) = ce^{F(t)}, \quad (20.6)$$

где

$$\begin{aligned}
 F(t) &= \int_0^t f(\xi) d\xi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t}{2k+1} \left(1 - \cos \frac{t}{2k+1}\right) = \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{2k+1} \sin^2 \frac{t}{2(2k+1)}. \quad (20.7)
 \end{aligned}$$

Пусть  $n$  — произвольное натуральное число и

$$t_n = 1 \cdot 3 \dots (2n+1) \pi.$$

Так как все члены ряда (20.7) неотрицательны, то, учитывая, что  $\sin^2 \frac{t_n}{2(2k+1)} = 1$  при  $k=0, 1, \dots, n$ , имеем

$$\begin{aligned}
 F(t_n) &\geq \sum_{k=0}^n \frac{2}{2k+1} \sin^2 \frac{t_n}{2(2k+1)} = \\
 &= \sum_{k=0}^n \frac{2}{2k+1} > 2 \int_0^n \frac{dx}{2x+1} = \ln(2n+1) \quad (n=1, 2, \dots).
 \end{aligned}$$

Следовательно, функция  $F(t)$  положительна и неограничена на оси  $-\infty < t < \infty$ . Отсюда на основании формулы (20.6) уравнение (20.4) имеет единственное ограниченное решение

$$x \equiv 0,$$

соответствующее  $c=0$ . Таким образом, решение является разделенным в любой области  $I_t \times B_x$ .

С другой стороны, для последовательности функций  $\{f(t+t_n)\}$ , принимая во внимание, что  $\frac{t_n}{2k+1} \geq \pi(2r+1)$ , где  $r$  — целое число при  $0 \leq k \leq n$ , имеем

$$\begin{aligned}
 f(t+t_n) &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)^2} \sin \frac{t+t_n}{2k+1} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \sin \frac{t+t_n}{2k+1} = \\
 &= - \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)^2} \sin \frac{t}{2k+1} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \sin \frac{t+t_n}{2k+1} = \\
 &= -f(t) + \varepsilon_n(t),
 \end{aligned}$$

причем  $\varepsilon_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ . Отсюда

$$g(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(t+t_n) = -f(t)$$



и поэтому уравнение

$$\frac{dy}{dt} = -f(t)y \quad (20.8)$$

является присоединенным к (20.4). Общее решение уравнения (20.8) имеет вид

$$y(t) = ce^{-F(t)},$$

причем

$$|y(t)| \leq c$$

и

$$\inf_t |y(t)| = 0.$$

Таким образом, все решения уравнения (20.8) ограничены, но, очевидно, не являются разделенными.

## § 21. Теоремы Америо и Фавара

Теорема Америо (см. [76]). *Если почти периодическая система*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, \mathbf{x}) \quad (S_t)$$

*имеет ограниченное решение  $\xi(t)$ , содержащееся в некотором компакте  $\bar{B}_x$  при  $t \in I_t$ , причем ограниченные решения из  $\bar{B}_x$  всех присоединенных систем  $S_{t+h}$  разделены в  $I_t \times \bar{B}_x$  (§ 20), то все эти ограниченные решения почти периодические.*

Доказательство [73]. Пусть  $\xi = \xi(t)$  — ограниченное решение системы  $S_t$  такое, что  $\xi(t) \in \bar{B}_x$  при  $t \in I_t$ . Чтобы убедиться в почти периодичности этого решения, достаточно доказать, что вектор-функция  $\xi(t)$  нормальная, т. е. из любой последовательности ее сдвигов  $\{\xi(t+h_p)\}$  можно выделить подпоследовательность  $\{\xi(t+h_{p_p})\}$ , равномерно сходящуюся на всей действительной оси  $-\infty < t < +\infty$ .

Предположим противное. Пусть существует последовательность  $\{\xi(t+h_p)\}$ , сходящаяся равномерно на каждом конечном промежутке  $\alpha < t < \beta$  (этого всегда можно добиться в силу теоремы Арцеля), причем любая ее подпоследовательность  $\{\xi(t+k_p)\}$  не сходится равномерно на бесконечной оси  $-\infty < t < \infty$ . Так как  $f(t, \mathbf{x})$  почти периодическая, то на основании теоремы Бохнера можно предполагать, что последовательность  $\{f(t+k_p, \mathbf{x})\}$  сходится равномерно на  $I_t \times \bar{B}_x$ .

Пусть  $\rho$  — положительное число, характеризующее равноразделенность ограниченных решений систем  $\{S_{t+h}\}$  в  $I_t \times \bar{B}_x$

(лемма 4 из § 20). Если ограниченное решение  $\xi(t)$  единственно, то число  $\rho > 0$  можно взять произвольным.

Положим

$$\varphi_{pq}(t) = \|\xi(t + k_p) - \xi(t + k_q)\| \quad (p < q)$$

и

$$I_t^{(p, q)} = \left\{ t \in I_t, \varphi_{pq}(t) \leq \frac{\rho}{2} \right\}.$$

Так как последовательность  $\{\xi(t + k_p)\}$  сходится в каждой точке  $t \in I_t$ , то при достаточно больших  $p$  и  $q$  множество  $I_t^{(p, q)}$  не пусто, причем

$$I_t = \bigcup_{p < q} I_t^{(p, q)}.$$

Очевидно,  $\varphi_{pq}(t)$  непрерывна на  $I_t$ .

Пусть

$$\delta_{pq} = \sup_{t \in I_t^{(p, q)}} \varphi_{pq}(t) \leq \frac{\rho}{2}.$$

Если

$$\lim_{p, q \rightarrow \infty} \delta_{pq} = 0, \quad (21.1)$$

то последовательность  $\{\xi(t + k_p)\}$  сходится равномерно на оси  $I_t$ . Действительно, при условии (21.1) для любого  $\varepsilon > 0$ , где  $0 < \varepsilon < \frac{\rho}{2}$ , имеем

$$\delta_{pq} < \varepsilon \quad \text{при} \quad q > p \geq N_\varepsilon.$$

Отсюда  $\varphi_{pq}(t) < \varepsilon < \frac{\rho}{2}$ , если  $t \in I_t^{(p, q)}$ , причем  $\varphi_{pq}(t) > \frac{\rho}{2}$ , если  $t \in \bar{I}_t^{(p, q)}$ . Но функция  $\varphi_{pq}(t)$  непрерывна на  $I_t$ ; поэтому  $I_t^{(p, q)} \equiv I_t$  при  $p, q \geq N_\varepsilon$  и, следовательно,  $\{\xi(t + k_p)\}$  сходится равномерно на  $(-\infty, +\infty)$ . В этом случае теорема доказана.

Предположим противное, т. е. что соотношение (21.1) не имеет места. Тогда

$$\overline{\lim}_{p, q \rightarrow \infty} \delta_{pq} = 2\gamma > 0 \quad (21.2)$$

и, следовательно, найдутся последовательности  $\{p_r\}$  и  $\{q_r\}$  такие, что

$$\delta_{p_r q_r} \geq \gamma \quad (r = 1, 2, \dots).$$

Отсюда в силу определения функции  $\delta_{pq}$  вытекает, что существует последовательность  $\{t_r\} \in I_t^{(p_r, q_r)}$ , для которой

$$\varphi_{p_r q_r}(t_r) \geq \frac{\gamma}{2}$$

и, значит,

$$\frac{\gamma}{2} \leq \| \xi(t_r + k_{p_r}) - \xi(t_r + k_{q_r}) \| \leq \frac{\rho}{2} \quad (r = 1, 2, \dots). \quad (21.3)$$

Так как  $\xi(t)$  ограничена, то из последовательностей  $\{\xi(t_r + k_{p_r})\}$  и  $\{\xi(t_r + k_{q_r})\}$  можно выбрать одновременно сходящиеся подпоследовательности:

$$u = \lim_{s \rightarrow \infty} \xi(t'_s + \lambda_s)$$

и

$$v = \lim_{s \rightarrow \infty} \xi(t'_s + \mu_s),$$

где  $t'_s = t_{r_s}$ ,  $\lambda_s = k_{p_{r_s}}$  и  $\mu_s = k_{q_{r_s}}$ . Переходя к пределу в неравенстве (21.3) по последовательности  $r_s (s = 1, 2, \dots)$ , будем иметь

$$\frac{\gamma}{2} \leq \| u - v \| \leq \frac{\rho}{2}. \quad (21.4)$$

Рассмотрим последовательности  $\{\xi(t + t'_s + \lambda_s)\}$  и  $\{\xi(t + t'_s + \mu_s)\}$ . Так как эти последовательности равномерно ограничены и равномерно непрерывны, то по теореме Арцеля (гл. V, § 2) из них можно выделить подпоследовательности, сходящиеся равномерно на каждом конечном интервале  $\alpha < t < \beta$ . Чтобы не усложнять обозначений, мы будем предполагать, что сами эти последовательности сходятся, т. е. существуют

$$\eta_1(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} \xi(t + t'_s + \lambda_s)$$

и

$$\eta_2(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} \xi(t + t'_s + \mu_s).$$

Вектор-функции  $\eta_1(t)$  и  $\eta_2(t)$  являются, соответственно, решениями присоединенных систем

$$\frac{dy}{dt} = g_1(t, y)$$

и

$$\frac{dy}{dt} = g_2(t, y),$$

где

$$g_1(t, y) = \lim_{s \rightarrow \infty} f(t + t'_s + \lambda_s, y) \quad (21.5)$$

и

$$g_2(t, y) = \lim_{s \rightarrow \infty} f(t + t'_s + \mu_s, y), \quad (21.6)$$

причем опять предполагается, что в случае надобности выбрана равномерно сходящаяся на  $I_t \times \bar{B}_x$  подпоследовательность.

Покажем, что пределы (21.5) и (21.6) совпадают. Действительно, так как согласно нашему выбору последовательность  $\{f(t + k_p, x)\}$  сходится равномерно на  $I_t \times \bar{B}_x$  и  $\{\lambda_s\}$ ,  $\{\mu_s\}$  суть подпоследовательности последовательности  $\{k_p\}$ , то

$$\lim_{s \rightarrow \infty} f(t + \lambda_s, y) = \lim_{s \rightarrow \infty} f(t + \mu_s, y) = g(t, y)$$

и

$$\|f(t + \lambda_s, y) - f(t + \mu_s, y)\| < \varepsilon$$

при  $s \geq N(\varepsilon)$  и  $(t, y) \in I_t \times \bar{B}_x$ . Отсюда

$$\begin{aligned} \|g_1(t, y) - g_2(t, y)\| &\leq \|g_1(t, y) - f(t + t'_s + \lambda_s, y)\| + \\ &+ \|f(t + t'_s + \lambda_s, y) - f(t + t'_s + \mu_s, y)\| + \\ &+ \|f(t + t'_s + \mu_s, y) - g_2(t, y)\| \leq 3\varepsilon, \end{aligned}$$

если  $s \geq N(\varepsilon)$  и  $(t, y) \in I_t \times \bar{B}_x$ .

Следовательно,

$$g_1(t, y) \equiv g_2(t, y) \quad \text{при } (t, y) \in I_t \times \bar{B}_x.$$

Таким образом,  $\eta_1(t)$  и  $\eta_2(t)$  являются ограниченными решениями одной и той же присоединенной системы  $S_{t+h}$  в области  $I_t \times \bar{B}_x$ . Так как

$$\eta_1(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} \xi(t'_s + \lambda_s) = u$$

и

$$\eta_2(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} \xi(t'_s + \mu_s) = v,$$

причем на основании неравенства (21.4) имеем

$$\frac{\rho}{2} \leq \|\eta_1(0) - \eta_2(0)\| \leq \frac{\rho}{2}, \quad (21.7)$$

то эти решения различны. Поэтому в силу выбора числа  $\rho$  должно быть выполнено неравенство

$$\inf_t \|\eta_1(t) - \eta_2(t)\| \geq \rho > 0.$$

Однако это противоречит неравенству (21.7).

Теорема доказана.

Следствие. Если почти периодическая система  $S_t$  имеет единственное ограниченное решение  $\xi(t)$  и все системы ее  $H$ -класса  $\{S_{t+h}\}$  также обладают единственными ограниченными решениями, то все эти ограниченные решения почти периодические.

Рассмотрим линейную однородную систему

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x, \quad (\Sigma_t)$$

где  $P(t)$  — почти периодическая матрица, и пусть

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = \tilde{P}(t)\tilde{x}, \quad (\Sigma_{t+h})$$

где

$$P(t+h_p) \underset{t}{\rightrightarrows} \tilde{P}(t)$$

— ее  $H$ -класс.

Теорема Фавара (см. [77], [67]). Если каждая присоединенная система  $\Sigma_{t+h}$  не имеет ограниченных нетривиальных решений, то для любой неоднородной системы

$$\frac{dy}{dt} = P(t)y + f(t), \quad (S_t)$$

где  $f(t)$  — почти периодическая вектор-функция, ее ограниченное решение, если оно существует, является почти периодическим.

Доказательство.  $H$ -класс системы  $S_t$  имеет вид

$$\frac{d\tilde{y}}{dt} = \tilde{P}(t)\tilde{y} + \tilde{f}(t), \quad (S_{t+h})$$

где

$$P(t+h_p) \underset{t}{\rightrightarrows} \tilde{P}(t)$$

и

$$f(t+h_p) \underset{t}{\rightrightarrows} \tilde{f}(t).$$

Так как разность двух решений неоднородной системы  $S_{t+h}$  представляет собой решение однородной системы  $\Sigma_{t+h}$ , то в силу условий теоремы любая система  $S_{t+h}$  имеет единственное ограниченное решение. Отсюда на основании следствия к теореме Америо получаем, что ограниченное решение системы  $S_t$ , если оно существует, является почти периодическим.

Замечание. В условиях теоремы единственные ограниченные решения присоединенных систем  $S_{t+h}$  также будут почти периодическими.

## Упражнения

1. Исследовать на почти периодичность функции:  $\sin(\sin x \sqrt[3]{2})$ ,  $\sin |x|$ ,  $\sin x^2$ ,  $\cos \sqrt[3]{x}$ ,  $\ln(2 + \cos x + \cos x \sqrt[3]{2})$ ,  $\operatorname{sgn}(\sin x)$ .

2. Доказать, что если  $f(x)$  — действительная п. п. функция, то

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0, \\ 0, & f(x) < 0 \end{cases}$$

и

$$f_-(x) = \begin{cases} 0, & f(x) \leq 0, \\ -f(x), & f(x) < 0 \end{cases}$$

также п. п. функции.

3. Доказать, что если  $f(x)$  — действительная п. п. функция и

$$\gamma \in (\inf_x f(x), \sup_x f(x)),$$

то существует относительно плотное множество точек  $\{\xi\} \in I_x$  таких, что

$$f(\xi) = \gamma.$$

4. Показать, что если  $f(x)$  — непрерывная  $\omega$ -периодическая функция на  $(-\infty, +\infty)$ , то

$$M\{f(x)\} = \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} f(x) dx.$$

5. Пусть  $f(x)$  — п. п. функция и

$$M\{f(x)\} = 0.$$

Доказать, что функция  $f(x)$  имеет относительно плотное множество нулей.

6. Показать, что для функции

$$f(x) = e^{ix^2}$$

при  $\forall \lambda \in (-\infty, +\infty)$  имеем

$$M\{f(x) e^{-i\lambda x}\} = 0.$$

7. Пусть  $f(x, y)$  почти периодична по  $x$  при  $y \in Y$ , где  $Y$  — компакт, и равномерно непрерывна по  $y$  на множестве  $I_x \times Y$ .

Доказать, что  $f(x, y)$  почти периодична по  $x$  равномерно относительно параметра  $y \in Y$ .

8. Пусть  $x$  — скаляр и

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t), \quad (*)$$

где  $a(t)$  и  $b(t)$  — действительные почти периодические функции, причем

$$a(t) \geq \alpha > 0,$$

где  $\alpha$  — положительная постоянная.

Доказать, что уравнение  $(*)$  имеет единственное почти периодическое решение (см. [78]).

9. Пусть в скалярном уравнении первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + g(t), \quad (**)$$

$f(x)$  — монотонно возрастающая функция такая, что

$$f'(x) \geq k > 0$$

( $k$  — постоянная), и  $g(t)$  — почти периодическая функция.

Доказать, что существует единственное почти периодическое решение уравнения (\*\*\*) (см. [79]).

10. Пусть

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad (***)$$

— неавтономная система, где  $f(t, x) \in C_{tx}^{(0,1)}(I_t \times \mathcal{E}_x^n)$  и  $f(t, x)$   $\omega$ -периодична по  $t$ .

Если система (\*\*\*) допускает ограниченные на  $I_t$  решения, которые являются разделенными в некоторой области  $I_t \times \bar{B}_x$  ( $\bar{B}_x$  — компакт), то все эти решения  $\omega$ -периодичны.

11. Пусть

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(x) + \mu g(t), \quad (***)$$

где  $A = [a_{jk}]$  — постоянная ( $n \times n$ )-матрица,  $f(x) \in C^1(\mathcal{E}_x^n)$ ,  $g(t)$  — п. п. вектор-функция и  $\mu$  — скалярный параметр, причём

$$\operatorname{Re} \lambda_j(A) \neq 0 \text{ и } f(0) = f'(0) = 0.$$

Доказать, что при малых  $|\mu|$  уравнение (\*\*\*) имеет единственное п. п. решение (см. [28]).

12. Пусть

$$\frac{dy}{dt} = Ay + f(t), \quad (I)$$

где  $A = [a_{jk}]$  — постоянная ( $n \times n$ )-матрица и  $f(t)$  — конечный тригонометрический полином:

$$f(t) = \sum_{p=0}^N (a_p \cos \lambda_p t + b_p \sin \lambda_p t).$$

Доказать (см. [80]), что система (I) имеет почти периодическое решение тогда и только тогда, когда выполнены условия ортогональности:

$$(\psi_s(t), f(t)) = M \{ \psi_s(t) \bar{f}(t) \} = 0 \quad (s = 1, \dots, q),$$

где  $\psi_s(t)$  ( $s = 1, \dots, q$ ) — полная совокупность линейно независимых п. п. решений сопряжённой системы

$$\frac{dx}{dt} = -A^*x. \quad (II)$$

13. Модулем называется числовое множество  $\mathcal{M} = \{x\}$  такое, что если  $\alpha, \beta \in \mathcal{M}$ , то  $\alpha - \beta \in \mathcal{M}$ .

Пусть линейная система

$$\frac{dy}{dt} = Ay + f(t)$$

с постоянной матрицей  $A$  и с почти периодическим свободным членом  $f(t)$  допускает единственное почти периодическое решение  $\eta = \eta(t)$ , причем почти периодическая вектор-функция  $f(t)$  имеет множество показателей Фурье, принадлежащее модулю  $\mathcal{M}$ . Доказать, что показатели Фурье решения  $\eta(t)$  принадлежат этому же модулю.

14. Пусть

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

— автономная система, где  $f(x) \in C^1(\mathcal{R}_x^n)$  и

$$\operatorname{div} f(x) \equiv \sum_j \frac{\partial f_j}{\partial x_j} = 0.$$

Доказать, что: а) для каждого ограниченного измеримого множества  $A \in \mathcal{R}_x^n$  его объем

$$V(A) = \int_A \dots \int dx_1 \dots dx_n$$

инвариантен относительно данной системы (см. [12], [35]);

б) всякое ограниченное решение  $\xi(t)$  системы, двусторонне устойчивое по Ляпунову при  $t \rightarrow \pm \infty$ , является почти периодическим (см. [81]).



ПРИЛОЖЕНИЕ  
ЖОРДАНОВА ФОРМА МАТРИЦЫ

1°. Прямая сумма линейных подпространств. Пусть  $\mathcal{U}^n$  —  $n$ -мерное векторное пространство (гл. I, § 5), элементами которого являются комплексные  $n$ -векторы:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

где  $x_1, \dots, x_n$  — координаты вектора  $\mathbf{x}$  в некотором базисе.

Определение 1. Подмножество  $\mathfrak{M} \subset \mathcal{U}^n$  называется *подпространством* линейного пространства  $\mathcal{U}^n$ , если оно само является линейным пространством относительно введенных в  $\mathcal{U}^n$  основных операций умножения на число и сложения, т. е. из условия  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathfrak{M}$  следует, что  $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} \in \mathfrak{M}$ , где  $\alpha$  и  $\beta$  — произвольные комплексные числа.

Заметим, что любое подпространство  $\mathfrak{M}$  содержит нулевой элемент  $\mathbf{0}$ , так как если  $\xi \in \mathfrak{M}$ , то

$$\mathbf{0} = 0\xi \in \mathfrak{M}.$$

Пример. Совокупность векторов

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x},$$

где  $A$  —  $(n \times n)$ -матрица, очевидно, представляет собой подпространство  $\mathfrak{M}$  в  $\mathcal{U}^n$ .

В частности, при  $A = O$  и  $A = E$  будем иметь так называемые *особенные* подпространства  $\mathfrak{M} = 0$  и  $\mathfrak{M} = \mathcal{U}^n$ .

Отметим, что *сумма* подпространств

$$\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 \equiv \{\mathbf{x} + \mathbf{y}\},$$

где  $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}_1$  и  $\mathbf{y} \in \mathfrak{M}_2$ , а также их *пересечение*

$$\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2$$

суть также подпространства в  $\mathcal{U}^n$ .

Пусть  $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(k)}$  — максимальное число линейно независимых векторов, содержащихся в линейном подпространстве  $\mathfrak{M}$ . В таком случае

$$\mathfrak{M} \equiv \{z_1\mathbf{x}^{(1)} + \dots + z_k\mathbf{x}^{(k)}\},$$

где  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  — произвольные комплексные числа, т. е.  $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(k)}$  является базисом для  $\mathfrak{M}$ . Число  $k$  называется *размерностью* подпространства  $\mathfrak{M}$ , т. е.

$$\dim \mathfrak{M} = k,$$

где  $0 \leq k \leq n$ .

Обратно, множество

$$\mathfrak{M} = \{\alpha_1 \mathbf{x}^{(1)} + \dots + \alpha_k \mathbf{x}^{(k)}\},$$

натянутое на векторы  $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(k)}$  ( $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  — комплексные числа), является линейным подпространством, причем если данные векторы линейно независимы, то размерность подпространства  $\mathfrak{M}$  равна  $k$ .

**Определение 2.** Линейное пространство  $\mathfrak{M}$  называется *прямой суммой* (см. [5]) линейных подпространств  $\mathfrak{M}_j$  ( $j = 1, 2, \dots, s$ ), т. е.

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2 \oplus \dots \oplus \mathfrak{M}_s, \quad (1)$$

если каждый вектор  $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}$  допускает единственное представление

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{x}^{(2)} + \dots + \mathbf{x}^{(s)},$$

где  $\mathbf{x}^{(j)} \in \mathfrak{M}_j$  ( $j = 1, 2, \dots, s$ ).

Из определения 2 вытекает, что соотношение (1) выполнено тогда и только тогда, когда нулевой вектор  $\mathbf{0}$  не допускает не тривиального разложения

$$\mathbf{0} = \xi^{(1)} + \xi^{(2)} + \dots + \xi^{(s)},$$

где  $\xi^{(j)} \in \mathfrak{M}_j$  ( $j = 1, 2, \dots, s$ ), причем не все векторы  $\xi^{(j)}$  нулевые.

Очевидно, из (1) следует, что

$$\mathfrak{M}_j \cap \mathfrak{M}_k = \mathbf{0} \text{ при } j \neq k. \quad (2)$$

Обратно, если для слагаемых суммы (1) попарно выполнены условия (2), то сумма (1) прямая.

**Теорема 1.** Если линейное пространство  $\mathfrak{L}^n$  представляет прямую сумму подпространств  $\mathfrak{M}_j$  ( $j = 1, \dots, s$ ):

$$\mathfrak{L}^n = \mathfrak{M}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{M}_s,$$

то объединение любых базисов этих подпространств является базисом пространства  $\mathfrak{L}^n$ .

Обратно, если объединение некоторых базисов подпространств  $\mathfrak{M}_j$  ( $j = 1, \dots, s$ ) есть базис пространства  $\mathfrak{L}^n$ , то  $\mathfrak{L}^n$  представляет собой прямую сумму этих подпространств.

Доказательство. 1) Докажем сначала первую часть теоремы, причем доказательство будем проводить для прямой суммы двух подпространств

$$\mathfrak{L}^n \equiv \mathfrak{M}^p \oplus \mathfrak{M}^q \quad (3)$$

размерностей  $p$  и  $q$ . Переход к общему случаю, очевидно, не представляет затруднений.

Пусть  $\mathbf{y}^{(1)}, \dots, \mathbf{y}^{(p)}$  и  $\mathbf{z}^{(1)}, \dots, \mathbf{z}^{(q)}$  — некоторые базисы, соответственно, подпространств  $\mathfrak{M}^p$  и  $\mathfrak{M}^q$ . Из формулы (3) следует, что для любого вектора  $\mathbf{x} \in \mathfrak{L}^n$  справедливо представление

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}, \quad (4)$$

где  $\mathbf{y} \in \mathfrak{M}^p$  и  $\mathbf{z} \in \mathfrak{M}^q$ . Отсюда

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^p \alpha_k \mathbf{y}^{(k)} + \sum_{l=1}^q \beta_l \mathbf{z}^{(l)}, \quad (5)$$

где  $\alpha_1, \dots, \alpha_p$  и  $\beta_1, \dots, \beta_q$  — координаты векторов  $\mathbf{y}$  и  $\mathbf{z}$  в соответствующих базисах. Так как представление (5) единственно, то векторы  $\mathbf{y}^{(1)}, \dots, \mathbf{y}^{(p)}, \mathbf{z}^{(1)}, \dots, \mathbf{z}^{(q)}$  линейно независимы и образуют базис пространства  $\mathfrak{L}^n$ .

2) Докажем теперь вторую часть теоремы. Пусть для подпространств  $\mathfrak{M}^p$  и  $\mathfrak{M}^q$  существуют базисы  $\mathbf{y}^{(1)}, \dots, \mathbf{y}^{(p)}$  и  $\mathbf{z}^{(1)}, \dots, \mathbf{z}^{(q)}$ , объединение которых есть базис пространства  $\mathfrak{L}^n$ . Тогда для каждого  $\mathbf{x} \in \mathfrak{L}^n$  справедливо разложение (5), и это разложение единственно. Но в таком случае имеет место единственное представление (4) и, следовательно,  $\mathfrak{L}^n$  есть прямая сумма подпространств  $\mathfrak{M}^p$  и  $\mathfrak{M}^q$ .

Следствие. Сумма подпространств

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 + \dots + \mathfrak{M}_s$$

является прямой тогда и только тогда, когда

$$\dim \mathfrak{M} = \sum_{j=1}^s \dim \mathfrak{M}_j.$$

Определение 3. Пусть

$$\mathfrak{M} \supset \mathfrak{N}.$$

— вложенные подпространства линейного пространства  $\mathfrak{L}^n$ .

Векторы  $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(p)}$  из  $\mathfrak{M}$  будем называть *линейно независимыми относительно подпространства  $\mathfrak{N}$*  (см. [10]), если 1) они линейно независимы и 2) подпространство, натянутое на эти векторы, имеет с  $\mathfrak{N}$  лишь нулевое пересечение, т. е.

$$\sum_{j=1}^p \alpha_j \xi^{(j)} \in \mathfrak{N}$$

тогда и только тогда, когда

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0.$$

Заметим, что векторы  $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(p)}$ , линейно независимые относительно  $\mathfrak{M} = 0$ , являются линейно независимыми в обычном смысле.

**Теорема 2.** Пусть

$$\mathfrak{L}^n = \mathfrak{M}_m \supset \mathfrak{M}_{m-1} \supset \dots \supset \mathfrak{M}_1 \supset \mathfrak{M}_0 = 0 \quad (6)$$

— цепочка вложенных друг в друга различных подпространств и

$$\xi_i^{(p)}, \dots, \xi_{k_p}^{(p)} \quad (p = 1, \dots, m; k_p \geq 1) \quad (7)$$

— максимальная система векторов из  $\mathfrak{M}_p$ , линейно независимых относительно  $\mathfrak{M}_{p-1}$ . Тогда объединение всех систем (7) представляет базис пространства  $\mathfrak{L}^n$ .

**Доказательство.** Прежде всего, заметим, что полная совокупность векторов (7) является набором линейно независимых векторов пространства  $\mathfrak{L}^n$ . Действительно, пусть

$$\sum_{j=1}^{k_m} \alpha_j^{(m)} \xi_j^{(m)} + \dots + \sum_{j=1}^{k_p} \alpha_j^{(p)} \xi_j^{(p)} + \dots + \sum_{j=1}^{k_1} \alpha_j^{(1)} \xi_j^{(1)} = 0, \quad (8)$$

где  $\alpha_j^{(q)} = 0$  при  $q > p$  и  $\alpha_r^{(p)} \neq 0$  для некоторого  $r \in [1, k_p]$ . Тогда

$\sum_{j=1}^{k_p} \alpha_j^{(p)} \xi_j^{(p)}$  в силу соотношения (8) представляет ненулевой элемент из подпространства, натянутого на векторы  $\xi_1^{(p)}, \dots, \xi_{k_p}^{(p)}$ , принадлежащий подпространству  $\mathfrak{M}_{p-1}$ , что невозможно.

Докажем теперь, что векторы (7) образуют базис пространства  $\mathfrak{L}^n$ . Доказательство будем проводить методом математической индукции по числу  $m$  элементов цепочки (исключая  $\mathfrak{M}_0$ ).

Если  $m = 1$ , т. е.

$$\mathfrak{L}^n \equiv \mathfrak{M}_1 \supset \mathfrak{M}_0 = 0,$$

то векторы (7) представляют собой максимальную систему линейно независимых векторов в  $\mathfrak{L}^n$  и, следовательно, образуют его базис.

Предположим теперь, что теорема верна для любой цепочки вложенных подпространств

$$\mathfrak{M}_{m-1} \supset \dots \supset \mathfrak{M}_1 \supset \mathfrak{M}_0 = 0,$$

содержащей  $m - 1$  элементов ( $m > 1$ ), отличных от нуля. Иными словами, мы предполагаем, что базис подпространства  $\mathfrak{M}_{m-1}$  может

быть построен указанным выше способом. Пусть  $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}_m$ . Можно предполагать, что векторы

$$\xi_1^{(m)}, \dots, \xi_{k_m}^{(m)}, \mathbf{x} \quad (9)$$

линейно независимы, ибо в противном случае вектор  $\mathbf{x}$  являлся бы линейной комбинацией векторов  $\xi_1^{(m)}, \dots, \xi_{k_m}^{(m)}$  и, следовательно, теорема была бы доказана. Подпространство

$$\mathfrak{C} = \{\alpha_1 \xi_1^{(m)} + \dots + \alpha_{k_m} \xi_{k_m}^{(m)} + \beta \mathbf{x}\},$$

натянутое на векторы (9), в силу свойства максимальности системы (7) имеет с подпространством  $\mathfrak{M}_{m-1}$  ненулевое пересечение

$$\mathbf{z} = \sum_{j=1}^{k_m} a_j \xi_j^{(m)} + b \mathbf{x} \in \mathfrak{M}_{m-1}, \quad (10)$$

где, очевидно,  $b \neq 0$ . Но на основании индукционного предположения для подпространства  $\mathfrak{M}_{m-1}$  теорема верна, т. е.  $\mathbf{z}$  представляет собой линейную комбинацию векторов  $\xi_1^{(m-1)}, \dots, \xi_{k_{m-1}}^{(m-1)}, \dots, \xi_1^{(1)}, \dots, \xi_{k_1}^{(1)}$ . Таким образом, из (10) получаем, что произвольный вектор  $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}_m$  может быть выражен в виде линейной комбинации векторов  $\xi_j^{(p)}$  ( $p=1, \dots, m; j=1, \dots, k_p$ ).

Отсюда вытекает, что система векторов (7) есть базис пространства  $\mathfrak{L}^n$ , что и требовалось доказать.

*Следствие. Для каждого подпространства  $\mathfrak{M}^p$  ( $\dim \mathfrak{M}^p = p$ ) линейного пространства  $\mathfrak{L}^n$  существует дополнительное подпространство  $\mathfrak{M}^q$  ( $\dim \mathfrak{M}^q = q$ ) такое, что*

$$\mathfrak{L}^n = \mathfrak{M}^p \oplus \mathfrak{M}^q \quad (p + q = n).$$

Действительно, имеем

$$\mathfrak{L}^n \supset \mathfrak{M}^p \supset \mathbf{0}.$$

В пространстве  $\mathfrak{L}^n$  выберем максимальную совокупность векторов  $\eta^{(1)}, \dots, \eta^{(q)}$ , линейно независимую относительно  $\mathfrak{M}^p$ , и пусть  $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(p)}$  — максимальная совокупность векторов, линейно независимых относительно  $\mathbf{0}$ , т. е. линейно независимых в обычном смысле. Объединение

$$\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(p)}, \eta^{(1)}, \dots, \eta^{(q)}$$

в силу теоремы 2 представляет базис пространства  $\mathfrak{L}^n$ , поэтому

$$p + q = n.$$

Отсюда

$$\mathfrak{L}^n = \mathfrak{M}^p \oplus \mathfrak{M}^q,$$

где  $\mathfrak{M}^q$  — подпространство, натянутое на векторы  $\eta^{(1)}, \dots, \eta^{(q)}$ .

2° Инвариантные подпространства. Пусть в векторном пространстве  $\mathcal{V}^n$  задано линейное преобразование  $\hat{A}$  (гл. I, § 5), переводящее  $\mathcal{V}^n$  в самое себя или в свою правильную часть, т. е.

$$\hat{A}\mathcal{V}^n \subseteq \mathcal{V}^n.$$

Определение 4. Подпространство  $\mathcal{M} \subset \mathcal{V}^n$  называется *инвариантным* относительно преобразования  $\hat{A}$ , если каждый вектор  $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$  преобразованием  $\hat{A}$  переводится в вектор  $\mathbf{y} = \hat{A}\mathbf{x} \in \mathcal{M}$ , т. е.

$$\hat{A}\mathcal{M} \subset \mathcal{M}.$$

Очевидно, нулевое подпространство и само пространство  $\mathcal{V}^n$  инвариантны относительно любого линейного преобразования в  $\mathcal{V}^n$ .

Кроме того, сумма и пересечение подпространств пространства  $\mathcal{V}^n$ , инвариантных относительно линейного преобразования  $\hat{A}$ , суть также подпространства, инвариантные относительно преобразования  $\hat{A}$ .

Если в пространстве  $\mathcal{V}^n$  выбран базис  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  и

$$\left. \begin{aligned} \hat{A}\mathbf{e}_1 &= a_{11}\mathbf{e}_1 + \dots + a_{n1}\mathbf{e}_n, \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \hat{A}\mathbf{e}_n &= a_{1n}\mathbf{e}_1 + \dots + a_{nn}\mathbf{e}_n, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

то преобразованию  $\hat{A}$  соответствует матрица (*матрица преобразования* в данном базисе, гл. I, § 5)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Матрица  $A$ , очевидно, является транспонированной относительно матрицы системы (11). Отметим, что если  $A = [a_{jk}]$ , то  $a_{jk}$  представляет собой  $j$ -ю координату  $k$ -го преобразованного базисного вектора.

Отсюда для любого вектора

$$\mathbf{x} = \sum_k x_k \mathbf{e}_k$$

имеем

$$\hat{A}\mathbf{x} = \sum_k x_k \hat{A}\mathbf{e}_k = \sum_k x_k \sum_j a_{jk} \mathbf{e}_j = \sum_j \mathbf{e}_j \sum_k a_{jk} x_k.$$

Таким образом, вектор  $y = \hat{A}x$  в данном базисе будет иметь представление

$$y = Ax,$$

где  $A$  — матрица преобразования.

*Теорема 3.* Если линейное пространство распадается в прямую сумму нескольких подпространств:

$$\mathcal{L}^n = \mathfrak{M}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{M}_s,$$

инвариантных относительно данного линейного преобразования  $\hat{A}$  в  $\mathcal{L}^n$ , то в надлежащем базисе матрица  $A$  этого преобразования имеет квазидиагональный вид

$$A = \text{diag}(A_1, \dots, A_s), \tag{13}$$

где  $A_j$  — квадратные матрицы, соответственно, порядков  $n_j = \dim \mathfrak{M}_j$  ( $j = 1, \dots, s$ ) и  $n_1 + \dots + n_s = n$ .

Доказательство (см. [5]). Выберем в подпространствах  $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \dots, \mathfrak{M}_s$  соответственно базисы:  $\mathfrak{e}_1^{(1)}, \dots, \mathfrak{e}_{n_1}^{(1)}; \mathfrak{e}_1^{(2)}, \dots, \mathfrak{e}_{n_2}^{(2)}; \dots; \mathfrak{e}_1^{(s)}, \dots, \mathfrak{e}_{n_s}^{(s)}$ . Тогда в силу теоремы 2 их объединение будет базисом пространства  $\mathcal{L}^n$ . Так как

$$\hat{A} \mathfrak{M}_p \subset \mathfrak{M}_p \text{ и } \hat{A} \mathfrak{M}_p \cap \mathfrak{M}_q = 0$$

при  $p \neq q$  ( $p = 1, \dots, s$ ), то

$$\left. \begin{aligned} \hat{A} \mathfrak{e}_1^{(1)} &= a_{11}^{(1)} \mathfrak{e}_1^{(1)} + \dots + a_{n_1 1}^{(1)} \mathfrak{e}_{n_1}^{(1)}, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \hat{A} \mathfrak{e}_{n_1}^{(1)} &= a_{1 n_1}^{(1)} \mathfrak{e}_1^{(1)} + \dots + a_{n_1 n_1}^{(1)} \mathfrak{e}_{n_1}^{(1)}, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \hat{A} \mathfrak{e}_1^{(s)} &= a_{11}^{(s)} \mathfrak{e}_1^{(s)} + \dots + a_{n_s 1}^{(s)} \mathfrak{e}_{n_s}^{(s)}, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \hat{A} \mathfrak{e}_{n_s}^{(s)} &= a_{1 n_s}^{(s)} \mathfrak{e}_1^{(s)} + \dots + a_{n_s n_s}^{(s)} \mathfrak{e}_{n_s}^{(s)}. \end{aligned} \right\}$$

Отсюда, полагая

$$A_p = \begin{bmatrix} a_{11}^{(p)} & \dots & a_{1 n_p}^{(p)} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n_p 1}^{(p)} & \dots & a_{n_p n_p}^{(p)} \end{bmatrix} \quad (p = 1, \dots, s),$$

будем иметь формулу (13).

*Замечания.* Матрицу  $A_p$  ( $p = 1, \dots, s$ ) можно рассматривать как матрицу преобразования  $\hat{A}_p$ , индуцируемого данным

преобразованием  $\hat{A}$  на инвариантном подпространстве  $\mathfrak{M}_p$ ; иными словами, преобразование  $\hat{A}_p$  есть преобразование  $\hat{A}$ , рассматриваемое лишь на подпространстве  $\mathfrak{M}_p$ .

3° Алгебра преобразований. Пусть  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$  — преобразования, действующие из  $\mathfrak{L}^n$  в  $\mathfrak{L}^n$ . Для  $\mathbf{x} \in \mathfrak{L}^n$  естественно определяются комбинированные преобразования (см. гл. I, § 5):

а) произведение преобразования  $\hat{A}$  на скаляр  $\alpha$ :

$$(\alpha \hat{A}) \mathbf{x} = \alpha (\hat{A} \mathbf{x})$$

(в частном случае, если  $\alpha = 0$ , имеем нулевое преобразование

$$\hat{0} \mathbf{x} = \mathbf{0};$$

б) сумма преобразований  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$ :

$$(\hat{A} + \hat{B}) \mathbf{x} = \hat{A} \mathbf{x} + \hat{B} \mathbf{x};$$

с) произведение преобразований  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$ :

$$(\hat{A} \hat{B}) \mathbf{x} = \hat{A} (\hat{B} \mathbf{x})$$

и

$$(\hat{B} \hat{A}) \mathbf{x} = \hat{B} (\hat{A} \mathbf{x}).$$

В общем случае

$$\hat{A} \hat{B} \neq \hat{B} \hat{A}.$$

Вводя единичное преобразование

$$\hat{E} \mathbf{x} \equiv \mathbf{x},$$

можно определить обратное преобразование  $\hat{A}^{-1}$  как преобразование (если оно существует), удовлетворяющее условию:

$$\hat{A}^{-1} \hat{A} = \hat{A} \hat{A}^{-1} = \hat{E}.$$

Если  $\hat{A}^{-1}$  и  $\hat{B}^{-1}$  существует, то легко проверить, что

$$(\hat{A} \hat{B})^{-1} = \hat{B}^{-1} \hat{A}^{-1}.$$

Обычным способом определяются целые степени преобразований:

$$\hat{A}^2 = \hat{A} \hat{A}, \quad \hat{A}^3 = \hat{A} \hat{A} \hat{A}, \quad \dots$$

$$\hat{A}^{-2} = \hat{A}^{-1} \hat{A}^{-1}, \quad \hat{A}^{-3} = \hat{A}^{-1} \hat{A}^{-1} \hat{A}^{-1}, \quad \dots,$$

причем

$$\hat{A}^0 = \hat{E}.$$

Очевидно, при любых целых  $p$  и  $q$  имеем

$$\hat{A}^p \hat{A}^q = \hat{A}^{p+q}.$$



Используя понятие степени преобразования для заданного полинома

$$\varphi(z) = a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_m$$

с числовыми коэффициентами  $a_0, a_1, \dots, a_m$ , можно найти соответствующее преобразование

$$\varphi(\hat{A}) = a_0 \hat{A}^m + a_1 \hat{A}^{m-1} + \dots + a_m \hat{A}^0,$$

где  $\hat{A}^0 = \hat{E}$ .

Покажем, что если преобразование  $\hat{A}$  линейное (гл. I, § 5), то полиномиальное преобразование  $\varphi(\hat{A})$  также линейное. Действительно, для любых  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{L}^n$  и произвольных чисел  $\alpha$  и  $\beta$  имеем

$$\hat{A}^0(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} = \alpha\hat{A}^0\mathbf{x} + \beta\hat{A}^0\mathbf{y},$$

$$\hat{A}^1(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha\hat{A}\mathbf{x} + \beta\hat{A}\mathbf{y},$$

$$\hat{A}^2(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \hat{A}(\alpha\hat{A}\mathbf{x} + \beta\hat{A}\mathbf{y}) = \alpha\hat{A}^2\mathbf{x} + \beta\hat{A}^2\mathbf{y},$$

$$\hat{A}^m(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \hat{A}(\alpha\hat{A}^{m-1}\mathbf{x} + \beta\hat{A}^{m-1}\mathbf{y}) = \alpha\hat{A}^m\mathbf{x} + \beta\hat{A}^m\mathbf{y}.$$

Отсюда, умножая эти равенства на коэффициенты  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  и почленно складывая, получим

$$\varphi(\hat{A})(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha\varphi(\hat{A})\mathbf{x} + \beta\varphi(\hat{A})\mathbf{y},$$

т. е. преобразование  $\varphi(\hat{A})$  линейное.

Отметим, что если преобразования  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$  линейные, то алгебраическим операциям над этими преобразованиями соответствуют такие же алгебраические операции над их матрицами (в одном и том же базисе).

4° Первая теорема приведения. Пусть  $\hat{A}$  — линейное преобразование, действующее из  $\mathcal{L}^n$  в  $\mathcal{L}^n$ , и  $A$  —  $(n \times n)$ -матрица этого преобразования в некотором базисе.

Многочлен

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda E - A) \tag{14}$$

называется *характеристическим полиномом* преобразования  $\hat{A}$  (или матрицы  $A$ ), а его корни — *характеристическими числами* (или собственными значениями) преобразования  $\hat{A}$  (а также матрицы  $A$ ).

Как известно, характеристический полином, а следовательно, и характеристические корни преобразования  $\hat{A}$  не зависят от выбора базиса.

Согласно теореме Кейли (гл. I, § 10) матрица  $A$  является корнем своего характеристического полинома, т. е. полином  $\Delta(A)$  аннулирует матрицу  $A$ :

$$\Delta(A) = 0.$$

Так как алгебра линейных преобразований вполне аналогична алгебре матриц, то преобразование  $\hat{A}$  также является корнем своего характеристического полинома, т. е.

$$\Delta(\hat{A}) = \hat{0}. \quad (15)$$

Поэтому полином  $\Delta(z)$  может быть назван полиномом, а нулирующим преобразование  $\hat{A}$ .

Ненулевой вектор  $x$ , удовлетворяющий условию

$$\hat{A}x = \lambda x,$$

где  $\lambda$  — некоторое число, называется *собственным вектором* преобразования  $\hat{A}$ , отвечающим его собственному значению  $\lambda$  (ср. гл. I, § 5).

Если  $A$  есть матрица данного преобразования  $\hat{A}$  в некотором базисе, то собственные векторы преобразования  $\hat{A}$  в этом базисе могут быть определены как нетривиальные решения однородной линейной системы  $(A - \lambda E)x = 0$ . Поэтому все собственные значения  $\lambda$  преобразования  $\hat{A}$  являются корнями векового уравнения

$$\det(\lambda E - A) = 0,$$

причем для каждого корня  $\lambda = \lambda_j$  существует один или несколько линейно независимых соответствующих собственных векторов преобразования  $\hat{A}$ .

Пусть  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  ( $m \leq n$ ) — различные собственные значения преобразования  $\hat{A}$  и  $p_1, \dots, p_m$  — их кратности ( $p_j \geq 1$ ,  $j = 1, \dots, m$ ;  $p_1 + \dots + p_m = n$ ). Тогда, очевидно, имеем

$$\Delta(z) = (z - \lambda_1)^{p_1} \dots (z - \lambda_m)^{p_m} \quad (16)$$

и, следовательно,

$$\Delta(\hat{A}) = (\hat{A} - \lambda_1 \hat{E})^{p_1} \dots (\hat{A} - \lambda_m \hat{E})^{p_m}.$$

Определение 5. Совокупность всех векторов  $x \in \mathcal{U}^n$ , удовлетворяющих условию:

$$(\hat{A} - \lambda_j \hat{E})^{p_j} x = 0 \quad (j = 1, \dots, m), \quad (17)$$

где  $p_j$  — кратность характеристического корня  $\lambda_j$ , будем называть *корневым подпространством* преобразования  $\hat{A}$ , принадлежащим его собственному значению  $\lambda_j$ <sup>1)</sup>.

1) Обычно (см., например, [5]) под *корневым пространством* преобразования  $\hat{A}$ , принадлежащим его собственному значению  $\lambda_j$ , понимается совокупность всех векторов  $x \in \mathcal{U}^n$ , для которых хотя бы при одном натуральном  $k = k[x]$  выполняeno соотношение

$$(\hat{A} - \lambda_j E)^k x = 0.$$

Так как впоследствии доказывается, что при построении корневого подпро-

**Замечание.** Для любого собственного значения  $\lambda_j$  преобразования  $\hat{A}$  принадлежащее ему корневое подпространство  $\mathfrak{M}_j$  содержит собственные векторы этого преобразования, отвечающие  $\lambda_j$ , и, следовательно, не сводится к нулевому вектору.

Действительно, если

$$\hat{A}\mathbf{x} = \lambda_j\mathbf{x} \quad (\mathbf{x} \neq 0),$$

то имеем

$$(\hat{A} - \lambda_j\hat{E})^{p_j}\mathbf{x} = (\hat{A} - \lambda_j\hat{E})^{p_j-1}(\hat{A} - \lambda_j\hat{E})\mathbf{x} = 0$$

и, следовательно,  $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}_j$ .

Заметим, что корневое пространство  $\mathfrak{M}_j$  не содержит собственных векторов преобразования  $\hat{A}$ , отвечающих его собственным значениям  $\lambda_k$ , отличным от  $\lambda_j$ . В самом деле, если

$$\hat{A}\mathbf{y} = \lambda_k\mathbf{y} \quad (\mathbf{y} \neq 0),$$

где  $\lambda_k \neq \lambda_j$ , то

$$\begin{aligned} (\hat{A} - \lambda_j\hat{E})^{p_j}\mathbf{y} &= (\hat{A} - \lambda_j\hat{E})^{p_j-1}(\hat{A} - \lambda_j\hat{E})\mathbf{y} = \\ &= (\lambda_k - \lambda_j)(\hat{A} - \lambda_j\hat{E})^{p_j-1}\mathbf{y} = (\lambda_k - \lambda_j)^{p_j}\mathbf{y} \neq 0 \end{aligned}$$

и, следовательно,  $\mathbf{y} \notin \mathfrak{M}_j$ .

Таким образом, преобразование  $\hat{A}$  на каждом его корневом подпространстве  $\mathfrak{M}_j$  ( $j=1, \dots, m$ ) имеет единственное собственное значение  $\lambda_j$ .

**Лемма 1.** Для всякого линейного преобразования  $A$  в  $\mathfrak{Q}^n$  его любое корневое подпространство  $\mathfrak{M}_j$  является подпространством пространства  $\mathfrak{Q}^n$ , инвариантным относительно данного преобразования  $\hat{A}$ .

**Доказательство.** Пусть  $\mathfrak{M}_j$  ( $j=1, \dots, m$ ) — корневое пространство линейного преобразования, принадлежащее его собственному значению  $\lambda_j$ , т. е. множество всех векторов  $\mathbf{x} \in \mathfrak{Q}^n$ , удовлетворяющих условию (17). Для любых  $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}_j$  и  $\mathbf{y} \in \mathfrak{M}_j$  и произвольных чисел  $\alpha$  и  $\beta$  имеем (см. 3°)

$$\begin{aligned} (\hat{A} - \lambda_j\hat{E})^{p_j}(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) &= \alpha(\hat{A} - \lambda_j\hat{E})^{p_j}\mathbf{x} + \beta(\hat{A} - \lambda_j\hat{E})^{p_j}\mathbf{y} = \\ &= \alpha\mathbf{0} + \beta\mathbf{0} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Следовательно,  $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} \in \mathfrak{M}_j$ , т. е.  $\mathfrak{M}_j$  есть подпространство пространства  $\mathfrak{Q}^n$ .

---

странства можно ограничиться показателями  $k \leq p_j$ , где  $p_j$  — кратность характеристического корня  $\lambda_j$ , то определение 5, введенное ради краткости изложения, эквивалентно обычному.

Подпространство  $\mathfrak{M}_j$  инвариантно относительно преобразования  $\hat{A}$ , так как, учитывая перестановочность преобразований  $(\hat{A} - \lambda_j \hat{E})^{p_j}$  и  $\hat{A}$ , при  $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}_j$  получаем

$$(\hat{A} - \lambda_j \hat{E})^{p_j} \hat{A} \mathbf{x} = \hat{A} [(\hat{A} - \lambda_j \hat{E})^{p_j} \mathbf{x}] = \hat{A} \mathbf{0} = \mathbf{0},$$

т. е.  $\hat{A} \mathbf{x} \in \mathfrak{M}_j$ .

Теорема 4 (первая теорема разложения). *Комплексное векторное пространство  $\mathfrak{E}^n$  представляет собой прямую сумму инвариантных корневых подпространств любого своего линейного преобразования  $\hat{A}$ , принадлежащих всем его различным собственным значениям  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  ( $m \leq n$ ).*

Доказательство (см. [5]). Пусть  $\Delta(\lambda)$  из (14) — характеристический полином преобразования  $\hat{A}$ . Разлагая дробь  $1/\Delta(\lambda)$  на простейшие, будем иметь

$$\frac{1}{\Delta(\lambda)} = \left[ \frac{A_1^{(1)}}{\lambda - \lambda_1} + \dots + \frac{A_{p_1}^{(1)}}{(\lambda - \lambda_1)^{p_1}} \right] + \dots + \left[ \frac{A_1^{(m)}}{\lambda - \lambda_m} + \dots + \frac{A_{p_m}^{(m)}}{(\lambda - \lambda_m)^{p_m}} \right],$$

где  $A_k^{(j)}$  ( $j=1, \dots, m$ ;  $k=1, \dots, p_j$ ) — некоторые постоянные. Отсюда находим

$$\frac{1}{\Delta(\lambda)} = \frac{P_1(\lambda)}{(\lambda - \lambda_1)^{p_1}} + \dots + \frac{P_m(\lambda)}{(\lambda - \lambda_m)^{p_m}},$$

где  $P_j(\lambda)$  ( $j=1, \dots, m$ ) — целые полиномы, причем дроби  $P_j(\lambda)/(\lambda - \lambda_j)^{p_j}$  — несократимые, т. е.  $P_j(\lambda_j) \neq 0$ .

Таким образом, получаем тождество

$$1 \equiv P_1(\lambda) \Delta_1(\lambda) + \dots + P_m(\lambda) \Delta_m(\lambda), \quad (18)$$

где

$$\Delta_j(\lambda) = \frac{\Delta(\lambda)}{(\lambda - \lambda_j)^{p_j}} \quad (j=1, \dots, m) \quad (19)$$

— также целые полиномы.

Для любого вектора  $\mathbf{x} \in \mathfrak{E}^n$  положим

$$\mathbf{x}^{(j)} = P_j(\hat{A}) \Delta_j(\hat{A}) \mathbf{x} \quad (j=1, \dots, m). \quad (20)$$

Так как на основании формулы (18) имеем

$$\hat{E} = P_1(\hat{A}) \Delta_1(\hat{A}) + \dots + P_m(\hat{A}) \Delta_m(\hat{A}),$$

то

$$\mathbf{x} = P_1(\hat{A}) \Delta_1(\hat{A}) \mathbf{x} + \dots + P_m(\hat{A}) \Delta_m(\hat{A}) \mathbf{x} \quad (21)$$

и, следовательно, справедливо разложение

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(1)} + \dots + \mathbf{x}^{(m)}. \quad (22)$$

Пусть  $\mathfrak{M}_j$  — корневое подпространство преобразования  $\hat{A}$ , отвечающее его собственному значению  $\lambda_j$  ( $j=1, \dots, m$ ), т. е.

$$\mathfrak{M}_j = \{ \mathbf{x} \in \mathfrak{Q}^n : (\hat{A} - \lambda_j \hat{E})^p \mathbf{x} = \mathbf{0} \}.$$

Покажем, что  $\mathbf{x}^{(j)} \in \mathfrak{M}_j$ . Действительно, используя формулы (19) и (20), на основании теоремы Кейли получаем

$$(\hat{A} - \lambda_j \hat{E})^p \mathbf{x}^{(j)} = P_j(\hat{A}) \Delta(\hat{A}) \mathbf{x} = \mathbf{0},$$

т. е.  $\mathbf{x}^{(j)} \in \mathfrak{M}_j$ .

Докажем, что разложение (22) на компоненты  $\mathbf{x}^{(j)} \in \mathfrak{M}_j$  ( $j=1, \dots, m$ ) единственно. Действительно, пусть, кроме (22), имеем

$$\mathbf{x} = \mathbf{y}^{(1)} + \dots + \mathbf{y}^{(m)},$$

где  $\mathbf{y}^{(j)} \in \mathfrak{M}_j$  ( $j=1, \dots, m$ ). Учитывая, что при  $k \neq j$  и  $\mathbf{z} \in \mathfrak{M}_j$  справедливо соотношение

$$\begin{aligned} \Delta_k(\hat{A})\mathbf{z} &= (\hat{A} - \lambda_1 \hat{E})^{p_1} \dots (\hat{A} - \lambda_{k-1} \hat{E})^{p_{k-1}} (\hat{A} - \lambda_{k+1} \hat{E})^{p_{k+1}} \dots \\ &\dots (\hat{A} - \lambda_m \hat{E})^{p_m} \mathbf{z} = \prod_{\substack{s \neq j, \\ s \neq k}} (\hat{A} - \lambda_s \hat{E})^{p_s} \cdot (\hat{A} - \lambda_j \hat{E})^{p_j} \mathbf{z} = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

и используя формулы (21) и (20), будем иметь

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^{(j)} &= \sum_{k=1}^m P_k(\hat{A}) \Delta_k(\hat{A}) \mathbf{y}^{(j)} = P_j(\hat{A}) \Delta_j(\hat{A}) \mathbf{y}^{(j)} = \\ &= \sum_{k=1}^m P_j(\hat{A}) \Delta_j(\hat{A}) \mathbf{y}^{(k)} = P_j(\hat{A}) \Delta_j(\hat{A}) \sum_{k=1}^m \mathbf{y}^{(k)} = \\ &= P_j(\hat{A}) \Delta_j(\hat{A}) \mathbf{x} = \mathbf{x}^{(j)} \quad (j=1, \dots, m). \end{aligned}$$

Таким образом, всякий вектор  $\mathbf{x} \in \mathfrak{Q}^n$  единственным образом может быть представлен в виде суммы (22), где  $\mathbf{x}^{(j)} \in \mathfrak{M}_j$  ( $j=1, \dots, m$ ), и, следовательно, пространство  $\mathfrak{Q}^n$  является прямой суммой корневых подпространств:

$$\mathfrak{Q}^n = \mathfrak{M}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{M}_m, \tag{23}$$

где

$$\dim \mathfrak{M}_1 + \dots + \dim \mathfrak{M}_m = n.$$

**Следствие 1.** Если линейное преобразование  $\hat{A}$  в  $\mathfrak{Q}^n$  имеет единственное собственное значение  $\lambda_1$ , то пространство  $\mathfrak{Q}^n$  является корневым для  $\hat{A}$ , принадлежащим  $\lambda_1$ , т. е.

$$\mathfrak{Q}^n = \{ \mathbf{x} \in \mathfrak{Q}^n : (\hat{A} - \lambda_1 \hat{E})^n \mathbf{x} = \mathbf{0} \}.$$

Следствие 2. *Размерности корневых подпространств  $\mathfrak{M}_j$  ( $j=1, \dots, m$ ) совпадают с кратностями соответствующих собственных значений  $\lambda_j$ , т. е.*

$$\dim \mathfrak{M}_j = p_j \quad (j=1, \dots, m). \quad (24)$$

Доказательство будем проводить методом индукции относительно числа  $m$  собственных значений преобразования  $\hat{A}$ .

Если преобразование  $\hat{A}$  допускает единственное собственное значение  $\lambda_1$  ( $m=1$ ), то его характеристический полином имеет вид

$$\Delta(z) = (z - \lambda_1)^n.$$

Отсюда кратность корня  $\lambda_1$  есть  $p_1 = n$ , и эта кратность совпадает с размерностью единственного корневого подпространства  $\mathfrak{M}_1$ :

$$\dim \mathfrak{M}_1 = \dim \mathfrak{L}^n = n.$$

Пусть теперь наше утверждение верно для всех линейных преобразований  $\hat{B}$  любого линейного пространства  $\mathfrak{L}^k$ , допускающих  $m-1$  различных собственных значений ( $m \geq 2$ ).

В пространстве  $\mathfrak{L}^n$  рассмотрим линейное преобразование  $\hat{A}$ , имеющее  $m$  различных собственных значений  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  с кратностями, соответственно,  $p_1, \dots, p_m$ , где

$$p_1 + \dots + p_m = n. \quad (25)$$

Пусть  $\mathfrak{M}_j$  ( $j=1, \dots, m$ ) — корневое подпространство преобразования  $\hat{A}$ , принадлежащее собственному значению  $\lambda_j$ . Прямая сумма

$$\mathfrak{M}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{M}_{m-1}$$

представляет собой некоторое линейное подпространство  $\mathfrak{L}^k$ , на котором на основании приведенного выше замечания преобразование  $\hat{A}$  имеет лишь  $m-1$  различных собственных значений  $\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}$ . В таком случае в силу индукционного предположения получим

$$\dim \mathfrak{M}_s = p_s \quad (s=1, \dots, m-1).$$

Кроме того, как было доказано, имеем

$$\mathfrak{L}^n = \mathfrak{M}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{M}_{m-1} \oplus \mathfrak{M}_m;$$

поэтому

$$n = \dim \mathfrak{L}^n = \sum_{s=1}^{m-1} \dim \mathfrak{M}_s + \dim \mathfrak{M}_m = \sum_{s=1}^{m-1} p_s + \dim \mathfrak{M}_m.$$

Отсюда, учитывая формулу (25), получаем

$$\dim \mathfrak{M}_m = n - \sum_{s=1}^{m-1} p_s = p_m,$$

и, таким образом, наше утверждение доказано.

*Следствие 3. Если линейное преобразование  $\hat{A}$  рассматривать на его корневом подпространстве  $\mathfrak{M}_j$  ( $j=1, \dots, n$ ), принадлежащем собственному значению  $\lambda_j$ , то характеристический полином этого преобразования имеет вид*

$$D_j(z) = (z - \lambda_j)^{p_j}, \tag{26}$$

где  $p_j$  — кратность корня  $\lambda_j$ .

Формула (26) вытекает из того обстоятельства, что на корневом подпространстве  $\mathfrak{M}_j$  преобразование  $\hat{A}$  имеет единственное собственное значение  $\lambda_j$ , причем размерность  $\mathfrak{M}_j$  равна  $p_j$ .

На основании первой теоремы разложения (теорема 4) и теоремы 3 получаем первую теорему приведения:

*Теорема 4'. Всякую  $(n \times n)$ -матрицу  $A$ , имеющую различные собственные значения  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  ( $m \leq n$ ) с соответствующими кратностями  $p_1, \dots, p_m$ , где  $\sum_{j=1}^m p_j = n$ , путем преобразования подобия с некоторой неособенной матрицей  $S$  можно привести к квазидиагональному виду:*

$$SAS^{-1} = \text{diag} [A_1(\lambda_1), \dots, A_m(\lambda_m)],$$

где  $A_j(\lambda_j)$  ( $j=1, \dots, m$ ) — квадратная матрица порядка  $p_j$ , допускающая единственное собственное значение  $\lambda_j$ , т. е. такая, что ее характеристический полином имеет вид

$$D_j(\lambda) \equiv \det [E^{(p_j)}\lambda - A_j(\lambda_j)] = (\lambda - \lambda_j)^{p_j}.$$

Таким образом, остается изучить структуру квадратных матриц, обладающих единственным собственным значением.

5° Вторая теорема приведения. Для изучения структуры корневых подпространств линейного преобразования введем понятие *циклического пространства*.

**Определение 6.** Линейное пространство  $\mathfrak{U}^n$  называется *циклическим* относительно его линейного преобразования  $\hat{A}$ , если некоторая цепочка векторов

$$\xi, \hat{A}\xi, \dots, \hat{A}^{n-1}\xi \quad (\xi \neq 0)$$

образует базис этого пространства (*циклический базис*).

Это определение дословно переносится на инвариантное подпространство.

Лемма 2. Если  $\hat{A}$  — линейное преобразование в  $\mathcal{E}^n$  с единственным собственным значением  $\lambda$  и пространство  $\mathcal{E}^n$  — циклическое относительно преобразования

$$\hat{B} = \hat{A} - \lambda \hat{E},$$

то матрица  $A$  преобразования  $\hat{A}$  в циклическом базисе

$$\xi_1, \xi_2 = \hat{B}\xi_1, \dots, \xi_n = \hat{B}^{n-1}\xi_1 \quad (27)$$

представляет собой клетку Жордана

$$J(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix} \equiv \lambda E + I_1, \quad (28)$$

соответствующую числу  $\lambda$ .

Доказательство. Так как пространство  $\mathcal{E}^n$  является корневым подпространством для преобразования  $\hat{A}$ , принадлежащим собственному значению  $\lambda$ , то

$$\hat{B}^n = (\hat{A} - \lambda \hat{E})^n = \hat{O}$$

(см. следствие 1 теоремы 4).

Из соотношений (27), полагая  $\xi_{n+1} = \mathbf{0}$ , имеем

$$\hat{A}\xi_k = (\lambda \hat{E} + \hat{B})\xi_k = \lambda \xi_k + \xi_{k+1} \quad (k=1, \dots, n),$$

поэтому

$$\left. \begin{aligned} \hat{A}\xi_1 &= \lambda \xi_1 + \xi_2, \\ \hat{A}\xi_2 &= \lambda \xi_2 + \xi_3, \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \\ \hat{A}\xi_{n-1} &= \lambda \xi_{n-1} + \xi_n, \\ \hat{A}\xi_n &= \lambda \xi_n. \end{aligned} \right\}$$

Следовательно, матрица преобразования  $\hat{A}$  в базисе (27) представляет клетку Жордана (28).

Теорема 5 (вторая теорема разложения). Пусть  $\mathfrak{M}_j$  — корневое подпространство линейного преобразования  $A$  в  $\mathcal{E}^n$ , принадлежащее его собственному значению  $\lambda_j$ . Тогда  $\mathfrak{M}_j$  разлагается в прямую сумму инвариантных подпространств

$$\mathfrak{M}_j = \mathfrak{N}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{N}_s,$$

циклических относительно

$$\hat{B}_j = \hat{A} - \lambda_j \hat{E}. \quad (29)$$



Доказательство. Пусть  $\dim \mathfrak{M}_j = p_j$  ( $1 \leq p_j \leq n$ ). Положим

$$\mathfrak{E}_k = \{x \in \mathfrak{M}_j: \hat{B}_j^k x = 0\} \quad (k=0, 1, \dots, p_j),$$

где  $\hat{B}_j$  определяется формулой (29).

Очевидно, имеем

$$\mathfrak{M}_j = \mathfrak{E}_{p_j} \supset \mathfrak{E}_{p_j-1} \supset \dots \supset \mathfrak{E}_1 \supset \mathfrak{E}_0 = 0,$$

причем  $\mathfrak{E}_k$  ( $k=0, 1, \dots, p_j$ ) — подпространства в  $\mathfrak{M}_j$ , инвариантные относительно преобразования  $\hat{B}_j$ .

Пусть

$$\xi_1^{(k)}, \dots, \xi_{q_k}^{(k)} \quad (k=1, \dots, p_j) \quad (30)$$

— все векторы из  $\mathfrak{E}_k$ , линейно независимые относительно  $\mathfrak{E}_{k-1}$  (определение 3), т. е. векторы (30) линейно независимы и подпространство, натянутое на них, имеет с  $\mathfrak{E}_{k-1}$  нулевое пересечение, причем число их максимально.

Положим

$$\xi_h^{(k-l)} = \hat{B}_j^l \xi_h^{(k)} \quad (h=1, \dots, q_k; l < k). \quad (31)$$

Тогда векторы  $\xi_h^{(k-l)} \in \mathfrak{E}_{k-l}$  и линейно независимы относительно  $\mathfrak{E}_{k-l-1}$  при  $k > 1$ .

Действительно, имеем

$$\hat{B}_j^{k-l} \xi_h^{(k-l)} = \hat{B}_j^k \xi_h^{(k)} = 0,$$

т. е.

$$\xi_h^{(k-l)} \in \mathfrak{E}_{k-l}.$$

Далее, векторы  $\xi_h^{(k-l)}$  линейно независимы, так как, если

$$\sum_h \alpha_h \xi_h^{(k-l)} = \hat{B}_j^l \left( \sum_h \alpha_h \xi_h^{(k)} \right) = 0,$$

то

$$\sum_h \alpha_h \xi_h^{(k)} \in \mathfrak{E}_l \subset \mathfrak{E}_{k-1}.$$

Отсюда, учитывая, что векторы (30) линейно независимы относительно  $\mathfrak{E}_{k-1}$ , находим

$$\sum_h \alpha_h \xi_h^{(k)} = 0,$$

т. е.

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{q_k} = 0,$$

и, таким образом, векторы (31) линейно независимы. Наконец, пусть

$$\mathbf{x} = \sum_h \alpha_h \xi_h^{(k-l)} \in \mathfrak{E}_{k-l-1}.$$

Тогда

$$\mathbf{0} = \hat{B}_j^{k-l-1} \mathbf{x} = \hat{B}_j^{k-1} \left( \sum_h \alpha_h \xi_h^{(k)} \right)$$

и, следовательно,

$$\sum_k \alpha_h \xi_h^{(k)} \in \mathfrak{E}_{k-1}.$$

Но векторы  $\xi_h^{(k)}$  линейно независимы относительно  $\mathfrak{E}_{k-1}$ ; поэтому

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{q_k} = 0,$$

т. е.  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , и, таким образом, векторы  $\xi_h^{(k-l)}$  линейно независимы относительно  $\mathfrak{E}_{k-l-1}$ .

Пусть  $\mathfrak{E}_r$  ( $1 \leq r \leq p_j$ ) — подпространство в  $\mathfrak{M}_j$  наивысшей размерности, содержащее ненулевые векторы, линейно независимые относительно  $\mathfrak{E}_{r-1}$ . Такое подпространство существует, так как преобразование  $A$  на инвариантном подпространстве  $\mathfrak{M}_j$  имеет по меньшей мере один собственный вектор  $\xi \neq \mathbf{0}$ , соответствующий собственному значению  $\lambda_j$ , т. е.

$$\hat{B}_j \xi = (A - \lambda_j \hat{E}) \xi = 0,$$

который, очевидно, входит в  $\mathfrak{E}_1$  и является линейно независимым относительно  $\mathfrak{E}_0 = 0$ .

В подпространстве  $\mathfrak{E}_r$  построим максимальную систему векторов

$$\xi_1^{(r)}, \dots, \xi_{q_r}^{(r)},$$

линейно независимых относительно подпространства  $\mathfrak{E}_{r-1}$ . Как было показано выше, векторы

$$\xi_h^{(r-1)} = \hat{B}_j \xi_h^{(r)} \quad (h = 1, \dots, q_r)$$

принадлежат подпространству  $\mathfrak{E}_{r-1}$  и линейно независимы относительно  $\mathfrak{E}_{r-2}$ . Дополним эту систему, если это необходимо, до максимальной системы векторов

$$\xi_1^{(r-1)}, \dots, \xi_{q_{r-1}}^{(r-1)} \quad (q_{r-1} \geq q_r),$$

линейно независимых относительно  $\mathfrak{E}_{r-2}$ .

Продолжая этот процесс дальше, мы в каждом подпространстве  $\mathfrak{E}_k$  ( $1 \leq k \leq r$ ) будем иметь максимальную систему векторов

$$\xi_1^{(k)}, \dots, \xi_{q_k}^{(k)} \quad (k = r, r-1, \dots, 1; q_{k-1} \geq q_k), \quad (32)$$

линейно независимых относительно  $\mathfrak{S}_{k-1}$ , причем справедливы соотношения

$$\xi_h^{(k-1)} = \hat{B}_j \xi_h^{(k)} \quad (h=1, \dots, q_k; 1 \leq k \leq r). \quad (33)$$

Согласно теореме 2 объединение всех векторов (32) представляет собой базис подпространства  $\mathfrak{M}_j$ . Каждый из этих базисных векторов  $\xi_h^{(k)} \in \mathfrak{S}_k$  такой, что  $\hat{B}_j \xi_h^{(k+1)} \neq \xi_h^{(k)}$ , порождает полную цепочку (серию векторов)

$$\xi_h^{(k)}, \hat{B}_j \xi_h^{(k)}, \dots, \hat{B}_j^{k-1} \xi_h^{(k)} \quad (\hat{B}_j^k \xi_h^{(k)} = 0), \quad (34)$$

которая является циклическим базисом подпространства  $\mathfrak{N}$  размерности  $k$ , натянутого на векторы цепочки, причем  $\mathfrak{N}$ , очевидно, инвариантно относительно преобразования  $\hat{B}_j$ .

Нумеруя эти циклические подпространства  $\mathfrak{N}_1, \dots, \mathfrak{N}_s$  ( $s=q_1$ ) и учитывая, что объединение их базисов является базисом подпространства  $\mathfrak{M}_j$ , на основании теоремы 1 получаем, что  $\mathfrak{M}_j$  представляет собой прямую сумму:

$$\mathfrak{M}_j = \mathfrak{N}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{N}_s, \quad (35)$$

что и требовалось доказать.

**З а м е ч а н и е.** Из данной конструкции построения базиса подпространства  $\mathfrak{M}_j$  вытекает, что в сумме (35) имеется ровно  $q_r - q_{k+1}$  слагаемых  $\mathfrak{N}_i$ , для которых

$$\dim \mathfrak{N}_i = k \quad (k=r, r-1, \dots, 1; q_{r+1}=0),$$

причем максимальная размерность подпространства  $\mathfrak{N}_i$  равна  $r$  и

$$q_r r + (q_{r-1} - q_r)(r-1) + \dots + (q_2 - q_3) \cdot 2 + (q_1 - q_2) \cdot 1 = \\ = q_r + q_{r-1} + \dots + q_2 + q_1 = \dim \mathfrak{M}_j.$$

**Теорема 5'** (вторая теорема приведения). Пусть  $(n \times n)$ -матрица  $A$  имеет единственное собственное значение  $\lambda$ . Тогда эту матрицу с помощью преобразования подобия с неособенной матрицей  $S$  можно привести к квазидиагональному виду

$$SAS^{-1} = \text{diag} [J_1(\lambda), \dots, J_s(\lambda)], \quad (36)$$

где

$$J_k(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix} \equiv \lambda E^{(e_k)} + I_1^{(e_k)} \quad (k=1, \dots, s)$$

— клетки Жордана различных порядков  $e_k$  ( $e_1 + \dots + e_s = n$ ).

Формула (36) непосредственно вытекает из разложения (35), теоремы 3 и леммы 2.

Объединяя первую и вторую теоремы приведения (теоремы 4' и 5'), получаем следующий результат.

**Теорема 6.** *Всякая  $(n \times n)$ -матрица  $A = [a_{jk}]$  подобна некоторой матрице*

$$J = SAS^{-1} \quad (\det S \neq 0),$$

имеющей жорданову форму

$$J = \text{diag} [J_1(\lambda_1), \dots, J_m(\lambda_m)] \quad (m \leq n), \quad (37)$$

где  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  — различные собственные значения матрицы  $A$ ,

$$J_k(\lambda_k) = \text{diag} [J_{k_1}(\lambda_k), \dots, J_{k_{l_k}}(\lambda_k)]$$

и

$$J_{k_h}(\lambda_k) = \lambda_k E^{(e_{kh})} + I_1^{(k_h)} \quad (h=1, \dots, l_k; k=1, \dots, m)$$

— клетка Жордана с собственным значением  $\lambda_k$ , причем каждому собственному значению  $\lambda_k$  кратности матрицы  $A$  соответствует одна или несколько клеток Жордана порядка  $e_{kh}$ , где

$$e_{k_1} + \dots + e_{k_{l_k}} = p_k \quad (k=1, \dots, m)$$

и

$$p_1 + \dots + p_m = n.$$

Число  $l_k$  клеток Жордана, отвечающих собственному значению  $\lambda_k$ , совпадает с максимальным числом линейно независимых собственных векторов матрицы  $A$ , соответствующих значению  $\lambda_k$ .

**Замечание.** Если матрица  $A$  действительная, то базис, в котором она имеет жорданову форму (37), можно выбрать так, что составляющие циклические базисы, соответствующие действительным собственным значениям, будут действительны, а комплексно-сопряженным — комплексно-сопряженными.

Укажем один из способов нахождения элементарных делителей данной квадратной матрицы  $A = [a_{jk}]$  порядка  $n$ . Рассмотрим  $\lambda$ -матрицу

$$F(\lambda) = \lambda E - A.$$

Пусть  $r$  — ранг матрицы  $F(\lambda)$  ( $1 \leq r \leq n$ ) и  $D_j(\lambda)$  ( $j=0, 1, \dots, r$ ) — наибольший общий делитель ее миноров  $j$ -го порядка, где положено  $D_0(\lambda) = 1$ . Функция

$$E_j(\lambda) = \frac{D_j(\lambda)}{D_{j-1}(\lambda)} \quad (j=1, \dots, r),$$

являющаяся целым полиномом, называется  $j$ -м инвариантным множителем матрицы  $A$  (см. [82]).

Если  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  ( $m \leq n$ ) — различные характеристические корни матрицы  $A$ , то можно доказать справедливость разложения

$$E_j(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{e_{1j}} \dots (\lambda - \lambda_m)^{e_{mj}},$$

где множители  $(\lambda - \lambda_k)^{e_{kj}}$  ( $e_{kj} \geq 1$ ), не сводящиеся к постоянным величинам, являются элементарными делителями матрицы  $A$ . Последнее разложение дает возможность эффективно вычислять элементарные делители данной матрицы.

У п р а ж н е н и е. Пусть  $A = [a_{jk}]$  — действительная  $(n \times n)$ -матрица,  $\lambda_p = \alpha_p \pm i\beta_p$  ( $\beta_p \neq 0$ ) ( $p = 1, 2, \dots$ ) — ее комплексные собственные значения, а  $\gamma_q$  ( $q = 1, 2, \dots$ ) — ее действительные собственные значения. Доказать, что тогда матрицу  $A$  с помощью действительной неособенной матрицы  $T$  можно представить в виде

$$A = T^{-1}BT,$$

где

$$B = \text{diag} [K_1(\lambda_1), \dots, K_P(\lambda_P); J_1(\gamma_1), \dots, J_Q(\gamma_Q)],$$

причем (см. [17])

$$K_p(\lambda_p) = \begin{bmatrix} S_p & E^{(2)} & \dots & O_2 & O_2 \\ O_2 & S_p & \dots & O_2 & O_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ O_2 & O_2 & \dots & S_p & E^{(2)} \\ O_2 & O_2 & \dots & O_2 & S_p \end{bmatrix},$$

$$S_p = \begin{bmatrix} \alpha_p & -\beta_p \\ \beta_p & \alpha_p \end{bmatrix}, \quad E^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

( $p = 1, \dots, P$ ),

и

$$J_q(\gamma_q) = \begin{bmatrix} \gamma_q & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_q & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \gamma_q & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \gamma_q \end{bmatrix}$$

( $q = 1, \dots, Q$ ).

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- [1] Булгаков Б. В., Колебания, Гостехиздат, 1954.
- [2] Курош А. Г., Курс высшей алгебры, «Наука», 1965.
- [3] Демидович Б. П., Марон И. А., Основы вычислительной математики, «Наука», 1966.
- [4] Гельфанд И. М., Лекции по линейной алгебре, Гостехиздат, 1961.
- [5] Мальцев А. И., Основы линейной алгебры, «Наука», 1967.
- [6] Беллман Р., Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений, ИЛ, 1954.
- [7] Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I, «Наука», 1966; т. II, Физматгиз, 1962.
- [8] Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. III, ч. I, «Наука», 1967.
- [9] Петровский И. Г., Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, «Наука», 1964.
- [10] Понтрягин Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, «Наука», 1965.
- [11] Степанов В. В., Курс дифференциальных уравнений, Физматгиз, 1959.
- [12] Немыцкий В. В. и Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, Гостехиздат, 1949.
- [13] Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения, Гостехиздат, 1950.
- [14] Малкин И. Г., Теория устойчивости движения, «Наука», 1966.
- [15] Четаев Н. Г., Устойчивость движения, Гостехиздат, 1955.
- [16] Красовский Н. Н., Некоторые задачи теории устойчивости движения, Физматгиз, 1959.
- [17] Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, «Наука», 1967.
- [18] Bihari J., A generalization of a lemma of Bellman and its application to uniqueness problems of differential equations, *Acta math. Acad. Scient. Hung.* VII, 1 (1956), 81—94.
- [19] Ландау Э., Введение в дифференциальное и интегральное исчисление, ИЛ, 1948.
- [20] Еругин Н. П., Приводимые системы, Труды Матем. ин-та АН СССР XIII (1946).
- [21] Лефшец С., Геометрическая теория дифференциальных уравнений, ИЛ, 1961.
- [22] Wazewski, Sur la limitation des integrales des systèmes d'equations differentielles lineaires ordinaires, *Studia Math.* 10 (1948), 48—59.
- [23] Levinson N., The asymptotic behavior of system of linear differential equations, *Amer. J. Math.* 68 (1946), 1—6.
- [24] Brauer, Nonlinear differential equations with forcing terms, *Proc. Amer. Math. Soc.* 15, 5 (1964), 758—765.
- [25] Perron O., Die Ordnungszahlen der Differentialgleichungssysteme, *Math. Zeitschr.* 31 (1930), 748—766.

- [26] Perron O., Über eine Matrixtransformation, *Math. Zeitschr.* 32 (1930), 465—473.
- [27] Виноград Р. Э., Новое доказательство теоремы Перрона и некоторые свойства правильных систем, УМН, 9:2 (60) (1954), 129—136.
- [28] Коддингтон Э. А. и Левинсон Н., Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, ИЛ, 1958.
- [29] Halanay A., *Theoria calitativă a ecuațiilor diferențiale*, Ed. Acad. RPR, 1963.
- [30] Фрезер Р., Дункан В. и Коллар А., Теория матриц и ее приложения, ИЛ, 1950.
- [31] Стокер Дж., Нелинейные колебания в механических и электрических системах, ИЛ, 1952.
- [32] Гантмахер Ф. Р., Лекции по аналитической механике, Физматгиз, 1960.
- [33] Уиттекер Е. Т., Аналитическая динамика, ОНТИ, 1937.
- [34] Гельфанд И. М. и Лидский В. Б., О структуре областей устойчивости линейных канонических систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, УМН 10:1 (63) (1955), 3—40.
- [35] Гурса Э., Курс математического анализа, т. II, ч. 2; т. III, ч. 1, Гостехиздат, 1933.
- [36] Зубов В. И., Колебания в нелинейных и управляемых системах, Судпромгиз, 1962.
- [37] Чезари Л., Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений, «Мир», 1964.
- [38] Conti R., Sulla stabilità dei sistemi di equazioni differenziali lineari, *Riv. mat. Univ., Parma* 6 (1955), 3—35.
- [39] Borg G., Über die Stabilität gewissen Klassen von linearen Differentialgleichungen, *Ark. Math. Astr. Fys.*, ser. 31A, 1 (1944), 460—482.
- [40] Kolodner Ignace I., Power dissipated in linear systems with periodic coefficients, *J. Math. and Mech.* 12, 5 (1963), 675—682.
- [41] Иосидзава Т., Функция Ляпунова и ограниченность решений. Сб. переводов «Математика», «Мир», 9:5 (1955), 95—127.
- [42] Барбашин Е. А. и Красовский Н. Н., О существовании функции Ляпунова в случае асимптотической устойчивости в целом, ПММ, 18, вып. 3 (1954), 345—350.
- [43] Персидский К. П., Об устойчивости решений дифференциальных уравнений, ИАН Казахской ССР 97, вып. 4 (1950).
- [44] Массера Х. Л., К теории устойчивости. Сб. переводов «Математика», ИЛ, 1:4 (1957), 81—101.
- [45] Лефшец С., Ла-Салль Ж., Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова, «Мир», 1964.
- [46] Liang Zhong-chao, The bondedness of solutions of certain non-linear differential equations, *Chinese Math.* 3, 2 (1963), 169—183.
- [47] Плисс В. А., Нелокальные проблемы теории колебаний, «Наука», 1964.
- [48] Демидович Б. П., О диссипативности некоторой нелинейной системы дифференциальных уравнений, I, Вестн. МГУ, 6 (1961), 19—27; II, 1 (1962), 3—8.
- [49] Лузин Н. Н., О качественном исследовании уравнения движения поезда, Матем. сб. 39 (3) (1932), 6—26.
- [50] Levinson N., Transformation theory of non-linear differential equations of the second order, *Ann math.* 45, 4 (1944), 723—737.
- [51] Колмогоров А. Н. и Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, изд. МГУ, вып. 1 (1954), вып. 2 (1960).
- [52] Vejvoda O., On the existence and stability of the periodic solution of the second kind of a certain mechanical system, Чехословацкий математический журнал 9 (84) (1959), 390—415.

- [52a] Андронов А. и Витт А., Об устойчивости по Ляпунову, ЖЭТФ **3**, вып. 3 (1933).
- [53] Wintner A., An Abelian lemma concerning asymptotic equalibria, Amer. Journ. of Math. **68** (1946), 451—454.
- [54] Antosiewicz H. A., On non-linear differential equations of the second order with integrable forcing term, J. London Math. Soc. **30** (1955), 64—67.
- [55] Красносельский М. А. и Крейн С. Г., О принципе усреднения в нелинейной механике, УМН **10:3** (65) (1955), 147—152.
- [56] Боголюбов Н. Н., О некоторых статистических методах в математической физике, ИАН УССР, 1945.
- [57] Spräh H., Über das asymptotische Verhalten der Lösungen linearer Differentialgleichungen, *Math. Zeitschr.* **30** (1929), 487—513.
- [58] Perron O., Über lineare Differentialgleichungen, bei denen die unabhängig Variable reel ist, *Journ. f. reine und angew. Math.* **143** (1913), 25—50.
- [59] Levinson N., The asymptotic nature of solutions of linear systems of differential equations, *Duke Math. Journ.* **15** (1948), 111—126.
- [60] Рапопорт И. М., О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений, ИАН УССР, 1954.
- [61] Демидович Б. П., Об ограниченных решениях некоторой нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, Матем. сб. **40** (82), 1 (1956), 73—94.
- [62] Боль П., О некоторых дифференциальных уравнениях общего характера, применяемых в механике, Юрьев, 1900.
- [63] Демидович Б. П., О некоторых свойствах характеристических показателей системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, Учен. зап. МГУ, **163**; Математика **6** (1952), 123—132.
- [64] Еругин Н. П., Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, ИАН БССР, 1963.
- [65] Кучер Д. Л., О некоторых критериях ограниченности решений системы дифференциальных уравнений, ДАН СССР **69**, 5 (1949), 603—606.
- [66] Бор Г., Почти периодические функции, Гостехиздат, 1934.
- [67] Левитан Б. М., Почти периодические функции, Гостехиздат, 1953.
- [68] Bohl P., Über eine Differentialgleichungen der Störungstheorie, *Crelles Journ.* **131** (1906), 268—321.
- [69] Vallée Poussin C. J., Sur les fonctions presque-périodiques de H. Bohr. *Ann. Soc. scien. Bruxelles* **47** (1927), 141—158.
- [70] Боголюбов Н. Н. и Крылов Н. М., Новые методы нелинейной механики, ОНТИ, 1934.
- [71] Winer N., Generalised harmonic analysis, *Acta math.* **55** (1930), 117—258.
- [72] Bochner S., Beiträge zur Theorie der fastperiodische Funktionen, I Teil: Funktionen einer Variablen, *Math. Ann.* **96** (1927), 119—147; II Teil: Funktionen mehrerer Variablen, там же, 383—409.
- [73] Corduneanu C., Functii aproape-periodice, *Ed. Acad. RPR*, 1961.
- [74] Bohr H. und Neugebauer O., Über lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und fastperiodischer rechter Seite, *Gött. Nachr.* (1926), 8—22.
- [75] Бирюк Г. И., Об одной теореме существования почти периодических решений некоторых систем нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром, ДАН СССР **96**, 1 (1954), 5—7.
- [76] Amerio L., Soluzioni quasiperiodiche, o limitati, di sistemi differenziali non lineari quasi-periodici, o limitati, *Annali Mat. pura ed. appl.* **39** (1955), 97—119.



- [77] Favard J., Sur les équations différentielles à coefficients presque-périodiques, *Acta math.* **51** (1927), 31—81.
- [78] Борухов Л. Е., О периодических и почти периодических решениях уравнений  $y' + q(x)y = f(x)$ , Научн. ежегодник Саратовского ун-та за 1954 г., 656—657.
- [79] Демидович Б. П., Об одном случае почти периодичности решения обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, УМН **8:6** (58) (1953), 103—106.
- [80] Малкин И. Г., Некоторые задачи теории нелинейных колебаний, Физматгиз, 1956.
- [81] Helms L. L., Putnam C. R., Stability in incompressible systems, *Journ. Math. and Mech.* **7**, 6 (1958), 901—903.
- [82] Бохнер М., Введение в высшую алгебру, ГТТИ, 1933.

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Америо теорема 437  
Андропова — Витта теорема 312  
— — теоремы аналог 305  
Арцеля теорема 325  
Асимптотическая фаза решения 298
- Базис векторного пространства 25  
— — — нормированный 25  
— — — ортогональный 25  
Барбашина — Красовского теорема 248  
Бесселя неравенство 389  
Билинейная форма 32  
Бирюк теорема 426  
Бихари лемма 110  
Боголюбова теорема 332  
Боля теорема 361  
Бора — Нейгебауэра теорема обобщенная 423  
Бохнера теорема 415  
— — обобщенная 420
- Важевского неравенство 149  
Вектор, длина (модуль) 23  
—  $n$ -мерный 22  
Вектор-столбец (-строка) 11  
Векторы, линейно независимые относительно подпространства 447  
Вронского определитель 73
- Гамильтонова система дифференциальных уравнений 203  
Гронуолла — Беллмана лемма 108  
Гурвица полином 91  
— теорема 97
- Движение невозмущенное 234  
Диссипативные системы ( $D$ -системы) 289  
Дифференциальная линейная система правильная 165  
— — — приводимая 154  
— система 64  
— —, спектр 137
- Дифференциальная система, спектр полный 145  
Дифференциальные системы асимптотически эквивалентные 159
- Единичный косой ряд 14  
Еругина теорема 154
- Жордана клетки 36
- Интеграл матрицы 52  
Интегральная непрерывность решений 66  
— — функции 328
- Йосидзавы теорема 290
- Квадратичная форма действительная 33  
— — положительно определенная 34  
— — эрмитова 33  
Кейли тождество 48  
Конгруэнтные точки 368  
Коши неравенство 24  
Коши — Буняковского неравенство 386  
Красносельского и Крейна теорема 329  
Кронекера символ 13  
Кронекера — Капелли теорема 26
- Ла-Салля теорема 276  
Ланго — Данилевского условие 117  
Линейная зависимость векторов 24  
— независимость векторов 24  
Ляпунова интегральный признак устойчивости 202  
— константа 201  
— критерий устойчивости по первому приближению 267  
— матрица 153  
— неравенство 151

- Ляпунова преобразование 154  
 — теорема об устойчивости 238, 239  
 — — — асимптотической 240  
 — — — — периодического решения 294  
 — — — — условной 314  
 — — — — квазилинейной системы 257  
 — — о неустойчивости 244  
 — — — нормальности фундаментальной системы 142  
 — — — построении нормальной фундаментальной системы решений 145  
 — — — правильности треугольной линейной системы 174  
 — — — приводимости периодической линейной системы 188  
 — — — характеристических показателей решений линейной системы 135  
 Ляпунова — Пуанкаре теорема 213  
 Массера теорема об асимптотической устойчивости 271  
 — — о существовании периодического решения 221  
 Матрица 11  
 — единичная 13  
 —, жорданова форма 36  
 — квазидиагональная 20  
 — клеточная 19  
 — комплексно-сопряженная 15  
 —, логарифм 59  
 — неособенная (несингулярная) 16  
 — нулевая 11  
 — обратная 16  
 — ортогональная 17  
 — особенная (сингулярная) 16  
 — перехода 29  
 — почти периодическая 418  
 — — — нормальная 420  
 — преобразования 28  
 — — в данном базисе 450  
 — противоположная 12  
 — равномерно почти периодическая 421  
 — симметрическая 15  
 — сопряженная 16  
 — транспонированная 15  
 — унитарная 18  
 — фундаментальная 70  
 — — нормированная 72  
 —, характеристическое уравнение 35  
 —, элементарные делители 37  
 Матрицант 74  
 Матрицы подобные 30  
 Матричный ряд, сходимость 42  
 — —, — абсолютная 42  
 — —, — равномерная 43  
 — — степенной 44—48  
 Мера неправильности системы 271  
 Михайлова критерий 106  
 Множество числовое относительно плотное 367  
 Модуль матрицы 22  
 Мультипликаторы 185  
 Непрерывность семейства функций  
 — равностепенная 325  
 Норма матрицы 20  
 — функции 387  
 Область притяжения решения 68  
 Ограниченность семейства функций  
 — равномерная 325  
 Оператор 337  
 — линейный 337  
 — непрерывный 337  
 Остроградского — Лиувилля формула 73  
 Отображение сжатое 337, 338  
 Парсеваля равенство 410  
 Перрона теорема 170  
 — — о триангуляции линейной системы 180  
 Персидского теорема 254  
 Подпространство инвариантное 450  
 — линейного пространства 445  
 — преобразования корневое 454  
 Полином возвратный 211  
 Полутраектория отрицательная 296  
 — положительная 296  
 Почти период функции 367  
 — периодическая функция 367  
 — периодические системы, разделенное решение 432  
 — — —,  $H$ -класс 430  
 Предел последовательности 336  
 — функции верхний 123  
 — — нижний 124  
 Преобразование единичное 27  
 — линейное 28  
 — нулевое 27  
 — обратное 27, 452  
 — самосопряженное (эрмитово) 31  
 Принцип сжатых отображений 338  
 Произведение матриц 13  
 — матрицы на число 12  
 — преобразований 452  
 — функций скалярное 387

- Производная матрицы 50  
 — по времени в силу системы 238
- Пространство векторное  $n$ -мерное 23  
 — евклидово 24  
 — — комплексное 24  
 — линейное 24, 337  
 — метрическое 335  
 — полное 336  
 — почти периодических функций 387  
 — циклическое 459
- Прямая сумма 446
- Пуанкаре признак 313
- Размерность подпространства 26
- Ранг матрицы 26
- Решение неустойчивое 67
- Решения предельно ограниченные 289
- Свертка функции 397, 398
- Сильвестра формула 49
- Симплектическая единица 209
- Система квазилинейная 257  
 — порождающая 222  
 — приведенная 235  
 — с конвергенцией 281  
 — сопряженная 168
- Системы взаимно сопряженные 169
- Скалярное произведение векторов 23
- След матрицы 18, 58
- Сложение векторов 23
- Собственный вектор преобразования 31, 454
- Степень матрицы 18
- Сумма матриц 12  
 — матричного ряда 42  
 — преобразований 452
- Сходимость в среднем последовательности 411  
 — — ряда 411  
 — семейства функций равномерная 324
- Теорема аппроксимации 412  
 — единственности для почти периодических функций 406  
 — о среднем для почти периодических функций 379  
 — — — — усиленная 382  
 — разложения векторного пространства (вторая) 460  
 — — — — (первая) 456
- Траектория решения 295
- Умножение вектора на число 23
- Уравнение возвратное 211
- Уравнения в вариациях 294
- Устойчивость по Лагранжу 278  
 — решения 66  
 — — асимптотическая 68  
 — — — в целом 68, 248  
 — — при постоянно действующих возмущениях 69  
 — — равномерная 67  
 — — условная 314  
 — — экспоненциальная 251  
 — — орбитальная 296  
 — — асимптотическая 297  
 — состояния равновесия 260—261
- Фавара теорема 441
- Флоке теорема 183
- Фундаментальная последовательность 336  
 — система (матрица) нормальная 139
- Функции ортогональные 388
- Функция, бесконечно большой нижний предел 248  
 —, — малый высший предел 237  
 —, — — — сильный 248  
 — знакоопределенная 236  
 — знакпостоянная 235  
 — нормальная 415  
 — нормированная 388  
 — отрицательно определенная 236  
 — положительно определенная 235
- Фурье коэффициенты 391, 392  
 — показатели 391  
 — ряд 392
- Характеристический показатель интеграла 131  
 — — линейной периодической системы 184  
 — — Ляпунова 125  
 — — матрицы 132  
 — — строгий 130  
 — полином преобразования 453
- Характеристические числа (характеристические корни, собственные значения) матрицы (преобразования) 31, 35, 453
- Четаева теорема 246
- Экспоненциал матрицы 54